BEER | JOHNSTON | MAZUREK | EISENBERG

Mecânica Vetorial para Engenheiros

9ª Edição

ESTÁTICA

✓ Com unidades no Sistema Internacional

M486 Mecânica vetorial para engenheiros [recurso eletrônico estática / Ferdinand P. Beer ... [et al.] ; tradução: Antônio Eustáquio de Melo Pertence ; revisão técnica: Antonio Pertence Junior. – 9. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : AMGH, 2012.

Editado também como livro impresso 2012.
ISBN 978-85-8055-048-1

1. Engenharia mecânica. I. Beer, Ferdinand P.

CDU 621

Catalogação na publicação: Ana Paula M. Magnus – CRB 10/2052

FERDINAND P. BEER
Ex-professor da Lehigh University

DAVID F. MAZUREK
U.S. Coast Guard Academy

E. RUSSELL JOHNSTON, JR.
University of Connecticut

ELLIOT R. EISENBERG
The Pennsylvania State University

Mecânica Vetorial para Engenheiros

ESTÁTICA

9ª Edição

Com unidades no Sistema Internacional

Tradução
Antônio Eustáquio de Melo Pertence
Doutor em Engenharia Mecânica pela UFMG
Professor do Departamento de Engenharia Mecânica da UFMG

Revisão Técnica
Antonio Pertence Júnior
Mestre em Engenharia Mecânica pela UFMG
Professor da Faculdade de Engenharia e Arquitetura (FEA) da Universidade FUMEC/MG

Versão impressa
desta obra: 2012

AMGH Editora Ltda.
2012

Obra originalmente publicada sob o título
Vector Mechanics for Engineers: Statics, *9th Edition*
ISBN 0073529230/9780073529233

Copyright © 2009, The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Capa: *Maurício Pamplona* (*arte sobre capa original*)

Foto da capa: © *John Peter Photography/Alamy*

Leitura final: *Grace Guimarães Mosquera*

Gerente editorial – CESA: *Arysinha Jacques Affonso*

Editora sênior: *Viviane R. Nepomuceno*

Editora: *Luciana Cruz*

Projeto e editoração: *Techbooks*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à AMGH Editora Ltda.
(AMGH EDITORA é uma parceria entre ARTMED Editora S.A. e MCGRAW-HILL EDUCATION).
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre – RS
Fone: (51) 3027-7000 Fax: (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

Unidade São Paulo
Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 – Pavilhão 5 – Cond. Espace Center
Vila Anastácio – 05095-035 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100 Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444 – www.grupoa.com.br

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

SOBRE OS AUTORES

As pessoas se perguntam como Ferd Beer e Russ Johnston puderam escrever em conjunto seus livros, uma vez que um estava em Lehigh e outro na Connecticut University.

A resposta para esta pergunta é simples. A primeira nomeação como docente de Russ Johnston foi para o Departamento de Engenharia Civil e Mecânica na Lehigh University. Lá ele conheceu Ferd Beer, que já trabalhava no departamento há dois anos e era o coordenador dos cursos de mecânica.

Ferd ficou contente ao descobrir que o seu novo colega, contratado principalmente para ministrar cursos de pós-graduação de engenharia estrutural, não só se dispunha, mas também estava ansioso para ajudá-lo a reestruturar os cursos de mecânica. Ambos acreditavam que esses cursos deveriam ser ensinados a partir de alguns princípios básicos e que os conceitos envolvidos seriam melhor compreendidos e lembrados pelos alunos se fossem apresentados de maneira gráfica. Juntos, eles transcreveram anotações de aula em estática e dinâmica e, posteriormente, acrescentaram problemas motivadores para os futuros engenheiros. Logo produziram o original da primeira edição do *Mechanics for Engineers* publicado em junho de 1956.

Na segunda edição de *Mechanics for Engineers* e na primeira edição de *Vector Mechanics for Engineers*, Russ Johnston já estava no Worcester Polytechnic Institute e, nas edições seguintes, na Connecticut University. Enquanto isso, tanto Ferd como Russ, assumiram responsabilidades administrativas em seus departamentos e se envolveram em pesquisa, consultoria e supervisão de estudantes da pós-graduação: Ferd na área de processos estocásticos e vibrações aleatórias e Russ na área de estabilidade elástica e análise de projetos estruturais. No entanto, o interesse deles em aprimorar o ensino das disciplinas básicas de mecânica não diminuiu, e ambos ministraram partes destes cursos, como também continuaram revisando seus textos e começaram a escrever os originais da primeira edição do livro *Mechanics of Materials*.

Essa parceria durou mais de meio século e fruto dela foram as várias revisões bem-sucedidas de seus livros. As contribuições de Ferd e Russ para o ensino da engenharia lhes valeram uma série de homenagens e prêmios. Eles foram condecorados com o Western Electric Fund Award da American Society for Engineering Education, pela excelência no ensino de estudantes de engenharia em suas respectivas regionais. Ambos receberam também o Distinguished Educator Award, concedido pela Mechanics Division da mesma sociedade. Desde 2001, o prêmio New Mechanics Educator Award da Mechanics Division passou a ter este nome em homenagem aos autores Beer e Johnston.

Ferdinand P. Beer. Nascido na França e educado na França e na Suíça, é Mestre em Ciências pela Sorbonne e Doutor em Mecânica Teórica pela Universty of Genebra. Radicou-se nos Estados Unidos após servir ao exército francês no início da Segunda Grande Guerra e lecionar durante quatro anos no Williams College, no programa conjunto da Williams-MIT em artes e engenharia. Após trabalhar no Williams College, Ferd ingressou no corpo docente da Lehigh University, onde lecionou durante 37 anos. Ocupou vários cargos, incluindo o de Professor Emérito da Universidade e chefe do Departamento de Engenharia Mecânica. Em 1995, Ferd foi agraciado com o título honorário de Doutor em Engenharia pela Lehigh University.

E. Russell Johnston, Jr. Nascido na Filadélfia, Russ recebeu o título de Bacharel em Engenharia Civil da Delaware of University e o título de Doutor em Engenharia Estrutural do Massachusetts Institute of Tecnology. Lecionou na Lehigh University e no Worcester Polytechnic Institute antes de ingressar na University of Connecticut, onde ocupou o cargo de chefe do Departamento de Engenharia Civil e lecionou por 26 anos. Em 1991, Russ recebeu o prêmio Outstanding Civil Engineer Award pela Connecticut Section da American Society of Civil Engineers.

David F. Mazurek. David recebeu o título de Bacharel em Engenharia Oceânica, o de Mestre em Engenharia Civil do Florida Institute of Tecnology e o de Doutor em Engenharia Civil na University of Connecticut. Trabalhou na Electric Boat Division, da General Dynamics Corporation, e ministrou aulas no Lafayette College antes de entrar para a U. S. Coast Guard Academy em 1990. Ele participou por 18 anos do 15° comitê da Associação Americana de Engenharia e Manutenção Ferroviária – estruturas de aço. Seus interesses profissionais incluem engenharia de pontes, torres altas, falhas estruturais e projetos com resistência a impacto.

Elliot R. Eisenberg. Elliot recebeu o título de Bacharel e de Mestre em Engenharia da Cornell University. Concentrou suas atividades acadêmicas em serviços profissionais e no ensino e teve o reconhecimento pelo seu trabalho em 1992, quando a American Society of Mechanical Engineers concedeu-lhe a medalha Ben C. Sparks, por suas contribuições à engenharia mecânica e à tecnologia da educação em engenharia mecânica e pelos serviços prestados junto à American Society for Engineering Education. Elliot lecionou durante 32 anos, 29 deles na Penn State, onde foi condecorado com prêmios tanto em ensino como em orientação.

PREFÁCIO

Objetivos

O principal objetivo de um primeiro curso em mecânica deve ser desenvolver no estudante de engenharia a capacidade de analisar qualquer problema de um modo simples e lógico e aplicar a solução de alguns princípios básicos. Espera-se que este livro, voltado a um primeiro curso em estática, e o volume seguinte, *Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica*°, possam auxiliar o professor a alcançar esses objetivos.

Abordagem geral

A análise vetorial é apresentada no texto desde o início e usada na apresentação e discussão dos princípios fundamentais da mecânica. Os métodos vetoriais também são usados para resolver problemas, em particular os tridimensionais, nos quais essas técnicas levam a uma solução mais simples e concisa. Todavia, a ênfase deste livro está na compreensão correta dos princípios da mecânica, na sua aplicação à solução de problemas de engenharia e na apresentação da análise vetorial como uma ferramenta muito útil.°°

Aplicações práticas são imediatamente apresentadas. Uma das características da abordagem adotada nos dois volumes é que a mecânica de *partículas* é claramente separada da mecânica de *corpos rígidos*. Essa abordagem nos possibilita considerar aplicações práticas simples já em um estágio inicial e postergar a introdução de conceitos mais complexos. Por exemplo:

- No *Estática*, a estática de partículas é tratada em primeiro lugar (Cap. 2); após a apresentação das regras de adição e subtração de vetores, o princípio de equilíbrio de uma partícula é imediatamente aplicado a situações práticas que envolvam apenas forças concorrentes. A estática de corpos rígidos é considerada nos Caps. 3 e 4. No Cap. 3, os produtos escalar e vetorial de dois vetores são apresentados e usados para se definir o momento de uma força em relação a um ponto e a um eixo. A apresentação desses novos conceitos é seguida de uma discussão abrangente e rigorosa de sistemas equivalentes de forças, e nos leva, no Cap. 4, a várias aplicações práticas que envolvam o equilíbrio de corpos rígidos sob a ação de sistemas gerais de forças.
- No *Dinâmica*, observa-se a mesma divisão. Os conceitos básicos de força, massa e aceleração, trabalho e energia e de impulso e quantidade de movimento são aplicados primeiramente a problemas que envolvam apenas partículas. Assim, o estudante pode se familiarizar com os três métodos básicos usados em dinâmica e aprender suas respectivas vantagens antes de se defrontar com dificuldades associadas ao movimento de corpos rígidos.

° N. de E. Livro em produção no momento da impressão desta obra.

°° N. de E. Em um texto paralelo, em inglês, *Mechanics for Engineers: Statics*, 5ª edição, o uso de álgebra vetorial fica limitado à adição e subtração de vetores.

Novos conceitos são apresentados em termos simples. Considerando que este livro foi desenvolvido para um primeiro curso em estática, novos conceitos são apresentados em termos simples e cada passo é explicado em detalhe. Por outro lado, discutindo-se os aspectos mais amplos dos problemas e destacando-se os métodos de aplicabilidade geral, atinge-se pleno desenvolvimento da abordagem. Por exemplo, os conceitos de restrições parciais e indeterminação estática são logo apresentados e aplicados do começo ao fim.

Princípios fundamentais são apresentados no contexto de aplicações simples. É destacado o fato de a mecânica ser essencialmente uma ciência *dedutiva*, baseada em poucos princípios fundamentais. As deduções são apresentadas em sua sequência lógica e com todo o rigor permitido nesse nível. Entretanto, como o processo de aprendizagem é amplamente *indutivo*, aplicações simples são consideradas primeiro. Por exemplo:

- A estática de partículas precede a estática de corpos rígidos, e os problemas que envolvem forças internas são postergados até o Cap. 6.
- No Cap. 4, problemas de equilíbrio envolvendo apenas forças coplanares são trabalhados primeiro e resolvidos por álgebra ordinária, enquanto problemas que envolvem forças tridimensionais e que requerem o uso de álgebra vetorial completa são discutidos na segunda parte do capítulo.

Diagramas de corpo livre são usados tanto para resolver problemas de equilíbrio como para expressar a equivalência de sistemas de forças. Diagramas de corpo livre são logo apresentados e sua importância é enfatizada ao longo de todo o texto. Esses diagramas são usados não apenas para resolver problemas de equilíbrio, mas também para exprimir a equivalência de dois sistemas de forças ou, de modo mais geral, de dois sistemas de vetores. A vantagem dessa abordagem torna-se clara no estudo da dinâmica de corpos rígidos, no qual ela é usada para resolver problemas tanto tridimensionais como bidimensionais. Ao se dar ênfase às "equações do diagrama de corpo livre", e não ao padrão das equações do movimento algébricas, é possível atingir uma compreensão mais intuitiva e completa dos princípios fundamentais da dinâmica. Essa abordagem foi introduzida pela primeira vez em 1962, na primeira edição do livro *Vector Mechanics for Engineers*, e tem hoje ampla aceitação entre os professores de mecânica dos Estados Unidos. Logo, ela é aplicada preferencialmente ao método do equilíbrio dinâmico e às equações do movimento na solução de todos os problemas resolvidos deste livro.

Seções opcionais oferecem tópicos avançados ou especializados. Um grande número de seções opcionais foi incluído. Essas seções podem ser omitidas sem prejuízo do entendimento do restante do texto e são indicadas por asterisco, de modo que o leitor possa distingui-las facilmente daquelas que constituem o núcleo do curso básico de estática.

Entre os tópicos abordados nessas seções adicionais encontram-se a redução de um sistema de forças a um torsor, aplicações à hidrostática, diagramas de esforço cortante e momento fletor em vigas, equilíbrio de cabos, produtos de inércia e círculo de Mohr, determinação dos eixos principais e momentos de inércia de um corpo de formato arbitrário e o método dos trabalhos virtuais. As seções sobre vigas são especialmente úteis quando o curso de estática é seguido por um curso de mecânica dos materiais, enquanto as seções sobre propriedades de inércia de corpos tridimensionais são direcionadas principalmente aos estudantes que, mais tarde, realizarão estudos em dinâmica do movimento tridimensional de corpos rígidos.

O material apresentado no texto e a maioria dos problemas não requerem conhecimento matemático prévio além de álgebra, trigonometria e cálculo elementar; todos os elementos de álgebra vetorial necessários ao entendimento do texto são cuidadosamente apresentados nos Caps. 2 e 3. Em geral, é dada maior ênfase à compreensão correta dos conceitos matemáticos básicos envolvidos do que à manipulação expedita de fórmulas matemáticas. Nesse contexto, deve-se mencionar que a determinação dos centroides de áreas compostas precede o cálculo de centroides por integração, tornando possível, então, estabelecer firmemente o conceito de momento de uma área antes de se introduzir o uso de integração.

Organização dos capítulos e aspectos didáticos

Introdução do capítulo. Cada capítulo começa com uma seção introdutória em que se estabelecem o propósito e as metas do capítulo e se descrevem em termos simples o material a ser analisado e suas aplicações para a solução de problemas de engenharia. É apresentado um resumo ao estudante para uma prévia dos tópicos do capítulo.

Lições do capítulo. O corpo do texto é dividido em unidades, cada qual constituída de uma ou várias seções teóricas, um ou vários problemas resolvidos e um grande número de problemas propostos. Cada unidade corresponde a um tópico bem definido e geralmente pode ser abordada em uma aula. Em certos casos, porém, o professor poderá considerar adequado dedicar mais de uma aula a um ou outro tópico. O *Instructor's and solutions manual* é um bom material de apoio para cada lição.

Problemas resolvidos. Os problemas resolvidos são elaborados de forma parecida a que o estudante resolveria os problemas propostos. Logo, servem a um duplo propósito: desenvolver o texto e demonstrar o método de trabalho simples e ordenado que o estudante deve adotar em suas próprias soluções.

Metodologia para a resolução de problemas. Uma seção intitulada *Metodologia para a resolução de problemas* foi incluída em cada tópico, entre os problemas resolvidos e os problemas propostos. O obje-

tivo dessas seções é ajudar o estudante a organizar em sua mente a teoria do texto precedente e os métodos de resolução dos problemas resolvidos, de modo que possa ter êxito na solução dos exercícios propostos. Também estão incluídas nessas seções, sugestões específicas e estratégias que possibilitarão ao estudante resolver de forma eficaz qualquer problema proposto.

Conjuntos de exercícios propostos. A maioria dos exercícios é de natureza prática o que deve motivar os estudantes de engenharia. Todavia, esses exercícios foram feitos, sobretudo, para ilustrar o material apresentado no texto e auxiliar os estudantes na compreensão dos princípios de mecânica. Os exercícios estão agrupados de acordo com as seções do material que ilustram e estão ordenados em ordem crescente de dificuldade. Exercícios que requerem atenção especial estão indicados por asterisco. As respostas para a maioria dos problemas são apresentadas ao final do livro. Os exercícios com resposta estão numerados com fonte normal no texto, enquanto aqueles que não têm resposta estão numerados com fonte em itálico.

Revisão e resumo. Cada capítulo termina com uma revisão e um resumo do conteúdo. Notas são usadas para ajudar o estudante a organizar seu trabalho de revisão e referências cruzadas foram incluídas para auxiliá-los a encontrar trechos do material que requerem atenção especial.

Problemas de revisão. Um conjunto de problemas de revisão está incluído ao final de cada capítulo. Esses problemas fornecem ao estudante uma oportunidade adicional de aplicar os conceitos mais importantes apresentados no capítulo.

Problemas para resolver no computador. Cada capítulo inclui um conjunto de problemas concebidos para serem resolvidos com auxílio de programas computacionais. Muitos desses problemas são relevantes em procedimentos de projeto. Em estática, por exemplo, os problemas podem envolver a análise de uma estrutura para diversas configurações e carregamentos ou a determinação das posições de equilíbrio de um mecanismo que pode requerer um método interativo de resolução. O desenvolvimento do algoritmo necessário na solução de um dado problema de mecânica beneficiará o estudante de duas maneiras: (1) vai ajudá-lo a compreender melhor os princípios de mecânica envolvidos e (2) vai proporcionar-lhe uma oportunidade de aplicar suas habilidades computacionais à resolução de significativos problemas de engenharia.

Suplementos

Um extenso pacote de suplementos destinado aos professores está disponível no site www.grupoa.com.br, área do professor (sob proteção de senha). Lá constam soluções de exercícios (em inglês), lâminas de Power Point (em português), entre outros materiais listados a seguir.

Instructor's and solutions manual.* Em inglês, o professor tem a disposição o *Instructor's and solutions manual*, que apresenta a solução dos problemas propostos. Este manual também apresenta uma série de tabelas destinadas a auxiliar os professores na criação de um cronograma de atividades para os seus cursos. Os vários tópicos abordados no livro estão listados na Tabela I, em que também se sugere o tempo a ser gasto em cada um deles. A Tabela II fornece uma breve descrição de todos os grupos de problemas e sua classificação em cada grupo de acordo com as unidades usadas. Cronogramas de aulas são mostrados nas Tabelas III, IV e V.

Agradecimentos

Agradecemos especialmente a Amy Mazurek, do Williams Memorial Institute, que verificou cuidadosamente as soluções e respostas de todos os problemas nesta edição e preparou as soluções para o *Instructor's and solutions manual*; Yohannes Ketema da Minnesota University; David Oglesby da Missouri-Rolla University; e Daniel W. Yannitell da Louisiana State University.

Reconhecemos de bom grado o trabalho de Dennis Ormond da Fine Line Illustrations, pelas habilidosas ilustrações que tanto contribuíram para a eficácia do texto.

Os autores agradecem às várias empresas que forneceram fotografias para esta edição. Também gostaríamos de reconhecer os esforços e a paciência de nossa pesquisadora de fotos, Sabina Dowell.

Os autores também são gratos à equipe da McGraw-Hill pelo apoio e dedicação durante a preparação desta nova edição e especialmente pelas contribuições de Stenquist Bill, Lora Ncyens e Sheila Frank.

Finalmente, os autores agradecem os muitos comentários e sugestões oferecidas pelos usuários das edições anteriores deste livro.

E. Russell Johnston, Jr.
David F. Mazurek
Elliot R. Eisenberg

* N. de E. Os professores que adotam esta obra estão convidados a se cadastrar no site do Grupo A para conhecer os recursos de apoio disponíveis.

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Constante; raio; distância
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Reações em apoios e conexões
$A, B, C, \ldots$	Pontos
A	Área
b	Largura; distância
c	Constante
C	Centroide
d	Distância
e	Base dos logaritmos naturais
$\mathbf{F}$	Força; força de atrito
g	Aceleração da gravidade
G	Centro de gravidade; constante gravitacional
h	Altura; flecha de cabo
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Vetores unitários ao longo dos eixos coordenados
$I, I_x, \ldots$	Momentos de inércia
$\bar{I}$	Momento de inércia em relação ao centroide
$I_{xy}, \ldots$	Produtos de inércia
J	Momento de inércia polar
k	Constante de mola
k_x, k_y, k_O	Raios de giração
$\bar{k}$	Raio de giração em relação ao centroide
l	Comprimento
L	Comprimento; vão
m	Massa
$\mathbf{M}$	Binário; momento
$\mathbf{M}_O$	Momento em relação ao ponto O
$\mathbf{M}_O^R$	Momento resultante em relação ao ponto O
M	Magnitude do binário ou momento; massa da Terra
M_{OL}	Momento em relação ao eixo OL
$\mathbf{N}$	Componente normal da reação
O	Origem das coordenadas
p	Pressão
$\mathbf{P}$	Força; vetor
$\mathbf{Q}$	Força; vetor
$\mathbf{r}$	Vetor posição
r	Raio; distância; coordenada polar
$\mathbf{R}$	Força resultante; vetor resultante; reação
R	Raio da Terra
$\mathbf{s}$	Vetor posição
s	Comprimento de arco; comprimento de cabo
$\mathbf{S}$	Força; vetor
t	Espessura
$\mathbf{T}$	Força
T	Tração
U	Trabalho
$\mathbf{V}$	Produto vetorial; força cortante
V	Volume; energia potencial; esforço cortante
w	Carga por unidade de comprimento
$\mathbf{W}, W$	Peso; carga
x, y, z	Coordenadas retangulares; distâncias
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas retangulares do centroide ou do centro de gravidade x

α, β, γ	Ângulos
γ	Peso específico
δ	Alongamento
$\delta\mathbf{r}$	Deslocamento virtual
δU	Trabalho virtual
$\boldsymbol{\lambda}$	Vetor unitário ao longo de uma linha
η	Rendimento
θ	Coordenada angular; ângulo; coordenada polar
μ	Coeficiente de atrito
ρ	Massa específica
ϕ	Ângulo de atrito; ângulo

SUMÁRIO

1 Introdução 3

1.1 O que é mecânica? 4
1.2 Conceitos e princípios fundamentais 4
1.3 Sistemas de unidades 7
1.4 Conversão de um sistema de unidades para outro 12
1.5 Método de resolução de problemas 14
1.6 Precisão numérica 15

2 Estática de partículas 17

2.1 Introdução 18

Forças no plano 18

2.2 Força sobre uma partícula e resultante de duas forças 18
2.3 Vetores 19
2.4 Adição de vetores 20
2.5 Resultante de várias forças concorrentes 22
2.6 Decomposição dos componentes de uma força 23
2.7 Componentes retangulares de uma força e vetores unitários 29
2.8 Adição de forças pela soma dos componentes *x* e *y* 32
2.9 Equilíbrio de uma partícula 37
2.10 Primeira lei de Newton do movimento 38
2.11 Problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula e diagramas de corpo livre 38

Forças no espaço 47

2.12 Componentes retangulares de uma força no espaço 47
2.13 Força definida por sua intensidade e por dois pontos em sua linha de ação 50
2.14 Adição de forças concorrentes no espaço 51
2.15 Equilíbrio de uma partícula no espaço 59

Revisão e resumo 66
Problemas de revisão 69
Problemas para resolver no computador 72

3 Corpos rígidos: sistemas equivalentes de forças 75

3.1 Introdução 76
3.2 Forças externas e forças internas 76
3.3 Princípio da transmissibilidade e forças equivalentes 77
3.4 Produto vetorial de dois vetores 79
3.5 Produtos vetoriais expressos em termos de componentes retangulares 81
3.6 Momento de uma força em relação a um ponto 83
3.7 Teorema de Varignon 85
3.8 Componentes retangulares do momento de uma força 85
3.9 Produto escalar de dois vetores 96
3.10 Produto triplo misto de três vetores 98
3.11 Momento de uma força em relação a um dado eixo 99
3.12 Momento de um binário 110
3.13 Binários equivalentes 111
3.14 Adição de binários 113
3.15 Binários podem ser representados por vetores 113
3.16 Substituição de uma dada força por uma força em O e um binário 114
3.17 Redução de um sistema de forças a uma força e um binário 125
3.18 Sistemas equivalentes de forças 127
3.19 Sistemas equipolentes de vetores 127
3.20 Casos particulares de redução de um sistema de forças 128
3.21 Redução de um sistema de forças a um torsor 130

Revisão e resumo 148
Problemas de revisão 153
Problemas para resolver no computador 156

4 Equilíbrio de corpos rígidos 159

4.1 Introdução 160

4.2 Diagrama de corpo livre 161

Equilíbrio em duas dimensões 162

4.3 Reações em apoios e conexões para uma estrutura bidimensional 162

4.4 Equilíbrio de um corpo rígido em duas dimensões 164

4.5 Reações estaticamente indeterminadas e vinculações parciais 166

4.6 Equilíbrio de um corpo sujeito à ação de duas forças 183

4.7 Equilíbrio de um corpo sujeito à ação de três forças 184

Equilíbrio em três dimensões 191

4.8 Equilíbrio de um corpo rígido em três dimensões 191

4.9 Reações em apoios e conexões para um estrutura tridimensional 191

Revisão e resumo 212
Problemas de revisão 215
Problemas para resolver no computador 218

5 Forças distribuídas: centroides e centros de gravidade 221

5.1 Introdução 222

Áreas e linhas 222

5.2 Centro de gravidade de um corpo bidimensional 222

5.3 Centroides de áreas e linhas 224

5.4 Momentos de primeira ordem em áreas e linhas 225

5.5 Placas e fios compostos 228

5.6 Determinação de centroides por integração 238
5.7 Teorema de Pappus-Guldinus 240
5.8 Cargas distribuídas sobre vigas 250
5.9 Forças em superfícies submersas 251

Sólidos 260

5.10 Centro de gravidade de um corpo tridimensional e centroide de um sólido 260
5.11 Corpos compostos 263
5.12 Determinação de centroides de sólidos por integração 263

Revisão e resumo 276
Problemas de revisão 280
Problemas para resolver no computador 283

6 Análise de estruturas 287

6.1 Introdução 288

Treliças 289

6.2 Definição de uma treliça 289
6.3 Treliças simples 291
6.4 Análise de treliças pelo método dos nós 292
6.5 Nós sujeitos a condições especiais de carregamento 294
6.6 Treliças espaciais 296
6.7 Análise de treliças pelo método das seções 306
6.8 Treliças feitas de várias treliças simples 307

Estruturas e máquinas 318

6.9 Estruturas que contêm elementos sujeitos à ação de múltiplas forças 318
6.10 Análise de uma estrutura 318
6.11 Estruturas que deixam de ser rígidas quando separadas de seus apoios 319
6.12 Máquinas 333

Revisão e resumo 347
Problemas de revisão 350
Problemas para resolver no computador 352

7 Forças em vigas e cabos 355

7.1 Introdução 356
7.2 Forças internas em elementos 356

Vigas 364

7.3 Diversos tipos de carregamento e apoio 364
7.4 Esforço cortante e momento fletor em uma viga 365
7.5 Diagramas de esforço cortante e de momento fletor 367
7.6 Relações entre carregamento, esforço cortante e momento fletor 375

Cabos 385

7.7 Cabos com cargas concentradas 385
7.8 Cabos com cargas distribuídas 386
7.9 Cabo parabólico 387
7.10 Catenária 397

Revisão e resumo 405
Problemas de revisão 408
Problemas para resolver no computador 410

8 Atrito 413

8.1 Introdução 414
8.2 As leis de atrito seco e coeficientes de atrito 414
8.3 Ângulos de atrito 417
8.4 Problemas que envolvem atrito seco 418
8.5 Cunhas 431
8.6 Parafusos de rosca quadrada 432
8.7 Mancais de deslizamento e atrito em eixo 441
8.8 Mancais de escora e atrito em disco 443
8.9 Atrito em roda e resistência ao rolamento 444
8.10 Atrito em correia 451

Revisão e resumo 462
Problemas de revisão 465
Problemas para resolver no computador 469

9 Forças distribuídas: momento de inércia 473

9.1 Introdução 474

Momento de inércia de superfícies 475

9.2 Momento de segunda ordem, ou momento de inércia, de uma superfície 475

9.3 Determinação do momento de inércia de uma superfície por integração 476

9.4 Momento de inércia polar 477

9.5 Raio de giração de uma superfície 478

9.6 Teorema dos eixos paralelos 485

9.7 Momentos de inércia de superfícies compostas 486

9.8 Produto de inércia 498

9.9 Eixos principais e momentos de inércia principais 499

9.10 Círculo de Mohr para momentos e produtos de inércia 507

Momentos de inércia de corpos 513

9.11 Momento de inércia de um corpo 513

9.12 Teorema dos eixos paralelos 514

9.13 Momentos de inércia de placas delgadas 515

9.14 Determinação do momento de inércia de um corpo tridimensional por integração 517

9.15 Momentos de inércia de corpos compostos 517

9.16 Momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário que passa por O e produtos de inércia de corpos 533

9.17 Elipsoide de inércia e eixos principais de inércia 534

9.18 Determinação dos eixos principais e dos momentos principais de inércia de um corpo de formato arbitrário 536

Revisão e resumo 548
Problemas de revisão 554
Problemas para resolver no computador 556

10 Método do trabalho virtual 559

10.1 Introdução 560
10.2 Trabalho de uma força 560
10.3 Princípio do trabalho virtual 563
10.4 Aplicações do princípio do trabalho virtual 564
10.5 Máquinas reais e eficiência mecânica 566
10.6 Trabalho de uma força durante um deslocamento finito 580
10.7 Energia potencial 582
10.8 Energia potencial e equilíbrio 583
10.9 Estabilidade do equilíbrio 584

Revisão e resumo 594
Problemas de revisão 597
Problemas para resolver no computador 600

Apêndice Exame de fundamentos de engenharia 603

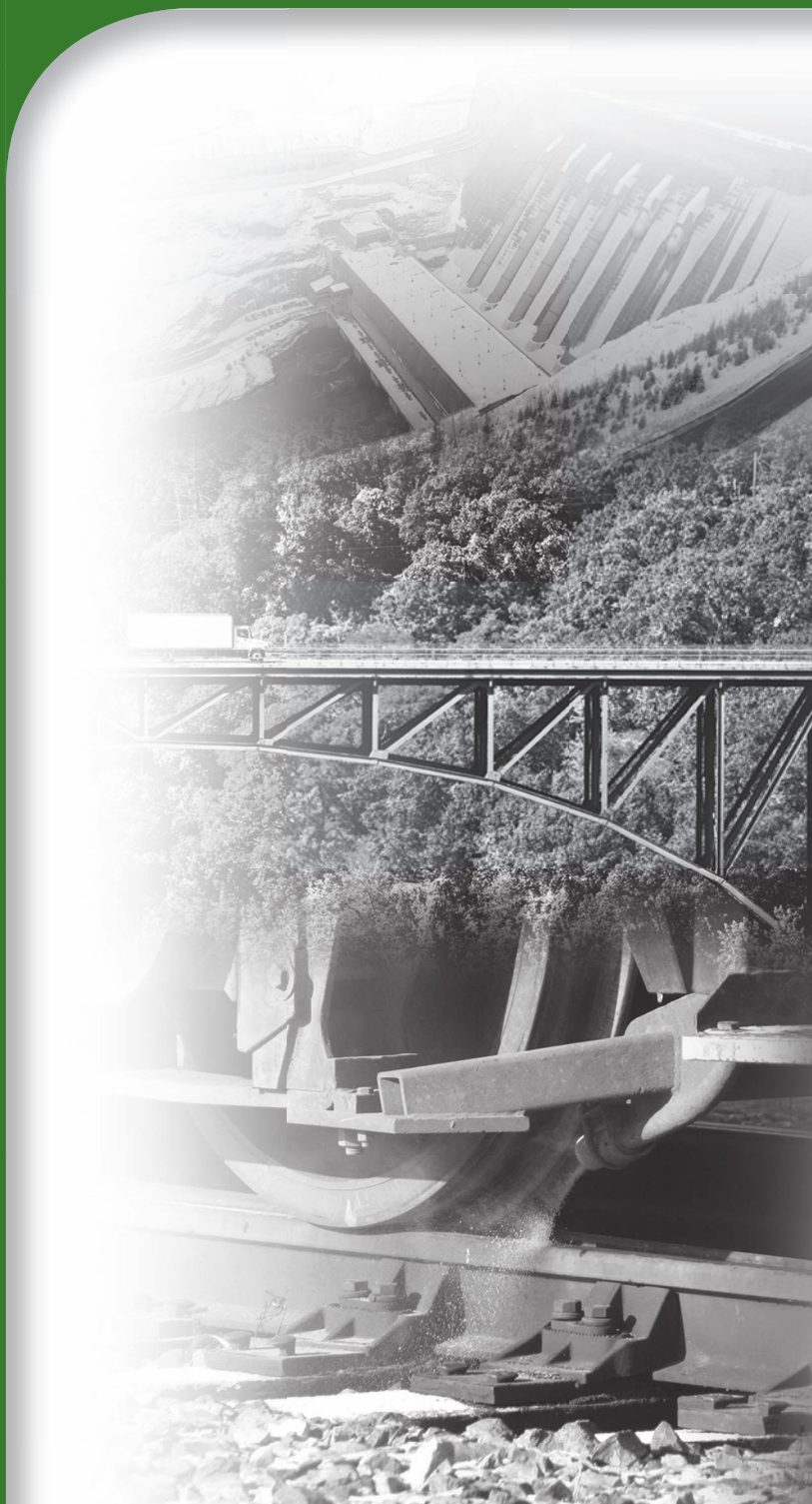
Créditos das fotos 605

Respostas 607

Índice 617

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

No fim do século XVII, *Sir* Isaac Newton estabeleceu os princípios fundamentais da mecânica, que constituem a base de grande parte da engenharia atual.



CAPÍTULO 1

Introdução

1 Introdução

1.1 O que é mecânica?
1.2 Conceitos e princípios fundamentais
1.3 Sistemas de unidades
1.4 Conversão de um sistema de unidades para outro
1.5 Método de resolução de problemas
1.6 Precisão numérica

1.1 O que é mecânica?

A mecânica pode ser definida como a ciência que descreve e prevê as condições de repouso ou movimento dos corpos sob a ação de forças. Ela divide-se em três partes: mecânica dos *corpos rígidos,* mecânica dos *corpos deformáveis e mecânica dos fluidos.*

A mecânica dos corpos rígidos é subdividida em *estática* e *dinâmica:* a primeira trata dos corpos em repouso; a última, dos corpos em movimento. Nesta parte do estudo da mecânica, os corpos são considerados perfeitamente rígidos. No entanto, as estruturas e máquinas reais nunca são absolutamente rígidas mas se deformam sob a ação das cargas a que estão sujeitas. Essas deformações, contudo, geralmente são pequenas e não afetam de modo sensível as condições de equilíbrio ou movimento da estrutura a ser estudada. São importantes, por outro lado, na medida em que a resistência da estrutura a falhas seja levada em consideração sendo por isso estudadas na mecânica dos materiais, a parte da mecânica que trata dos corpos deformáveis. A terceira divisão da mecânica, a mecânica dos fluidos, é subdividida no estudo de *fluidos incompressíveis* e *de fluidos compressíveis.* Uma importante subdivisão do estudo dos fluidos incompressíveis é a *hidráulica,* que trata dos problemas que envolvem a água.

A mecânica é uma ciência física, pois trata do estudo de fenômenos físicos. Todavia, alguns associam a mecânica à matemática, enquanto muitos a consideram um assunto de engenharia. Em parte, ambos os pontos de vista são justificáveis. A mecânica constitui a base de muitas ciências da engenharia, sendo um pré-requisito indispensável para seu estudo. Contudo, não apresenta o *empirismo* encontrado em algumas ciências da engenharia, ou seja, não se baseia apenas na experiência e na observação; pelo seu rigor e pela ênfase que coloca no raciocínio dedutivo, a mecânica se assemelha à matemática. Mas, apesar disso, não é uma ciência *abstrata* nem tampouco *pura;* a mecânica é uma ciência *aplicada.* O propósito da mecânica é explicar e prever fenômenos físicos e, desse modo, estabelecer os fundamentos para aplicações de engenharia.

1.2 Conceitos e princípios fundamentais

Embora o estudo da mecânica remonte aos tempos de Aristóteles (384-322 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C), foi preciso esperar até Newton (1642-1727) para que houvesse uma formulação satisfatória de seus princípios fundamentais. Esses princípios foram posteriormente expressos de maneira diferente por d'Alembert, Lagrange e Hamilton. No entanto, sua validade permaneceu incontestada, até Einstein formular sua *teoria da relatividade* (1905). Apesar de suas limitações serem hoje reconhecidas, a *mecânica newtoniana* ainda continua sendo a base das ciências da engenharia atuais.

Os conceitos básicos usados em mecânica são os de *espaço, tempo, massa* e *força*. Esses conceitos não podem ser verdadeiramente definidos; devem ser aceitos com base em nossa intuição e experiência e usados como um conjunto de referências mentais para o nosso estudo de mecânica.

O conceito de espaço está associado à noção de posição de um ponto *P*. A posição de *P* pode ser definida por três comprimentos medidos a partir de um determinado ponto de referência, ou *origem*, segundo três direções dadas. Esses comprimentos são conhecidos como *coordenadas* de *P*.

Para se definir um evento, não é suficiente indicar a sua posição no espaço. O *tempo* do evento também deve ser fornecido.

O conceito de *massa* é usado para caracterização e comparação de corpos com base em certos experimentos mecânicos fundamentais. Dois corpos de mesma massa, por exemplo, serão atraídos pela Terra de modo idêntico e irão oferecer a mesma resistência a uma variação de movimento de translação.

Uma *força* representa a ação de um corpo sobre outro. A força pode ser exercida por contato direto ou à distância, como no caso das forças gravitacionais e magnéticas. Uma força é caracterizada pelo seu *ponto de aplicação*, sua *intensidade* e sua *direção*; uma força é representada por um *vetor* (Seção 2.3).

Na mecânica newtoniana, espaço, tempo e massa são conceitos absolutos, independentes entre si. (Isto não vale para *mecânica relativística*, na qual o tempo de um evento depende da sua posição e a massa de um corpo varia com sua velocidade.) Por outro lado, o conceito de força não é independente dos outros três. De fato, um dos princípios fundamentais da mecânica newtoniana listados adiante estabelece que a força resultante que atua sobre um corpo está relacionada à massa do corpo e ao modo pelo qual sua velocidade varia com o tempo.

Estudaremos as condições de repouso ou movimento de partículas e de corpos rígidos em termos dos quatro conceitos básicos que acabamos de apresentar. Por *partícula* entendemos uma quantidade de matéria muito pequena e que, por hipótese, ocupa um único ponto no espaço. Um *corpo rígido* é uma combinação de um grande número de partículas que ocupam posições fixas umas em relação às outras. O estudo da mecânica de partículas é obviamente um pré-requisito para o estudo dos corpos rígidos. Além disso, os resultados obtidos para uma partícula podem ser usados diretamente em um grande número de problemas que tratam das condições de repouso ou movimento de corpos reais.

O estudo da mecânica elementar se baseia em seis princípios fundamentais, baseados em evidências experimentais.

A lei do paralelogramo para a adição de forças. Essa lei estabelece que duas forças que atuam sobre uma partícula podem ser substituídas por uma única força, denominada *resultante*, que se obtém traçando-se a diagonal do paralelogramo cujos lados são iguais às forças dadas (Seção 2.2).

O princípio da transmissibilidade. Esse princípio estabelece que as condições de equilíbrio ou movimento de um corpo rígido permanecerão inalteradas se uma força que atue em um dado ponto do corpo rígido for substituída por uma força de igual magnitude e de igual direção, porém atuando em um ponto diferente, desde que as duas forças tenham a mesma linha de ação (Seção 3.3).

As três leis fundamentais de Newton. Formuladas por Sir Isaac Newton no final do século XVII, essas leis podem ser enunciadas da seguinte maneira:

PRIMEIRA LEI. Se a força resultante que atua em uma partícula for nula, a partícula permanecerá em repouso (se originalmente em repouso) ou se moverá em velocidade constante em linha reta (se originalmente em movimento) (Seção 2.10).

SEGUNDA LEI. Se a força resultante que atua sobre uma partícula não for nula, a partícula terá uma aceleração de magnitude proporcional à magnitude da resultante e na mesma direção dessa força resultante.

Conforme você verá na Seção 12.2, essa lei pode ser estabelecida como:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

onde **F**, m e **a** representam, respectivamente, a força resultante que atua sobre a partícula, a massa da partícula e a aceleração da partícula, expressas em um sistema de unidades consistente.

TERCEIRA LEI. As forças de ação e reação entre corpos em contato têm a mesma intensidade, a mesma linha de ação e sentidos opostos (Seção 6.1).

Lei de Newton da gravitação. Essa lei estabelece que duas partículas de massa M e m são mutuamente atraídas com forças iguais e opostas **F** e $-\mathbf{F}$ (Fig. 1.1) de magnitude F dada pela expressão

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{1.2}$$

onde r = distância entre as duas partículas
G = constante universal denominada constante gravitacional

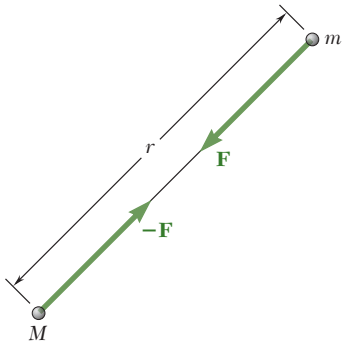


Figura 1.1

A lei de Newton da gravitação introduz a ideia de uma ação exercida a distância e amplia a faixa de aplicação da terceira lei de Newton: a ação **F** e a reação $-\mathbf{F}$ na Fig. 1.1 são iguais e opostas, e têm a mesma linha de ação.

Um caso particular de grande importância é a atração exercida pela Terra sobre uma partícula localizada na sua superfície. A força **F** exercida pela Terra sobre a partícula é então definida como o *peso* **W** (do inglês, *weight*) da partícula. Considerando-se M igual à massa da Terra, m igual à massa da partícula e r igual ao raio R da Terra, e introduzindo-se a constante

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{1.3}$$

a magnitude do peso W de uma partícula de massa m pode ser expressa como*

$$W = mg \tag{1.4}$$

O valor de R na Eq. (1.3) depende da altitude do ponto considerado; depende também da sua latitude, pois a Terra não é perfeitamente esférica. Portanto, o valor de g varia com a posição do ponto considerado. Desde que o ponto realmente permaneça sobre a superfície da Terra, basta, na maior parte dos cálculos de engenharia, admitir que g seja igual a 9,81 m/s^2.

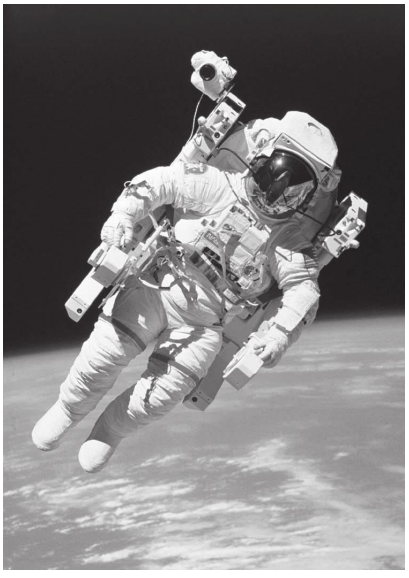


Foto 1.1 Quando em órbita da Terra, diz-se que as pessoas e os objetos ficam *sem peso*, muito embora a força gravitacional atuante seja aproximadamente 90% daquela experimentada sobre a superfície da Terra. Essa aparente contradição será resolvida no Cap. 12, quando aplicarmos a segunda lei de Newton ao movimento de partículas.

* Uma definição mais precisa do peso **W** deveria levar em conta a rotação da Terra.

Os princípios que acabamos de listar serão apresentados ao longo de nosso estudo de mecânica quando necessário. O estudo da estática de partículas realizado no Cap. 2 será baseado somente na lei do paralelogramo para a adição de forças e na primeira lei de Newton. O princípio de transmissibilidade será apresentado no Cap. 3, quando iniciarmos o estudo da estática de corpos rígidos, e a terceira lei de Newton será apresentada no Cap. 6, quando formos analisar as forças exercidas entre si pelos vários elementos que formam uma estrutura. A segunda lei de Newton e a lei de Newton da gravitação serão apresentadas no estudo da dinâmica. Veremos, então, que a primeira lei de Newton é um caso particular da segunda lei de Newton (Seção 12.2) e que o princípio de transmissibilidade poderia ser deduzido a partir dos outros princípios, podendo assim ser eliminado (Seção 16.5). Todavia, a primeira e a terceira leis de Newton, a lei do paralelogramo para a adição de forças e o princípio de transmissibilidade irão, por enquanto, nos prover dos fundamentos necessários e suficientes para o estudo completo da estática de partículas, de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos.

Conforme observamos anteriormente, os seis princípios fundamentais já listados são baseados em evidência experimental. Com exceção da primeira lei de Newton e do princípio de transmissibilidade, são princípios independentes que não podem ser deduzidos matematicamente a partir dos demais ou a partir de qualquer outro princípio físico elementar. Sobre esses princípios está baseada a maior parte da intricada estrutura da mecânica newtoniana. Por mais de dois séculos, um número espantoso de problemas, tratando das condições de repouso e movimento de corpos rígidos, de corpos deformáveis e de fluidos, foi resolvido pela aplicação desses princípios fundamentais. Muitas das soluções obtidas puderam ser verificadas experimentalmente, fornecendo assim uma verificação adicional dos princípios a partir dos quais foram obtidas. Apenas no final do século XIX e início do XX é que a mecânica de Newton foi colocada em cheque, no estudo do movimento dos átomos e no estudo do movimento de certos planetas, situações em que ela teve de ser suplementada pela teoria da relatividade. Mas, em uma escala humana ou da engenharia, na qual as velocidades são pequenas comparadas com a velocidade da luz, a mecânica de Newton ainda não foi refutada.

1.3 Sistemas de unidades

Associadas aos quatro conceitos fundamentais apresentados na seção anterior, estão as chamadas *unidades cinéticas*, isto é, as unidades de *comprimento, tempo, massa e força*. Essas unidades não podem ser escolhidas sem critério se quisermos satisfazer as condições da Eq. (1.1). Três dessas unidades podem ser definidas arbitrariamente; elas são denominadas *unidades básicas*. A quarta unidade, porém, deve ser escolhida de acordo com a Eq. (1.1) e denomina-se *unidade derivada*. Diz-se então que as unidades cinéticas assim selecionadas formam um *sistema de unidades consistente*.

Sistema Internacional de Unidades (Unidades do SI). Nesse sistema, que será de uso universal quando os Estados Unidos completarem sua conversão às unidades do SI, as unidades básicas são as de comprimento, massa e tempo, denominadas, respectivamente, *metro* (m), *quilograma* (kg) e *segundo* (s). As três são definidas arbitrariamente.

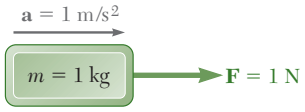


Figura 1.2

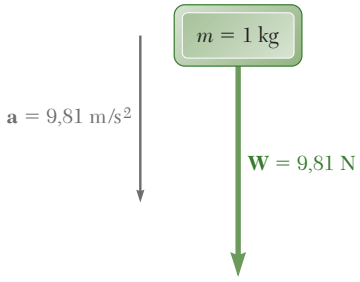


Figura 1.3

O segundo, originalmente escolhido para representar 1/86.400 do dia solar médio, é agora definido como a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre dois níveis do estado fundamental do átomo de césio-133. O metro, originalmente definido como um décimo de milionésimo da distância do equador a cada polo, é agora definido como 1.650.763,73 comprimentos de onda da luz laranja-vermelha, que correspondem a uma certa transição em um átomo de criptônio-86. O quilograma, que é aproximadamente igual à massa de 0,001 m^3 de água, é definido como a massa de um padrão de platina-irídio mantido no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, próximo a Paris, França. A unidade de força é uma unidade derivada. Denomina-se *newton* (N) e é definida como sendo a força que imprime uma aceleração de 1 m/s^2 a uma massa de 1 kg (Fig. 1.2). A partir da Eq. (1.1), escrevemos:

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \tag{1.5}$$

Diz-se que as unidades do SI formam um sistema *absoluto* de unidades. Isso significa que as três unidades básicas escolhidas são independentes do local em que as medições são feitas. O metro, o quilograma e o segundo podem ser usados em qualquer lugar da Terra; podem ser usados, inclusive, em outro planeta, e sempre terão o mesmo significado.

O *peso* de um corpo, ou a *força da gravidade* exercida sobre esse corpo, deve ser expresso em newtons, como qualquer outra força. Da Eq. (1.4), segue-se que o peso de um corpo de 1 kg de massa (Fig. 1.3) é:

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (1\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2) \\ &= 9{,}81\ \text{N} \end{aligned}$$

Múltiplos e submúltiplos das unidades fundamentais do SI podem ser obtidos pelo uso dos prefixos definidos na Tabela 1.1. Os múltiplos e submúltiplos das unidades de comprimento, massa e força usados mais frequentemente em engenharia são, respectivamente, o *quilômetro* (km) e o *milímetro* (mm); o *megagrama** (Mg) e o *grama* (g); e o *quilonewton* (kN). De acordo com a Tabela 1.1, temos:

$$\begin{aligned} 1\ \text{km} &= 1.000\ \text{m} \qquad 1\ \text{mm} = 0{,}001\ \text{m} \\ 1\ \text{Mg} &= 1.000\ \text{kg} \qquad 1\ \text{g} = 0{,}001\ \text{kg} \\ 1\ \text{kN} &= 1.000\ \text{N} \end{aligned}$$

A conversão dessas unidades em metros, quilogramas e newtons, respectivamente, pode ser efetuada pelo simples movimento da vírgula decimal três casas para a direita ou para a esquerda. Por exemplo, para converter 3,82 km em metros, move-se a vírgula decimal três casas para a direita:

$$3{,}82\ \text{km} = 3.820\ \text{m}$$

Analogamente, 47,2 mm são convertidos em metros movendo-se a vírgula decimal três casas para a esquerda:

$$47{,}2\ \text{mm} = 0{,}0472\ \text{m}$$

* Também conhecido como *tonelada métrica*.

Tabela 1.1 Prefixos SI

Fator de multiplicação	Prefixo	Símbolo
$1.000.000.000.000 = 10^{12}$	tera	T
$1.000.000.000 = 10^{9}$	giga	G
$1.000.000 = 10^{6}$	mega	M
$1.000 = 10^{3}$	quilo	k
$100 = 10^{2}$	hecto*	h
$10 = 10^{1}$	deca*	da
$0,1 = 10^{-1}$	deci*	d
$0,01 = 10^{-2}$	centi*	c
$0,001 = 10^{-3}$	mili	m
$0,000\,001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0,000\,000\,001 = 10^{-9}$	nano	n
$0,000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	pico	p
$0,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$	femto	f
$0,000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$	atto	a

*O uso desses prefixos deve ser evitado, exceto para a medição de áreas e volumes e para o uso não técnico do centímetro, como no caso das medidas do corpo e de roupas.

Usando notação científica, pode-se escrever também:

$$3{,}82\ \text{km} = 3{,}82 \times 10^{3}\ \text{m}$$
$$47{,}2\ \text{mm} = 47{,}2 \times 10^{-3}\ \text{m},$$

Os múltiplos da unidade de tempo são o *minuto* (min) e a *hora* (h). Uma vez que 1 min = 60 s e 1 h = 60 min = 3.600 s, esses múltiplos não podem ser convertidos tão prontamente como os outros.

Usando-se o múltiplo ou submúltiplo apropriado de uma dada unidade, é possível evitar a escrita de números muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, geralmente se escreve 427,2 km em vez de 427.200 m, e 2,16 mm em vez de 0,002 16 m.

Unidades de área e volume. A unidade de área é o *metro quadrado* (m^2), que representa a área de um quadrado de 1 m de lado; a unidade de volume é o *metro cúbico* (m^3), igual ao volume de um cubo de 1 m de lado. Para evitar valores numéricos excessivamente pequenos ou grandes no cálculo de áreas e volumes, utilizam-se sistemas de subunidades, obtidos, respectivamente, pela elevação ao quadrado e ao cubo não só do milímetro mas também de dois submúltiplos intermediários do metro, a saber, o *decímetro* (dm) e o *centímetro* (cm). Uma vez que, por definição,

$$1\ \text{dm} = 0{,}1\ \text{m} = 10^{-1}\ \text{m}$$
$$1\ \text{cm} = 0{,}01\ \text{m} = 10^{-2}\ \text{m}$$
$$1\ \text{mm} = 0{,}001\ \text{m} = 10^{-3}\ \text{m}$$

os submúltiplos da unidade de área são

$$1\ \text{dm}^2 = (1\ \text{dm})^2 = (10^{-1}\ \text{m})^2 = 10^{-2}\ \text{m}^2$$
$$1\ \text{cm}^2 = (1\ \text{cm})^2 = (10^{-2}\ \text{m})^2 = 10^{-4}\ \text{m}^2$$
$$1\ \text{mm}^2 = (1\ \text{mm})^2 = (10^{-3}\ \text{m})^2 = 10^{-6}\ \text{m}^2$$

e os submúltiplos da unidade de volume são

$$1\ \text{dm}^3 = (1\ \text{dm})^3 = (10^{-1}\ \text{m})^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$$
$$1\ \text{cm}^3 = (1\ \text{cm})^3 = (10^{-2}\ \text{m})^3 = 10^{-6}\ \text{m}^3$$
$$1\ \text{mm}^3 = (1\ \text{mm})^3 = (10^{-3}\ \text{m})^3 = 10^{-9}\ \text{m}^3$$

Deve-se notar que, ao medir-se o volume de um líquido, em geral se refere ao decímetro cúbico (dm^3) como *litro* (L).

Outras unidades derivadas do SI usadas para se medir o momento de uma força, o trabalho de uma força, etc. estão mostradas na Tabela 1.2. Embora essas unidades venham a ser apresentadas em capítulos subsequentes, quando necessário, devemos observar desde já uma regra importante: quando uma unidade derivada for obtida pela divisão de uma unidade básica por outra unidade básica, poderá ser usado um prefixo no numerador da unidade derivada, mas não no denominador. Por exemplo, a constante k de uma mola que se estende 20 mm sob uma carga de 100 N será expressa como:

$$k = \frac{100\ \text{N}}{20\ \text{mm}} = \frac{100\ \text{N}}{0{,}020\ \text{m}} = 5.000\ \text{N/m} \qquad \text{ou} \qquad k = 5\ \text{kN/m}$$

porém, jamais como $k = 5\ \text{N/mm}$.

Unidades Usuais nos EUA. A maioria dos engenheiros americanos usa um sistema em que as unidades básicas são as de comprimento, força e tempo. Essas unidades são, respectivamente, o *pé* (ft, do inglês

Tabela 1.2 Principais unidades do SI usadas em mecânica

Grandeza	Unidade	Símbolo	Fórmula
Aceleração	Metro por segundo ao quadrado	. . .	m/s^2
Ângulo	Radiano	rad	*
Aceleração angular	Radiano por segundo ao quadrado	. . .	rad/s^2
Velocidade angular	Radiano por segundo	. . .	rad/s
Área	Metro quadrado	. . .	m^2
Massa específica	Quilograma por metro cúbico	. . .	kg/m^3
Energia	Joule	J	N · m
Força	Newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
Frequência	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	. . .	kg · m/s
Comprimento	Metro	m	**
Massa	Quilograma	kg	**
Momento de uma força	Newton-metro	. . .	N · m
Potência	Watt	W	J/s
Pressão	Pascal	Pa	N/m^2
Tensão	Pascal	Pa	N/m^2
Tempo	Segundo	s	**
Velocidade	Metro por segundo	. . .	m/s
Volume			
Sólidos	Metro cúbico	. . .	m^3
Líquidos	Litro	L	$10^{-3}\ \text{m}^3$
Trabalho	Joule	J	N · m

* Unidade suplementar (1 revolução = 2π rad = 360°).
** Unidade básica.

foot), a *libra* (lb) e o *segundo* (s). O segundo corresponde à unidade do SI. O pé é definido como 0,3048 m. A libra é definida como o *peso* de um padrão de platina, denominado *libra padrão*, que é mantido no Instituto Nacional de Padrões e Tecnologia dos Estados Unidos, nos arredores de Washington, cuja massa equivale a 0,45359243 kg. Uma vez que o peso de um corpo depende da atração gravitacional da Terra, que varia com o local, especifica-se que a libra padrão seja colocada ao nível do mar, a uma latitude de 45°, para se definir apropriadamente uma força de 1 lb. Obviamente, as unidades usuais nos Estados Unidos não formam um sistema absoluto de unidades. Em virtude da sua dependência da atração gravitacional da Terra, formam um sistema de unidades *gravitacional*.

Ainda que a libra padrão também sirva como unidade de massa em transações comerciais nos Estados Unidos, não pode ser usada desse modo em cálculos de engenharia, pois tal unidade não seria consistente com as unidades básicas definidas no parágrafo precedente. De fato, quando submetida a uma força de 1 lb, isto é, quando sujeita à força da gravidade, a libra padrão recebe a aceleração da gravidade, $g = 32{,}2\ \text{ft/s}^2$ (Fig. 1.4), e não a aceleração unitária requerida pela Eq. (1.1). A unidade de massa consistente com o pé, a libra e o segundo é a massa que recebe uma aceleração de $1\ \text{ft/s}^2$ quando submetida a uma força de 1 lb (Fig. 1.5). Essa unidade, às vezes chamada de *slug*, pode ser deduzida da equação $F = ma$, após substituição de 1 lb e $1\ \text{ft/s}^2$ para F e a, respectivamente. Escrevemos

$$F = ma \qquad 1\ \text{lb} = (1\ \text{slug})\,(1\ \text{ft/s}^2)$$

para obter

$$1\ \text{slug} = \frac{1\ \text{lb}}{1\ \text{ft/s}^2} = 1\ \text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} \tag{1.6}$$

Comparando as Figs. 1.4 e 1.5, concluímos que o slug é uma massa 32,2 vezes maior que a massa da libra padrão.

O fato dos corpos, no sistema de unidades usuais nos Estados Unidos, serem caracterizados pelo seu peso em libras, em vez de sua massa em slugs, será conveniente no estudo de estática, no qual lidamos constantemente com pesos e outras forças e apenas raramente com massas. Porém, no estudo de dinâmica, que envolve forças, massas e acelerações, a massa m de um corpo será expressa em slugs quando seu peso W for dado em libras. Relembrando a Eq. (1.4), escrevemos

$$m = \frac{W}{g} \tag{1.7}$$

onde g é a aceleração da gravidade ($g = 32{,}2\ \text{ft/s}^2$).

Outras unidades usuais nos Estados Unidos, frequentemente encontradas em problemas de engenharia, são a *milha* (mi), igual a 5.280 ft; a *polegada* (in, do inglês *inch*), igual a 1/12 ft; e a *quilolibra* (kip, do inglês *kilo-pound*), igual à força de 1.000 lb. A unidade *ton* é frequentemente usada para representar a massa de 2.000 lb mas, assim como a libra, deve ser convertida em slugs nos cálculos de engenharia.

A conversão em pés, libras e segundos de grandezas expressas nessas outras unidades geralmente é mais complicada e requer maior atenção que as operações correspondentes nas unidades do SI. Por exemplo, se

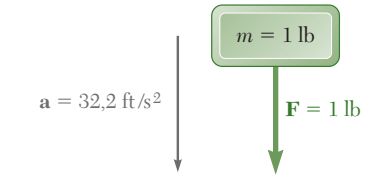


Figura 1.4

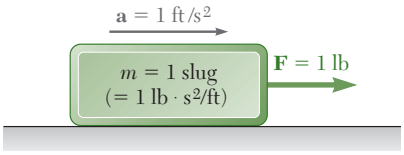


Figura 1.5

a intensidade de uma velocidade é dada como $v = 30$ mi/h, a conversão para ft/s é feita da seguinte maneira. Primeiro, escrevemos:

$$v = 30 \frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

Uma vez que desejamos nos livrar da unidade milhas e passar para a unidade pés, devemos multiplicar o segundo membro da equação por uma expressão que contenha milhas no denominador e pés no numerador. Mas, como não queremos alterar o valor do segundo membro, a expressão usada deve ter um valor igual à unidade. O quociente (5.280 ft)/(1 mi) é a expressão desejada. De modo semelhante, para transformar a unidade de hora em segundos, escrevemos:

$$v = \left(30 \frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(\frac{5.280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}}\right)$$

Efetuando os cálculos numéricos e cancelando as unidades que aparecem tanto no numerador como no denominador, obtemos:

$$v = 44 \frac{\text{ft}}{\text{s}} = 44 \text{ ft/s}$$

1.4 Conversão de um sistema de unidades para outro

Em diversas ocasiões, um engenheiro deseja converter um resultado numérico obtido em unidades usuais nos Estados Unidos em unidades do SI ou vice-versa. Como a unidade de tempo é a mesma em ambos os sistemas, apenas duas unidades cinéticas básicas precisam ser convertidas. Logo, como todas as outras unidades cinéticas podem ser derivadas das unidades básicas, é preciso lembrar apenas dois fatores de conversão.

Unidades de comprimento. Por definição, a unidade de comprimento usual nos Estados Unidos é:

$$1 \text{ ft} = 0{,}3048 \text{ m} \tag{1.8}$$

Segue-se que

$$1 \text{ mi} = 5.280 \text{ ft} = 5.280(0{,}3048 \text{ m}) = 1.609 \text{ m}$$

ou

$$1 \text{ mi} = 1.609 \text{ km} \tag{1.9}$$

Além disso,

$$1 \text{ in} = \tfrac{1}{12} \text{ ft} = \tfrac{1}{12}(0{,}3048 \text{ m}) = 0{,}0254 \text{ m}$$

ou

$$1 \text{ in} = 25{,}4 \text{ mm} \tag{1.10}$$

Unidades de força. Lembrando que a unidade de força usual nos Estados Unidos (a libra) é definida como sendo o peso da libra padrão

(de massa 0,4536 kg) no nível do mar e a uma latitude de 45° (onde $g = 9{,}807\ \text{m/s}^2$), e aplicando a Eq. (1.4), escrevemos

$$W = mg$$
$$1\ \text{lb} = (0{,}4536\ \text{kg})(9{,}807\ \text{m/s}^2) = 4{,}448\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

ou, considerando a Eq. (1.5)

$$1\ \text{lb} = 4{,}448\ \text{N} \tag{1.11}$$

Unidades de massa. A unidade de massa usual nos Estados Unidos (slug) é uma unidade derivada. Logo, aplicando as Eqs. (1.6), (1.8) e (1.11), temos:

$$1\ \text{slug} = 1\ \text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = \frac{1\ \text{lb}}{1\ \text{ft/s}^2} = \frac{4{,}448\ \text{N}}{0{,}3048\ \text{m/s}^2} = 14{,}59\ \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

ou, Eq. (1.5)

$$1\ \text{slug} = 1\ \text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = 14{,}59\ \text{kg} \tag{1.12}$$

Embora não se possa usá-la como uma unidade consistente de massa, lembremos que a massa da libra padrão é, por definição,

$$1\ \text{libra massa} = 0{,}4536\ \text{kg} \tag{1.13}$$

Essa constante pode ser usada para se determinar a massa em unidades do SI (quilogramas) de um corpo que foi caracterizado pelo seu peso em unidades usuais nos EUA (libras).

Para se converter uma unidade derivada usual nos Estados Unidos em unidades do SI, deve-se simplesmente multiplicar ou dividir tal unidade pelos fatores de conversão apropriados. Por exemplo, para converter o momento de uma força, cujo valor é $M = 47\ \text{lb} \cdot \text{in}$, em unidades do SI, usamos as fórmulas (1.10) e (1.11) e temos:

$$M = 47\ \text{lb} \cdot \text{in} = 47(4{,}448\ \text{N})(25{,}4\ \text{mm})$$
$$= 5310\ \text{N} \cdot \text{mm} = 5{,}31\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Os fatores de conversão dados nesta seção também podem ser usados para se converter um resultado numérico obtido em unidades do SI em unidades usuais nos Estados Unidos. Por exemplo, se o momento de uma força é $M = 40\ \text{N} \cdot \text{m}$, seguindo o procedimento adotado no último parágrafo da Seção 1.3 escrevemos:

$$M = 40\ \text{N} \cdot \text{m} = (40\ \text{N} \cdot \text{m})\left(\frac{1\ \text{lb}}{4{,}448\ \text{N}}\right)\left(\frac{1\ \text{ft}}{0{,}3048\ \text{m}}\right)$$

Efetuando os cálculos numéricos e cancelando as unidades que aparecem tanto no numerador como no denominador, obtemos:

$$M = 29{,}5\ \text{lb} \cdot \text{ft}$$

As unidades usuais nos Estados Unidos utilizadas com maior frequência em mecânica estão listadas na Tabela 1.3 com suas equivalentes no SI.

Tabela 1.3 As unidades usuais nos EUA e as equivalentes no SI

Grandeza	Unidade usual nos EUA	Equivalente no SI
Aceleração	ft/s^2	$0{,}3048\ m/s^2$
	in/s^2	$0{,}0254\ m/s^2$
Área	ft^2	$0{,}0929\ m^2$
	in^2	$645{,}2\ mm^2$
Energia	ft · lb	1,356 J
Força	kip	4,448 kN
	lb	4,448 N
	oz	0,2780 N
Impulso	lb · s	4,448 N · s
Comprimento	ft	0,3048 m
	in	25,40 mm
	mi	1,609 km
Massa	6 massa oz	28,35 g
	massa lb	0,4536 kg
	slug	14,59 kg
	ton	907,2 kg
Momento de uma força	lb · ft	1,356 N · m
	lb · in	0,1130 N · m
Momento de inércia		
De uma área	in^4	$0{,}4162 \times 10^6\ mm^4$
De uma massa	lb · ft + s^2	1,356 kg · m^2
Quantidade de movimento	lb · s	4,448 kg · m/s
Potência	ft · lb/s	1,356 W
	hp	745,7 W
Pressão ou tensão	lb/ft^2	47,88 Pa
	lb/in^2 (psi)	6,895 kPa
Velocidade	ft/s	0,3048 m/s
	in/s	0,0254 m/s
	mi/h (mph)	0,4470 m/s
	mi/h (mph)	1,609 km/h
Volume	ft^3	$0{,}02832\ m^3$
	in^3	$16{,}39\ cm^3$
Líquidos	gal	3,785 L
	qt	0,9464 L
Trabalho	ft · lb	1,356 J

1.5 Método de resolução de problemas

Você deve abordar um problema de mecânica como se fosse abordar uma situação real de engenharia. Argumentando com base em sua própria experiência e intuição, você achará mais fácil entender e formular o problema. Todavia, uma vez enunciado claramente o problema, não haverá lugar em sua solução para preferências particulares. *A solução deve se basear nos seis princípios fundamentais estabelecidos na Seção 1.2 ou em teoremas deduzidos a partir deles*. Cada passo dado deve ser justificado nessa base. Devemos seguir regras estritas, que conduzam à solução de maneira quase automática, não deixando espaço para a intuição ou o "sentimento". Após obter uma resposta, esta deverá ser conferida. Aqui, você poderá novamente apelar para o bom senso e a experiência pessoal. Se não estiver inteiramente satisfeito com o resultado obtido, você deverá conferir sua formulação do problema, a validade dos métodos empregados para solucioná-lo e a precisão dos cálculos.

O *enunciado* de um problema deve ser claro e preciso. Deve conter os dados e indicar a informação pedida. Deve-se incluir um desenho claro mostrando todas as grandezas envolvidas. Diagramas separados devem ser desenhados para todos os corpos envolvidos, indicando claramente as forças

que atuam em cada corpo. Esses diagramas são conhecidos como *diagramas de corpo livre* e estão descritos detalhadamente nas Seções 2.11 e 4.2.

Os *princípios fundamentais* da mecânica listados na Seção 1.2 *serão usados para formularmos equações* que expressem as condições de repouso ou de movimento dos corpos considerados. Cada equação deve ser claramente relacionada a um dos diagramas de corpo livre. Em seguida, você prosseguirá com a resolução do problema, observando estritamente as regras usuais de álgebra e registrando com clareza os vários passos realizados.

Uma vez obtida, a resposta deve ser *cuidadosamente conferida*. Erros de *raciocínio* podem ser facilmente detectados pela verificação das unidades. Por exemplo, para determinar o momento de uma força de 50 N em relação a um ponto a 0,60 m de sua linha de ação, podemos escrever (Seção 3.12)

$$M = Fd = (50\ \text{N})(0{,}60\ \text{m}) = 30\ \text{N} \cdot \text{m}$$

A unidade N · m obtida multiplicando-se newtons por metros é a unidade correta para o momento de uma força; se fosse obtida outra unidade, saberíamos que algum erro foi cometido.

Erros de *cálculo* geralmente podem ser detectados substituindo-se os valores numéricos obtidos em uma equação que ainda não foi usada e se a equação é satisfeita. É importante enfatizar a importância dos cálculos corretos em engenharia.

1.6 Precisão numérica

A precisão da solução de um problema depende de dois itens: (1) a precisão dos dados e (2) a precisão dos cálculos efetuados.

A solução não pode ser mais precisa que o menos preciso desses dois itens. Por exemplo, se o carregamento de uma ponte é conhecido como sendo 300.000 N com um possível erro de 400 N, o erro relativo que mede o grau de precisão dos dados é:

$$\frac{400\ \text{N}}{300.000\ \text{N}} = 0{,}0013 = 0{,}13\%$$

Ao se calcular a reação em um dos apoios da ponte, não fará sentido registrá-la como 57.288 N. A precisão da solução não pode ser maior que 0,13%, não importa quão precisos sejam os cálculos, e o possível erro na resposta pode ser de até (0,13/100)(57.288 N) ≅ 75 N. A resposta deve ser registrada apropriadamente como 57.288 ± 75 N.

Em problemas de engenharia, os dados raramente têm precisão maior que 0,2%. Logo, raramente se justifica escrever as respostas para tais problemas com uma precisão maior que 0,2%. Uma regra prática é usar 4 algarismos significativos para registrar números que começam com "1" e 3 algarismos significativos em todos os outros casos. A menos que seja indicado diferentemente admitiremos que os dados de um problema terão um mesmo grau de precisão. Por exemplo, uma força de 40 N deve ser lida como 40,0 N e uma força de 15 N deve ser lida como 15,00 N.

As calculadoras eletrônicas de bolso tão utilizadas por engenheiros e estudantes de engenharia facilitam os cálculos numéricos na resolução de muitos problemas por sua velocidade e precisão. No entanto, os estudantes não devem registrar algarismos significativos além do justificável simplesmente porque estes são fáceis de obter. Como já observado, uma precisão maior que 0,2% raramente é necessária ou significativa na solução de problemas práticos de engenharia.

Muitos problemas de engenharia podem ser resolvidos considerando o equilíbrio de "partículas". No caso desta escavadeira, que está sendo transportada para o navio, a relação entre as tensões nos vários cabos envolvidos pode ser obtida considerando o equilíbrio do gancho no qual os cabos estão presos.

CAPÍTULO 2

Estática de partículas

2 Estática de partículas

2.1 Introdução
2.2 Força sobre uma partícula e resultante de duas forças
2.3 Vetores
2.4 Adição de vetores
2.5 Resultante de várias forças concorrentes
2.6 Decomposição dos componentes de uma força
2.7 Componentes retangulares de uma força e vetores unitários
2.8 Adição de forças pela soma dos componentes *x* e *y*
2.9 Equilíbrio de uma partícula
2.10 Primeira lei de Newton do movimento
2.11 Problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula e diagramas de corpo livre
2.12 Componentes retangulares de uma força no espaço
2.13 Força definida por sua intensidade e por dois pontos em sua linha de ação
2.14 Adição de forças concorrentes no espaço
2.15 Equilíbrio de uma partícula no espaço

2.1 Introdução

Neste capítulo você estudará o efeito de forças que atuam sobre partículas. Primeiro aprenderá como substituir duas ou mais forças que atuam sobre uma dada partícula por uma única força que tenha o mesmo efeito que as forças originais. Essa única força equivalente é a *resultante* das forças originais que atuam sobre a partícula. Depois, as relações que existem entre as várias forças que atuam sobre a partícula em estado de *equilíbrio* serão deduzidas e usadas para se determinarem algumas das forças atuantes sobre a partícula.

O uso da palavra "partícula" não implica que nosso estudo será limitado a pequenos corpos. Significa que o tamanho e o formato dos corpos em consideração não afetarão significativamente a resolução dos problemas tratados neste capítulo e que todas as forças que atuem sobre um dado corpo serão consideradas em um mesmo ponto de aplicação. Como tal hipótese é verificada em muitas aplicações práticas, neste capítulo você ficará habilitado a resolver diversos problemas de engenharia.

A primeira parte do capítulo é dedicada ao estudo de forças contidas em um único plano; a segunda parte, à análise de forças em espaço tridimensional.

FORÇAS NO PLANO

2.2 Força sobre uma partícula e resultante de duas forças

Uma força representa a ação de um corpo sobre outro e geralmente é caracterizada por seu *ponto de aplicação*, sua *intensidade*, sua *direção* e seu *sentido*. Forças que atuam sobre uma dada partícula, no entanto, têm o mesmo ponto de aplicação. Cada força considerada neste capítulo será, então, completamente definida por sua intensidade, sua direção e seu sentido.

A intensidade de uma força é caracterizada por um certo número de unidades. Como indicamos no Cap. 1, as unidades do SI usadas por engenheiros para medir a intensidade de uma força são o newton (N) e seu múltiplo, o quilonewton (kN), igual a 1.000 N. A direção de uma força é definida pela *linha de ação* e o *sentido* da força. A linha de ação é a linha reta infinita ao longo da qual a força atua; caracteriza-se pelo ângulo que ela forma com algum eixo fixo (Fig. 2.1). A força propriamente dita é representada por um segmento dessa linha; por meio do uso de

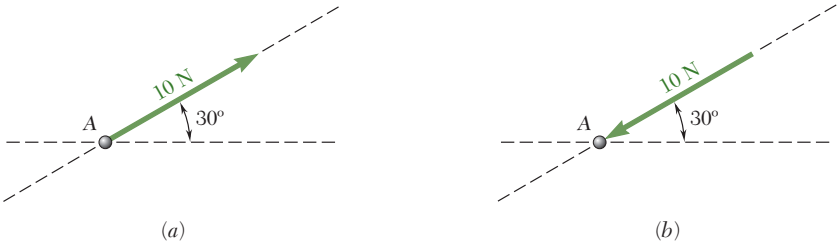


Figura 2.1

uma escala apropriada, pode-se escolher o comprimento desse segmento para representar a intensidade da força. Por fim, o sentido da força deve ser indicado por uma ponta de seta. É importante, na definição de uma força, a indicação de seu sentido. Duas forças que tenham a mesma intensidade e a mesma linha de ação, mas sentidos diferentes, tais como as forças mostradas na Fig. 2.1*a* e *b*, terão efeitos diretamente opostos sobre uma partícula.

Constata-se experimentalmente que duas forças **P** e **Q** que atuam sobre uma partícula *A* (Fig. 2.2*a*) podem ser substituídas por uma única força **R** que tem o mesmo efeito sobre essa partícula (Fig. 2.2*c*). Essa força é chamada de *resultante* das forças **P** e **Q** e pode ser obtida, como mostra a Fig. 2.2*b*, pela construção de um paralelogramo, usando-se **P** e **Q** como dois lados adjacentes desse paralelogramo. *A diagonal que passa por A representa a resultante*. Esse método, de encontrar a resultante, é denominado *lei do paralelogramo* para a adição de duas forças. Essa lei é baseada em evidência experimental: não pode ser provada ou deduzida matematicamente.

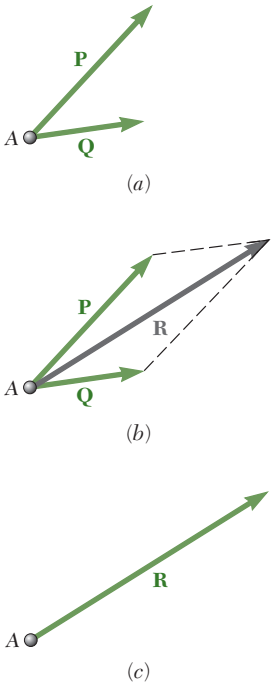


Figura 2.2

2.3 Vetores

Observa-se, pelo descrito anteriormente, que forças não obedecem às regras de adição definidas na álgebra ou aritmética comuns. Por exemplo, duas forças que atuam em um ângulo reto entre si, uma de 4 N e a outra de 3 N, somadas resultam em uma força de 5 N, é não em uma força de 7 N. Forças não são as únicas quantidades que seguem a lei do paralelogramo para adição. Como você verá mais adiante, *deslocamentos*, *velocidades*, *acelerações* e *quantidades de movimento* são outros exemplos de quantidades físicas que têm intensidade, direção e sentido e que são somadas de acordo com a lei do paralelogramo. Todas essas quantidades podem ser representadas matematicamente por vetores, enquanto aquelas quantidades físicas que têm intensidade, mas não direção, tais como *volume, massa ou energia*, são representadas por números simples ou *escalares*.

Vetores são definidos como *expressões matemáticas que têm intensidade, direção e sentido, que se somam de acordo com a lei do paralelogramo*. Vetores são representados por setas nas figuras e serão distinguidos dos escalares neste texto pelo uso de negrito (**P**). De forma manuscrita, um vetor pode ser expresso pelo desenho de uma pequena seta acima da letra usada para representá-lo ($\vec{P}$) ou sublinhando-se essa letra ($\underline{P}$). A intensidade do vetor define o comprimento da seta usada para representá-lo. Neste texto, a fonte em itálico será usada para denotar a intensidade de um vetor. Assim, a intensidade de um vetor **P** será representada por *P*.

Um vetor usado para representar uma força que atua sobre uma dada partícula tem um ponto de aplicação bem definido, a saber, a partícula propriamente dita. Diz-se que tal vetor é *fixo,* ou *ligado*, e não pode ser deslocado sem que se modifiquem as condições do problema. Outras quantidades físicas, entretanto, como momentos e binários (ver Cap. 3), são representadas por vetores que podem se mover livremente no espaço são denominados vetores *livres*. Ainda outras quantidades, como forças atuantes sobre um corpo rígido (ver Cap. 3), são representadas por veto-

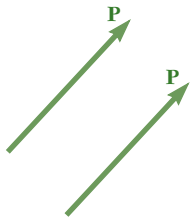


Figura 2.4

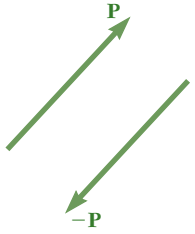


Figura 2.5

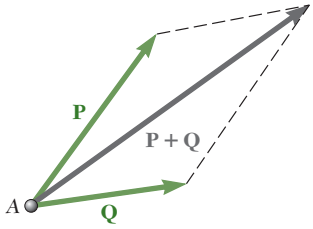


Figura 2.6

res que podem ser deslocados, ou deslizados, ao longo de suas linhas de ação, denominados vetores *deslizantes*.*

Dois vetores que têm a mesma intensidade, a mesma direção e o mesmo sentido são considerados *iguais*, independente de terem ou não o mesmo ponto de aplicação (Fig. 2.4); vetores iguais podem ser representados pela mesma letra.

O *vetor oposto* de um dado vetor **P** é definido como um vetor que tem a mesma intensidade e a mesma direção de **P** e um sentido oposto ao de **P** (Fig. 2.5); o oposto de um vetor **P** é denotado por $-\mathbf{P}$. Os vetores **P** e $-\mathbf{P}$ são geralmente referidos como vetores *iguais e opostos*. Temos então:

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

2.4 Adição de vetores

Vimos na seção anterior que, por definição, vetores se somam de acordo com a lei do paralelogramo. Portanto, a soma de dois vetores **P** e **Q** é obtida aplicando-se os dois vetores no mesmo ponto *A* e construindo-se o paralelogramo, usando **P** e **Q** como dois lados do paralelogramo (Fig. 2.6). A diagonal que passa por *A* representa a soma dos vetores **P** e **Q**, e essa soma é representada por $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. O fato de o sinal + ser usado para representar tanto as adições de vetores como as de escalares não deve causar confusão, se as quantidades vetoriais e escalares forem sempre cuidadosamente distinguidas. Portanto, devemos notar que a intensidade do vetor $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ *não é*, geralmente, igual à soma $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ das intensidades dos vetores **P** e **Q**.

* Algumas expressões têm intensidade, direção e sentido, mas não se somam de acordo com a lei do paralelogramo. Embora possam ser representadas por setas, essas expressões *não* podem ser consideradas vetores.

Um grupo dessas expressões é o de rotações finitas de um corpo rígido. Coloque um livro fechado sobre uma mesa à sua frente, de modo que fique em posição de leitura, com a capa para cima e a lombada para a esquerda. Agora gire o livro 180° em torno de um eixo paralelo à lombada (Fig. 2.3*a*); essa rotação pode ser representada por uma seta de comprimento igual a 180 unidades e orientada tal como mostra a figura. Pegando o livro nessa nova posição, gire-o agora 180° em torno de um eixo perpendicular à lombada (Fig. 2.3*b*); essa segunda rotação pode ser representada por uma seta de 180 unidades de comprimento e orientada tal como mostra a figura. Mas o livro poderia ter sido colocado nessa posição final por meio de uma rotação única de 180° em torno de um eixo vertical (Fig. 2.3*c*). Concluímos que a soma das duas rotações de 180° representadas pelas setas direcionadas respectivamente ao longo dos eixos *z* e *x* é uma rotação de 180° representada por uma seta direcionada ao longo do eixo *y* (Fig. 2.3*d*). Obviamente, as rotações finitas de um corpo rígido *não* obedecem à lei do paralelogramo para adição; em consequência, *não* podem ser representadas por vetores.

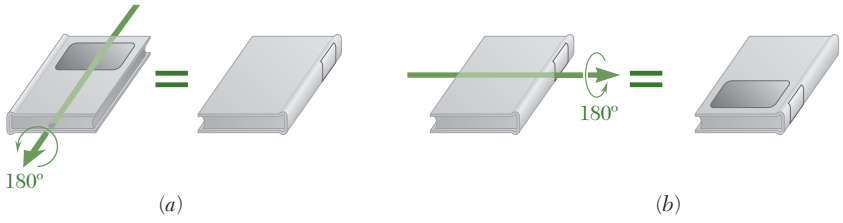


Figura 2.3 Rotações finitas de um corpo rígido.

Como o paralelogramo construído com os vetores **P** e **Q** não depende da ordem em que **P** e **Q** são selecionados, concluímos que a adição de dois vetores é *comutativa*, dada por:

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \tag{2.1}$$

Da lei do paralelogramo, podemos deduzir um outro método para se determinar a soma de dois vetores. Esse método, conhecido como a *regra do triângulo*, é apresentado a seguir. Considere a Fig. 2.6, na qual a soma dos vetores **P** e **Q** foi determinada pela lei do paralelogramo. Como o lado do paralelogramo oposto a **Q** é igual a **Q** em intensidade e direção, podemos desenhar apenas metade do paralelogramo (Fig. 2.7*a*). A soma dos dois vetores pode, portanto, ser determinada *dispondo-se* **P** *e* **Q** *no padrão ponta-a-cauda* e, em seguida, unindo-se a cauda de* **P** *à ponta de* **Q**. Na Fig. 2.7*b*, é considerada a outra metade do paralelogramo, e obtém-se o mesmo resultado. Isso confirma o fato de que a adição de vetores é comutativa.

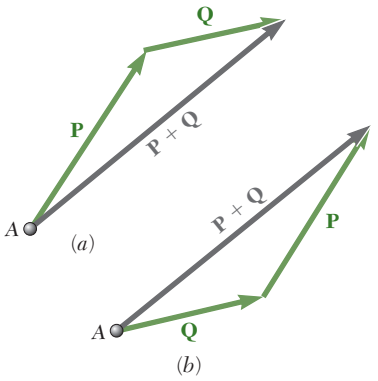


Figura 2.7

A *subtração* de um vetor é definida pela adição do vetor oposto correspondente. Portanto, o vetor $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$, que representa a diferença entre os vetores **P** e **Q**, é obtido adicionando-se a **P** o vetor oposto $-\mathbf{Q}$ (Fig. 2.8). Temos:

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q}) \tag{2.2}$$

Aqui novamente devemos observar que, embora seja usado o mesmo sinal para denotar a subtração vetorial e a escalar, serão evitadas confusões se forem tomados cuidados para se distinguir entre quantidades escalares e vetoriais.

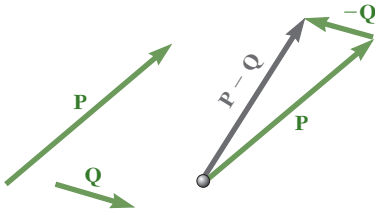


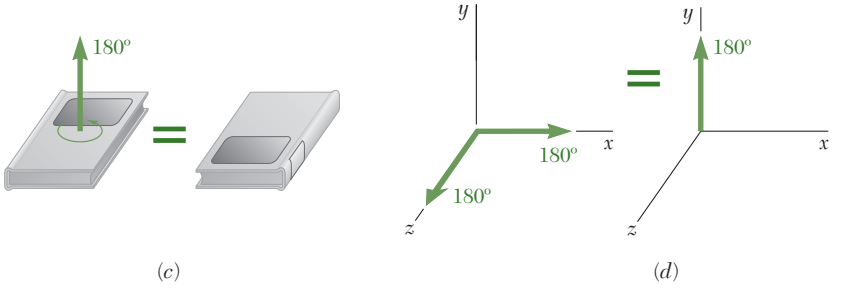
Figura 2.8

Vamos agora considerar a *soma de três ou mais vetores*. A soma de três vetores **P**, **Q** e **S** será, *por definição*, obtida primeiro somando-se os vetores **P** e **Q**, e depois adicionando-se o vetor **S** ao vetor $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. Temos, portanto,

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \tag{2.3}$$

De modo semelhante, a soma de quatro vetores será obtida adicionando-se o quarto vetor à soma dos três primeiros. Segue-se que a soma de qualquer número de vetores pode ser obtida aplicando-se repetidamente a lei do paralelogramo a pares sucessivos de vetores até que todos os vetores dados tenham sido substituídos por um único vetor.

* O padrão ponta-a-cauda significa posicionar dois vetores de modo a unir a ponta (final) do primeiro vetor à cauda (origem) do segundo vetor.



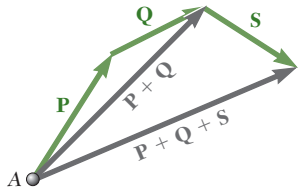


Figura 2.9

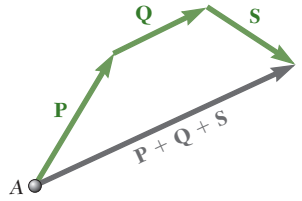


Figura 2.10

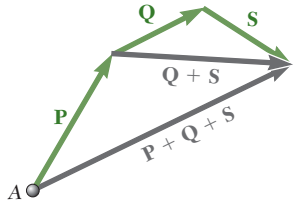


Figura 2.11

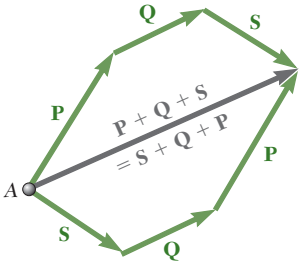


Figura 2.12

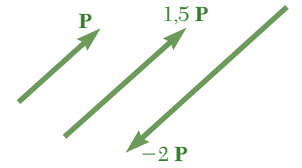


Figura 2.13

Se os vetores dados são *coplanares*, ou seja, se eles estão contidos no mesmo plano, será fácil obter a sua soma graficamente. Nesse caso, a aplicação sucessiva da regra do triângulo é preferível à aplicação da lei do paralelogramo. Na Fig. 2.9, a soma de três vetores **P**, **Q** e **S** foi obtida dessa maneira. A regra do triângulo foi primeiro aplicada para se obter a soma **P** + **Q** dos vetores **P** e **Q**, e aplicada novamente para se obter a soma dos vetores **P** + **Q** e **S**. A determinação do vetor **P** + **Q**, no entanto, poderia ter sido omitida, e a soma dos três vetores obtida diretamente, como mostra a Fig. 2.10, *dispondo-se os vetores dados no padrão ponta-a-cauda e unindo-se a cauda do primeiro vetor à ponta do último*. Esse procedimento é conhecido como *regra do polígono* para adição de vetores.

Observamos que o resultado obtido teria sido o mesmo se, como mostra a Fig. 2.11, os vetores **Q** e **S** tivessem sido substituídos pela soma **Q** + **S**. Portanto, podemos escrever:

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \tag{2.4}$$

o que expressa o fato de que a adição de vetores é *associativa.* Lembrando que também foi mostrado que a adição de vetores, no caso de dois vetores, é comutativa, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{S} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{S} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) = \mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Essa expressão, assim como outras que poderiam ser obtidas da mesma maneira, mostra que a ordem em que vários vetores são adicionados é irrelevante (Fig. 2.12).

Produto de um escalar por um vetor. Como é conveniente representar a soma **P** + **P** por 2**P**, a soma **P** + **P** + **P** por **3P** e, em geral, a soma de n vetores iguais **P** pelo produto $n\mathbf{P}$, definiremos o produto $n\mathbf{P}$ de um inteiro positivo n por um vetor **P** como um vetor que tem a mesma direção e o mesmo sentido que **P** e a intensidade $n\mathbf{P}$. Estendendo essa definição para incluir todos os escalares, e lembrando a definição de vetor oposto dada na Seção 2.3, definimos o produto $k\mathbf{P}$ de um escalar k por um vetor **P** como um vetor que tem a mesma direção e o mesmo sentido que **P** (se k for positivo), ou a mesma direção e sentido oposto ao de **P** (se k for negativo), e uma intensidade igual ao produto de **P** e do valor absoluto de k (Fig. 2.13).

2.5 Resultante de várias forças concorrentes

Considere uma partícula A sobre a qual atuam várias forças coplanares, isto é, várias forças contidas em um mesmo plano (Fig. 2.14*a*). Como as forças consideradas aqui passam todas por A, também são denominadas concorrentes. Os vetores que representam as forças que atuam sobre A podem ser adicionados pela regra do polígono (Fig. 2.14*b*). Como o uso da regra do polígono é equivalente à aplicação repetida da lei do paralelogramo, o vetor **R** assim obtido representa a resultante das forças concorrentes dadas, ou seja, a força única que tem sobre a partícula A o mesmo

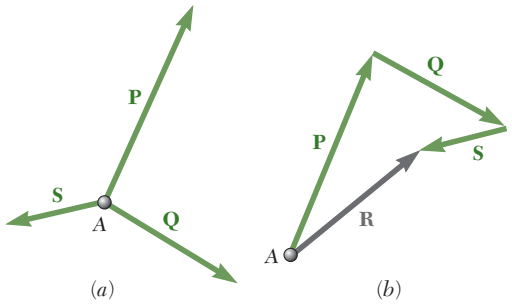


Figura 2.14

efeito que as forças originais dadas. Como indicamos acima, a ordem em que os vetores **P**, **Q** e **S**, representando as forças dadas, são adicionados é irrelevante.

2.6 Decomposição dos componentes de uma força

Vimos que duas ou mais forças que atuam sobre uma partícula podem ser substituídas por uma força única que tem o mesmo efeito sobre a partícula. Reciprocamente, uma força única **F** que atua sobre uma partícula pode ser substituída por duas ou mais forças que, juntas, têm o mesmo efeito sobre a partícula. Essas forças são chamadas de *componentes* da força original **F**, e o processo de substituição de **F** por estas componentes é denominado *decomposição dos componentes da força* **F**.

Obviamente, para cada força **F** existe um número infinito de possíveis conjuntos de componentes. Conjuntos de dois *componentes* **P** *e* **Q** são os mais importantes no que concerne a aplicações práticas. Mas, mesmo assim, o número de maneiras pelas quais uma dada força **F** pode ser decomposta em dois componentes é ilimitado (Fig. 2.15). Dois casos são de particular interesse:

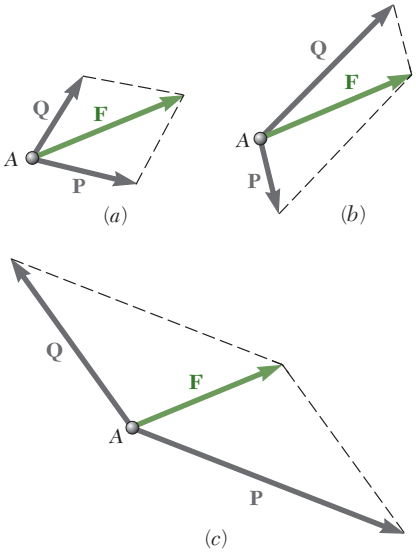


Figura 2.15

1. Um *dos dois componentes*, **P**, *é conhecido*. O segundo componente, **Q**, é obtido aplicando-se a regra do triângulo e unindo-se a ponta de **P** à ponta de **F** (Fig. 2.16); a intensidade, a direção e o sentido de **Q** são determinadas graficamente ou por trigonometria. Uma vez que **Q** tiver sido determinado, ambos os componentes **P** e **Q** devem ser aplicados em *A*.
2. *A linha de ação de cada componente é conhecida*. A intensidade e o sentido dos componentes são obtidos aplicando-se a lei do paralelogramo e traçando-se retas a partir da ponta de **F**, paralelas às linhas de ação dadas (Fig. 2.17). Esse processo conduz a dois componentes bem definidos, **P** e **Q**, que podem ser determinados graficamente ou calculados trigonometricamente aplicando-se a lei dos senos.

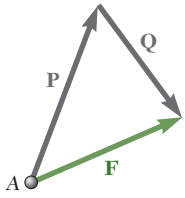


Figura 2.16

Muitos outros casos podem ser encontrados; por exemplo, a direção de um componente pode ser conhecida, enquanto se deseja que a intensidade do outro componente seja tão pequena quanto possível (ver Problema Resolvido 2.2). Em todos os casos, o triângulo ou paralelogramo adequado que satisfaz as condições dadas é representadado.

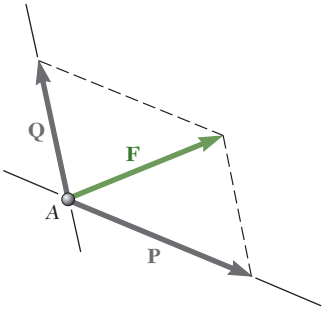
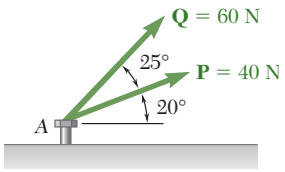


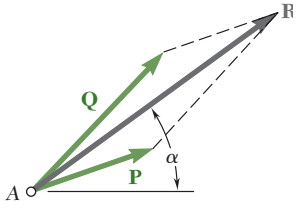
Figura 2.17



PROBLEMA RESOLVIDO 2.1

As duas forças **P** e **Q** atuam sobre um parafuso *A*. Determine sua resultante.

SOLUÇÃO

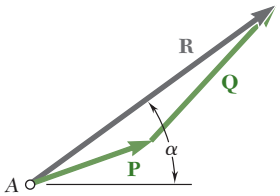


Solução gráfica. Um paralelogramo com lados iguais a **P** e **Q** é desenhado em escala. A intensidade e o ângulo que define a direção da resultante são medidos e os valores encontrado são:

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35° \qquad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \angle 35° \blacktriangleleft$$

Pode-se usar também a regra do triângulo. As forças **P** e **Q** são desenhadas no padrão ponta-a-cauda. Novamente, a intensidade e o ângulo que define a direção da resultante são medidos.

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35° \qquad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \angle 35° \blacktriangleleft$$

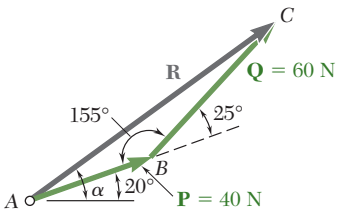


Solução trigonométrica. A regra do trângulo é usada novamente; dois lados e o ângulo incluso são conhecidos.Aplicamos a lei dos cossenos:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$
$$R^2 = (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155°$$
$$R = 97{,}73 \text{ N}$$

Agora, aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{Q} = \frac{\operatorname{sen} B}{R} \qquad \frac{\operatorname{sen} A}{60 \text{ N}} = \frac{\operatorname{sen} 155°}{97{,}73 \text{ N}} \tag{1}$$



Resolvendo a Eq. (1) para sen *A*, obtemos:

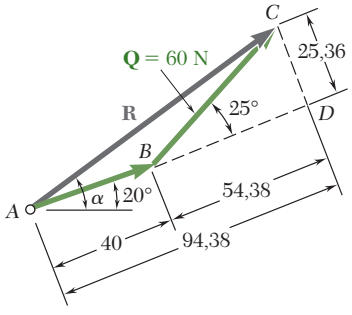
$$\operatorname{sen} A = \frac{(60 \text{ N}) \operatorname{sen} 155°}{97{,}73 \text{ N}}$$

Usando uma calculadora, primero calculamos o quociente, em segida seu arco seno, e obtemos:

$$A = 15{,}04° \qquad \alpha = 20° + A = 35{,}04°$$

Usamos 3 algarismos significativos para escrever a resposta (ver Seção 1.6):

$$\mathbf{R} = 97{,}7 \text{ N} \angle 35{,}0° \blacktriangleleft$$



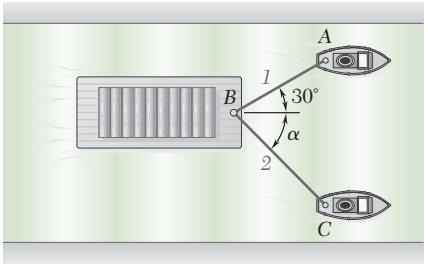
Solução trigonométrica alternativa. Construimos a triângulo retângulo *BCD* e calculamos:

$$CD = (60 \text{ N}) \operatorname{sen} 25° = 25{,}36 \text{ N}$$
$$BD = (60 \text{ N}) \cos 25° = 54{,}38 \text{ N}$$

Em seguida, usando o triângulo *ACD*, obtemos:

$$\operatorname{tg} A = \frac{25{,}36 \text{ N}}{94{,}38 \text{ N}} \qquad A = 15{,}04°$$
$$R = \frac{25{,}36}{\operatorname{sen} A} \qquad R = 97{,}73 \text{ N}$$

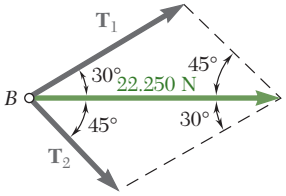
Novamente, $\alpha = 20° + A = 35{,}04°$ $\mathbf{R} = 97{,}7 \text{ N} \angle 35{,}0° \blacktriangleleft$



PROBLEMA RESOLVIDO 2.2

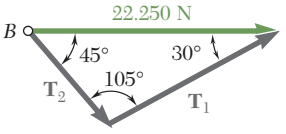
Uma barcaça é puxada por dois rebocadores. Se a resultante das forças exercidas pelos rebocadores é uma força de 22.250 N dirigida ao longo do eixo da barcaça, determine (*a*) a força de tração em cada um dos cabos, sabendo que $\alpha = 45°$, (*b*) o valor de α para o qual a tração no cabo 2 seja mínima.

SOLUÇÃO



a. Tração para $\alpha = 45°$. ***Solução gráfica.*** Aplica-se a lei do paralelogramo; a diagonal (resultante) é conhecida, igual a 22.250 N, e está dirigida para a direita. Os lados são desenhados paralelos aos cabos. Se o desenho for feito em escala, medimos:

$$T_1 = 16.200 \text{ N} \qquad T_2 = 11.500 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

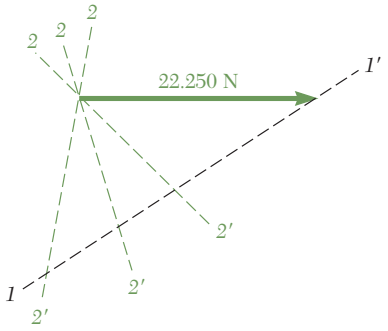


Solução trigométrica. Pode-se aplicar a regra do triângulo. Notamos que o triângulo mostrado representa metade do paralelogramo mostrado acima. Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{T_1}{\text{sen } 45°} = \frac{T_2}{\text{sen } 30°} = \frac{22.250 \text{ N}}{\text{sen } 105°}$$

Com uma calculadora, primeiro calculamos e armazenamos o valor do último quociente. Mutiplicando esse valos sucessivamente por sen 45° e sen 30°, obtemos:

$$T_1 = 16.288 \text{ N} \qquad T_2 = 11.517\text{N} \quad \blacktriangleleft$$



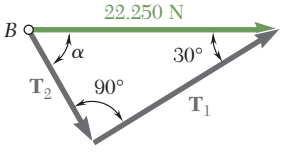
b. Valor de α para T_2 mínimo. Para determinar o valor de α para o qual a tração no cabo 2 é mínima, aplica-se novamente a regra do triângulo. No croqui mostrado, a linha *1-1′* é a direção conhecida de $\mathbf{T}_1$. Várias direções possíveis de $\mathbf{T}_2$ são mostradas pelas linhas *2-2′*. Observa-se que o valor mínimo de $\mathbf{T}_2$ ocorre quando o $\mathbf{T}_1$ e o $\mathbf{T}_2$ são perpendiculares. O valor de $\mathbf{T}_2$ é

$$T_2 = (22.500 \text{ N}) \text{ sen } 30° = 11.125 \text{ N}$$

Os valores correspondentes de T_1 e α são

$$T_1 = (22.500 \text{ N}) \cos 30° = 19.269 \text{ N}$$

$$\alpha = 90° - 30° \qquad \alpha = 60° \quad \blacktriangleleft$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

As seções anteriores foram dedicadas à introdução e à aplicação da *lei do paralelogramo* para a adição de vetores.

Apresentamos dois problemas resolvidos. No Problema 2.1, a lei do pararelograma foi usada para determinar a resultante de duas forças de intensidade, direção e sentido conhecidas. Já no Problema 2.2, a lei foi usada para descobrir uma força dada em dois componentes de direção e sentido conhecidos.

Agora você vai ser solicitado a resolver problemas por conta própria. Alguns podem parecer com um dos problemas resolvidos; outros não. O que todos os problemas desta seção têm em comum é que podem ser solucionados pela aplicação direta da lei do paralelogramo.

A solução para um dado problema deve consistir nos seguintes passos:

1. Identifique quais das forças são as forças aplicadas e qual é a resultante. Frequentemente é útil escrever a equação vetorial que mostra como as forças estão relacionadas. Por exemplo, no Problema Resolvido 2.1 teríamos:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Você deve ter em mente essa relação enquanto formula a próxima parte da sua solução.

2. Desenhe um paralelogramo tendo as forças aplicadas como dois lados adjacentes e a resultante como a diagonal inclusa (Fig. 2.2). Alternativamente, você pode *usar a regra do triângulo* com as forças aplicadas desenhadas no padrão ponta-a-cauda e com a resultante se estendendo da cauda do primeiro vetor à ponta do segundo (Fig. 2.7).

3. Indique todas as dimensões. Usando um dos triângulos do paralelogramo ou o triângulo construído de acordo com a regra do triângulo, indique todas as dimensões – sejam lados ou ângulos – e determine as dimensões desconhecidas, seja graficamente ou por trigonometria. Se você usar trigonometria, lembre-se de que, se dois lados e o ângulo incluso forem conhecidos [Problema Resolvido 2.1], a lei de cossenos deve ser aplicada primeiro; e de que, se um lado e todos os ângulos forem conhecidos [Problema Resolvido 2.2], a lei de senos deve ser aplicada primeiro.

Se você sabe um pouco de Mecânica, pode se sentir tentado a ignorar as técnicas de solução dessa lição em favor da decomposição das forças em componentes retangulares. Esse método também é muito importante e, por isso, será considerado na próxima seção, mas o uso da lei do paralelogramo simplifica a solução de muitos problemas e deve ser dominado completamente neste momento.

PROBLEMAS*

2.1 Duas forças **P** e **Q** são aplicadas no ponto *A* de um suporte tipo gancho. Sabendo que $P = 75$ N e $Q = 125$ N, determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido da resultante usando (*a*) a lei do paralelogramo, (*b*) a regra do triângulo.

2.2 Duas forças **P** e **Q** são aplicadas no ponto *A* de um suporte tipo gancho. Sabendo que $P = 266$ N e $Q = 110$ N, determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido da resultante usando (*a*) a lei do paralelogramo, (*b*) a regra do triângulo.

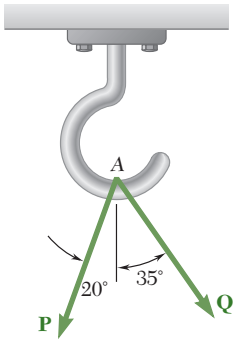


Figura P2.1 e P2.2

2.3 Os cabos *AB* e *AD* ajudam a suportar o poste *AC*. Sabendo que a tração é 500 N em *AB* e 160 N em *AD*, determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas pelos cabos em *A* usando (*a*) a lei do paralelogramo e (*b*) a regra do triângulo.

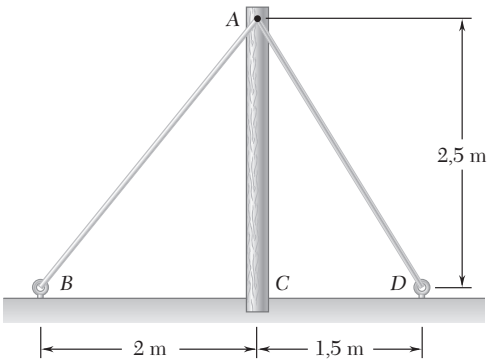


Figura P2.3

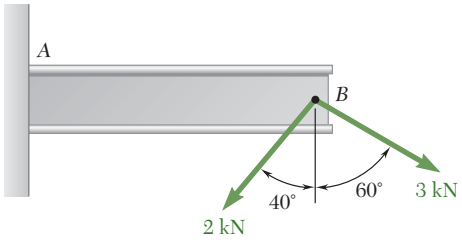


Figura P2.4

2.4 Duas forças são aplicadas no ponto *B* da viga *AB*. Determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido de sua resultante usando (*a*) a lei do paralelogramo, (*b*) a regra do triângulo.

2.5 A força de 1.330 N deve ser decomposta em componentes ao longo das linhas *a*-*a*′ e *b*-*b*′. (*a*) Usando trigonometria, determine o ângulo α sabendo que o componente ao longo de *a*-*a*′ é 530 N. (*b*) Qual é o valor correspondente do componente ao longo de *b*-*b*′?

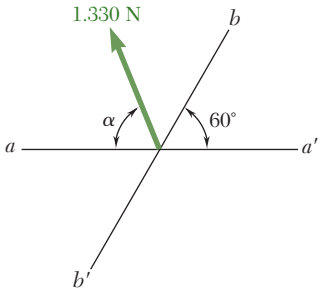


Figura P2.5 e P2.6

2.6 A força de 300 N deve ser decomposta em componentes ao longo das linhas *a*-*a*′ e *b*-*b*′. (*a*) Usando trigonometria, determine o ângulo α sabendo que o componente ao longo de *b*-*b*′ é 120 N. (b) Qual é o valor correspondente do componente ao longo de *a*-*a*′?

2.7 Duas forças são aplicadas a um suporte tipo gancho indicadas na figura. Usando trigonometria e sabendo que a intensidade de **P** é 35 N, determine (*a*) o ângulo requerido a se a resultante **R** das duas forças aplicadas no suporte for horizontal, e (*b*) a intensidade correspondente de **R**.

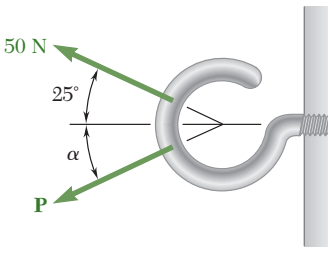


Figura P2.7

* As respostas a todos os problemas escritos em fonte normal (tal como **2.1**) estão no final do livro. As respostas a problemas cujo número é escrito em itálico (tal como ***2.4***) não são dadas.

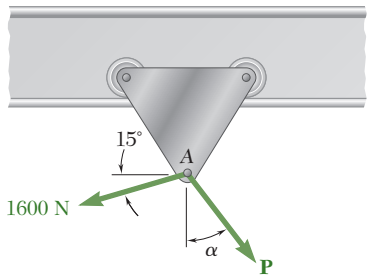


Figura P2.9 e P2.10

2.8 Para o suporte tipo gancho do Problema 2.1, usando trigonometria e sabendo que a intensidade de **P** é 75 N, determine (*a*) a intensidade requerida da força **Q** se a resultante **R** das duas forças aplicadas em *A* for vertical, (*b*) a intensidade correspondente de **R**.

2.9 Um carrinho de mão que se movimenta ao longo da viga horizontal é acionado por duas forças indicadas na figura. (*a*) Sabendo-se que $\alpha = 25°$, determine, usando trigonometria, a intensidade da força **P** se a força resultante sobre o carrinho de mão é vertical. (*b*) Qual a intensidade correspondente da resultante?

2.10 Um carrinho de mão que se movimenta ao longo da viga horizontal é acionado por duas forças indicadas na figura. Usando a trigonometria, a intensidade, direção e sentido da força **P** se a força resultante sobre o carrinho de mão é vertical e de valor igual a 2.500 N.

2.11 Um tanque de aço deve ser posicionado em uma escavação. Sabendo-se que $\alpha = 20°$, determine, usando trigonometria, (*a*) a intensidade requerida para a força **P** se a resultante **R** das duas forças aplicadas em *A* é vertical (*b*) a correspondente intensidade de **R**.

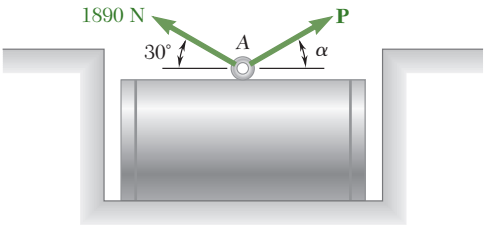


Figura P2.11 e *P2.12*

2.12 Um tanque de aço deve ser posicionado em uma escavação. Sabendo-se que a intensidade de **P** = 2.220 N, determine, usando trigonometria (*a*) o ângulo requerido se a resultante **R** das duas forças aplicadas em *A* é vertical (*b*) a correspondente intensidade de **R**.

2.13 Para o suporte tipo gancho do Problema 2.7, determine, usando trigonometria, (*a*) a intensidade e a direção da menor força **P** para que a resultante **R** das duas forças aplicadas no suporte seja horizontal, (*b*) a correspondente intensidade de **R**.

2.14 Para o tanque de aço do Problema 2.11, determine, usando trigonometria, (*a*) a intensidade e a direção da menor força **P** para a qual a resultante **R** das duas forças aplicadas em *A* seja vertical, (*b*) a correspondente intensidade de **R**.

2.15 Resolva o Problema 2.2 usando trigonometria.

2.16 Resolva o Problema 2.3 usando trigonometria.

2.17 Resolva o Problema 2.4 usando trigonometria.

2.18 Dois elementos estruturais *A* e *B* são parafusados a um suporte, como mostra a figura. Sabendo que ambos os elementos estão em compressão e que a força é 15 kN no elemento *A* e 10 kN no elemento *B*, determine, usando trigonometria, a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças aplicadas ao suporte pelos elementos *A* e *B*

2.19 Dois elementos estruturais *A* e *B* são parafusados a um suporte, como mostra a figura. Sabendo que ambos os elementos estão em compressão e que a força é 10 kN no elemento *A* e 15 kN no elemento *B*, determine, usando trigonometria, a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças aplicadas ao suporte pelos elementos *A* e *B*.

2.20 Para o suporte tipo gancho do Problema 2.7, sabendo-se que $\mathbf{P} = 75$ N e $\alpha = 50°$, determine, usando trigonometria, a intensidade e a direção da resultante das duas forças aplicadas no suporte.

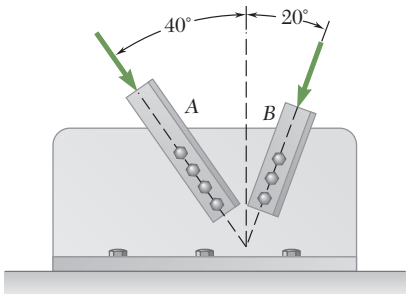


Figura P2.18 e P2.19

2.7 Componentes retangulares de uma força e vetores unitários*

Em muitos problemas, será desejável decompor uma força em dois componentes que são perpendiculares entre si. Na Fig. 2.18, a força **F** foi decomposta em um componente $\mathbf{F}_x$ ao longo do eixo *x* e um componente $\mathbf{F}_y$ ao longo do eixo *y*. O paralelogramo desenhado para se obter os dois componentes é um *retângulo*, e $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$ são chamados de *componentes retangulares*.

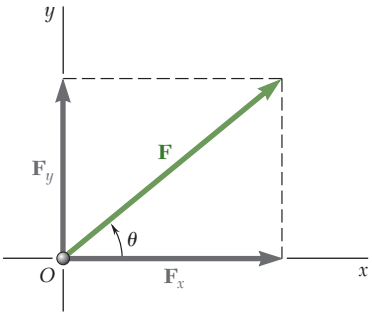


Figura 2.18

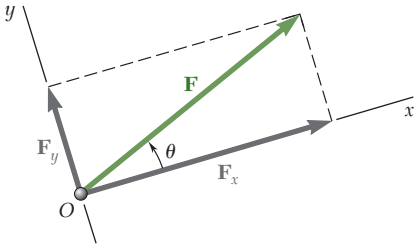


Figura 2.19

Os eixos *x* e *y* geralmente são dispostos na horizontal e na vertical, respectivamente, como na Fig. 2.18; podem, no entanto, ser dispostos em duas direções perpendiculares quaisquer, como mostra a Fig. 2.19. Na determinação dos componentes retangulares de uma força, o estudante deve pensar nas linhas de construção representadas nas Figs. 2.18 e 2.19 como sendo *paralelas* aos eixos *x* e *y*, em vez de perpendiculares a esses eixos. Essa prática ajudará a evitar erros na determinação de componentes *oblíquos*, como na Seção 2.6.

* As propriedades estabelecidas nas Seções 2.7 e 2.8 podem ser facilmente estendidas a componentes retangulares de qualquer quantidade vetorial.

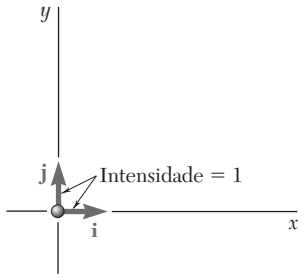


Figura 2.20

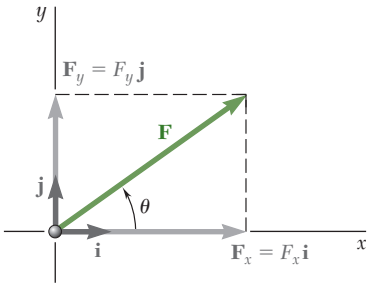


Figura 2.21

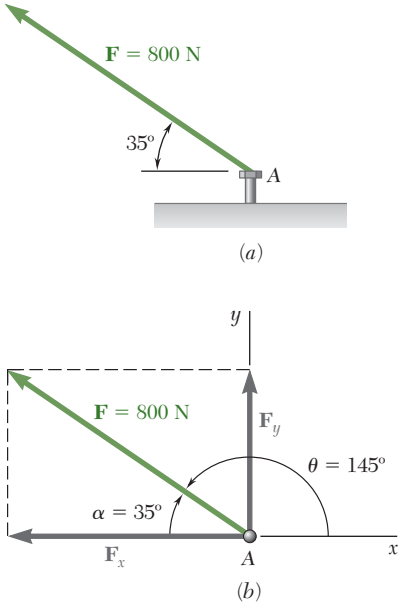


Figura 2.22

Dois vetores de intensidade unitária, dirigidos respectivamente ao longo dos eixos positivos x e y, serão introduzidos neste ponto. Esses vetores são denominados *vetores unitários* e são representados por **i** e **j**, respectivamente (Fig. 2.20). Lembrando a definição do produto de um escalar por um vetor dada na Seção 2.4, notamos que os componentes retangulares $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$ da força **F** podem ser obtidos multiplicando-se respectivamente os vetores unitários **i** e **j** pelos escalares apropriados (Fig. 2.21). Temos:

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j} \tag{2.6}$$

e

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \tag{2.7}$$

Embora os escalares F_x e F_y possam ser positivos ou negativos, dependendo do sentido de $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$, seus valores absolutos são respectivamente iguais às intensidades das forças componentes $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$. Os escalares F_x e F_y são denominados *componentes escalares* da força **F**, enquanto as verdadeiras forças componentes $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$ recebem o nome de *componentes vetoriais* de **F**. Entretanto, quando não houver possibilidade de confusão, podemos chamar tanto os componentes vetoriais quanto os componentes escalares de **F** simplesmente de *componentes* de **F**. Notamos que o componente escalar F_x é positivo quando o componente vetorial $\mathbf{F}_x$ tiver o mesmo sentido que o vetor unitário **i** (ou seja, o mesmo sentido que o eixo x positivo) e é negativo quando $\mathbf{F}_x$ tiver sentido oposto. Pode-se chegar a uma conclusão semelhante com relação ao sinal do componente escalar F_y.

Representando por F a intensidade da força **F** e por θ o ângulo entre **F** e o eixo x, medido no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo (Fig. 2.21), podemos expressar os componentes escalares de **F** da seguinte maneira:

$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\,\text{sen}\,\theta \tag{2.8}$$

Notamos que as relações obtidas valem para qualquer valor do ângulo θ, de 0° a 360° e que definem tanto o sinal como o valor absoluto dos componentes escalares F_x e F_y.

EXEMPLO 1 Uma força de 800 N é exercida no parafuso A, como mostra a Fig. 2.22*a*. Determine os componentes vertical e horizontal dessa força.

Para se obter o sinal correto para os componentes escalares F_x e F_y, o valor θ nas Eqs. (2.8) deve ser substituído por 180° − 35° = 145°. Entretanto, pode ser mais prático determinar por inspeção os sinais de F_x e F_y (Fig. 2.22*b*) e usar as funções trigonométricas do ângulo α = 35°. Escrevemos, portanto:

$$F_x = -F\cos\alpha = -(800\text{ N})\cos 35° = -655\text{ N}$$
$$F_y = +F\,\text{sen}\,\alpha = +(800\text{ N})\,\text{sen}\,35° = +459\text{ N}$$

Os componentes vetoriais de **F** são, então:

$$\mathbf{F}x = -(655\text{ N})\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = +(459\text{ N})\mathbf{j}$$

e podemos escrever **F** na forma

$$\mathbf{F} = -(655\text{ N})\mathbf{i} + (459\text{ N})\mathbf{j}$$

■

EXEMPLO 2 Um homem puxa com a força de 300 N uma corda amarrada a um edifício, como mostra a Fig. 2.23*a*. Quais são os componentes horizontal e vertical da força exercida pela corda no ponto *A*?

Vê-se da Fig. 2.23*b* que:

$$F_x = +(300\text{ N})\cos\alpha \qquad F_y = -(300\text{ N})\operatorname{sen}\alpha$$

Observamos que $AB = 10$ m, obtemos da Fig. 2.23*a*:

$$\cos\alpha = \frac{8\text{ m}}{AB} = \frac{8\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{4}{5} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{6\text{ m}}{AB} = \frac{6\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Portanto, obtemos

$$F_x = +(300\text{ N})\tfrac{4}{5} = +240\text{ N} \qquad F_y = -(300\text{ N})\tfrac{3}{5} = -180\text{ N}$$

e temos

$$\mathbf{F} = (240\text{ N})\mathbf{i} - (180\text{ N})\mathbf{j}$$ ■

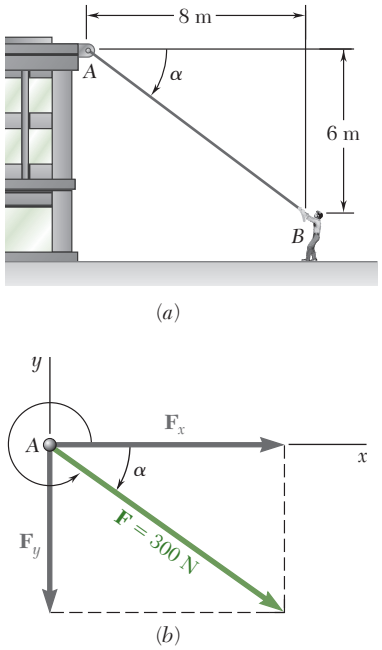


Figura 2.23

Quando a força **F** é definida pelos seus componentes retangulares F_x e F_y (ver Fig. 2.21), o ângulo θ, que define sua direção, pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{2.9}$$

A intensidade *F* da força pode ser obtida aplicando-se o teorema de Pitágoras da seguinte maneira:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2.10}$$

ou resolvendo-se em termos de *F* uma da Eqs. (2.8).

EXEMPLO 3 Uma força $\mathbf{F} = (3.150\text{ N})\mathbf{i} + (6.750\text{ N})\mathbf{j}$ é aplicada a um parafuso *A*. Determine a intensidade da força e o ângulo θ que ela forma com a horizontal.

Primeiro desenhamos um diagrama mostrando os dois componentes retangulares da força e o ângulo θ (Fig. 2.24). A partir da Eq. (2.9), temos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{6.750\text{ N}}{3.150\text{ N}}$$

Usando uma calculadora*, digitamos 6.750 N e dividimos por 3.150 N; calculando o arco tangente do quociente, obtemos $\theta = 65{,}0°$. Resolvendo a segunda das Eqs. (2.8) para *F*, temos:

$$F = \frac{F_y}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{6.750\text{ N}}{\operatorname{sen}65°} = 7.448\text{ N}$$

O último cálculo é facilitado se o valor de F_y for armazenado na memória quando originamente digitado; ele pode, então, ser chamado de volta para ser dividido por sen θ. ■

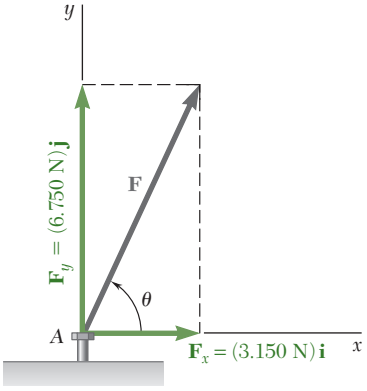


Figura 2.24

* Supõe-se que a calculadora usada tenha teclas para o cálculo de funções trigonométricas e trigonométricas inversas. Algumas calculadoras também têm teclas para conversão direta de coordenadas retangulares em coordenadas polares, e vice-versa. Tais calculadoras eliminam a necessidade de se calcularem funções trigonométricas nos Exemplos 1, 2 e 3 e em problemas do mesmo tipo.

2.8 Adição de forças pela soma dos componentes *x* e *y*

Foi visto na Seção 2.2 que forças devem ser adicionadas de acordo com a lei do paralelogramo. A partir dessa lei, dois outros métodos, mais facilmente aplicáveis a soluções gráficas de problemas, foram apresentados nas Seções 2.4 e 2.5: a regra do triângulo para adição de duas forças e a regra do polígono para adição de três ou mais forças. Foi também visto que o triângulo de forças usado para se definir a resultante de duas forças poderia ser usado para se obter uma solução *trigonométrica*.

Quando três ou mais forças são adicionadas, nenhuma solução trigonométrica prática pode ser obtida do polígono de forças que define a resultante das forças. Nesse caso, uma solução *analítica* do problema pode ser obtida decompondo cada força em dois componentes retangulares. Considere, por exemplo, três forças **P**, **Q** e **S** atuando sobre uma partícula *A* (Fig. 2.25*a*). A resultante **R** delas é definida pela relação:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \tag{2.11}$$

Decompondo cada força em seus componentes retangulares, escrevemos:

$$\begin{aligned} R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} &= P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x)\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\mathbf{j} \end{aligned}$$

de onde temos que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y \tag{2.12}$$

ou, em notação reduzida

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \tag{2.13}$$

Concluímos que os *componentes escalares* R_x *e* R_y *da resultante* **R** *de várias forças que atuem sobre uma partícula são obtidos adicionando-se algebricamente os correspondentes componentes escalares das forças dadas.**

Na prática, a determinação da resultante **R** é feita em três passos, como ilustra a Fig. 2.25. Primeiro as forças dadas mostradas na Fig. 2.25*a* são decompostas em seus componentes *x* e *y* (Fig. 2.25*b*). Adicionando esses componentes, obtemos os componentes *x* e *y* de **R** (Fig. 2.25*c*). Por fim, a resultante $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$ é determinada aplicando-se a lei do paralelogramo (Fig. 2.25*d*). Esse procedimento será mais eficiente se os cálculos forem dispostos em uma tabela. Este é o único método analítico prático para a adição de três ou mais forças, e é também, muitas vezes, preferido em vez da solução trigonométrica, no caso da adição de duas forças.

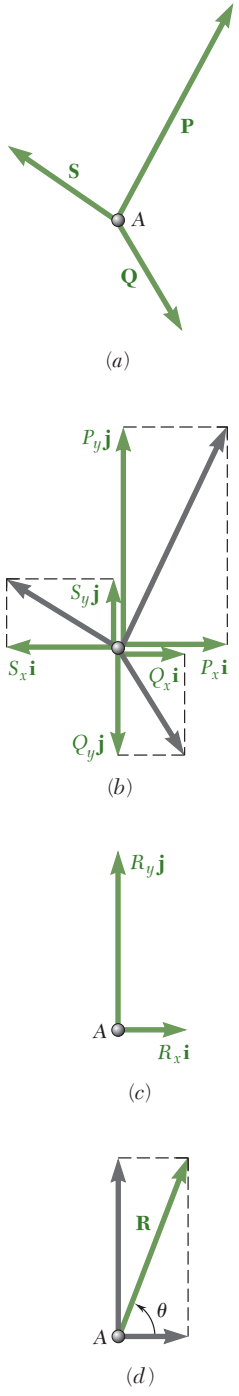
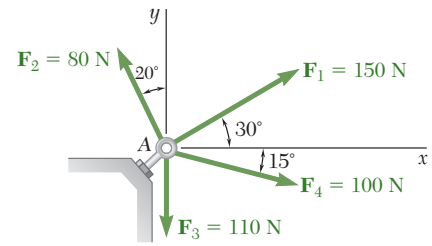


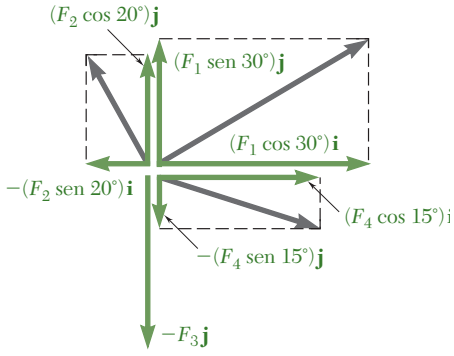
Figura 2.25

* Obviamente, esse resultado também se aplica à adição de outras quantidades vetoriais, tais como velocidades, acelerações ou quantidades de movimento.



PROBLEMA RESOLVIDO 2.3

Quatro forças atuam no parafuso *A*, como mostrado na figura. Determine a resultante das forças no parafuso.



SOLUÇÃO

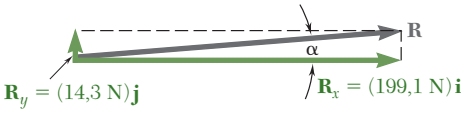
Os componentes *x* e *y* de cada força são determinados por trigonometria como mostra a figura e são inseridos na tabela a seguir. De acordo com a convenção adotada na Seção 2.7, o número escalar que representa o componente da força é positivo se o componente da força tem o mesmo sentido que o eixo coordenado correspondente. Logo, os componentes *x* atuando para a direita e os componentes *y* atuando para cima são representados por números positivos.

Força	Intensidade, N	Componente *x*, N	Componente *y*, N
$\mathbf{F}_1$	150	+129,9	+75,0
$\mathbf{F}_2$	80	−27,4	+75,2
$\mathbf{F}_3$	110	0	−110,0
$\mathbf{F}_4$	100	+96,6	−25,9
		$R_x = +199,1$	$R_y = +14,3$

Então, a resultante **R** das quatro forças é:

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{R} = (199,1\text{ N})\mathbf{i} + (14,3\text{ N})\mathbf{j} \blacktriangleleft$$

A intensidade, a direção e o sentido da resultante podem agora ser determinados. A partir do triângulo mostrado, temos:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14,3\text{ N}}{199,1\text{ N}} \qquad \alpha = 4,1°$$

$$R = \frac{14,3\text{ N}}{\operatorname{sen}\alpha} = 199,6\text{ N} \qquad \mathbf{R} = 199,6\text{ N} \angle 4,1° \blacktriangleleft$$

Com uma calculadora, o último cálculo fica mais fácil se o valor de R_y for armazenado na memória quando digitado pela primeira vez. Depois, poderá ser recuperado e dividido por sen α (ver também a nota de rodapé na página 31.).

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Você viu na seção anterior que a resultante de duas forças pode ser determinada graficamente ou a partir da trigonometria de um triângulo oblíquo.

A. Quando três ou mais forças estão envolvidas, a determinação de sua resultante **R** é feita mais facilmente decompondo-se primeiro cada força em *componentes retangulares*. Dois casos podem ser encontrados, dependendo do modo como cada uma das forças dadas é definida:

Caso 1. A força F é definida por sua intensidade *F* e pelo ângulo α que ela forma com o eixo x. Os componentes x e y da força podem ser obtidos multiplicando-se F por cos α e sen α, respectivamente [Exemplo 1].

Caso 2. A força F é definida por sua intensidade *F* e pelas coordenadas de dois pontos *A* e *B* em sua linha de ação (Fig. 2.23). O ângulo α que **F** forma com o eixo x pode ser determinado primeiro por trigonometria. Entretanto, os componentes de **F** também podem ser obtidos diretamente a partir das proporções entre as várias dimensões envolvidas, sem de fato determinar α [Exemplo 2].

B. Componentes retangulares da resultante. Os componentes R_x e R_y da resultante podem ser obtidos somando-se algebricamente os componentes correspondentes das forças dadas [Problema Resolvido 2.3].

Você pode expressar a resultante *forma vetorial* usando os vetores unitários **i** e **j**, que são direcionados ao longo dos eixos x e y, respectivamente:

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$$

Você também pode determinar a *intensidade, a direção e o sentido* da resultante solucionando o triângulo retângulo de lados R_x e R_y para R e para o ângulo que **R** forma com o eixo x.

PROBLEMAS

2.21 e 2.22 Determine os componentes x e y de cada uma das forças indicadas.

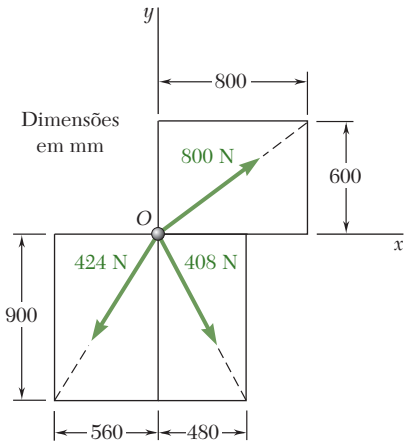


Figura P2.21

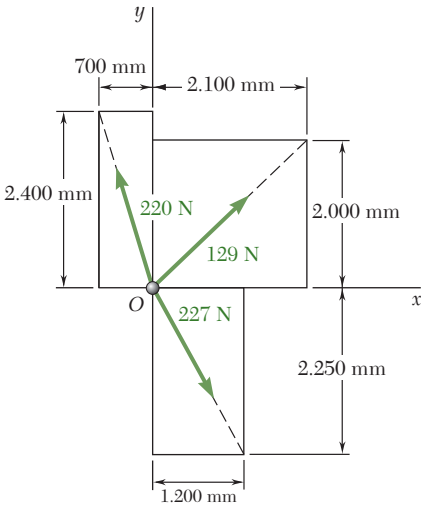


Figura P2.22

2.23 e 2.24 Determine os componentes x e y de cada uma das forças indicadas.

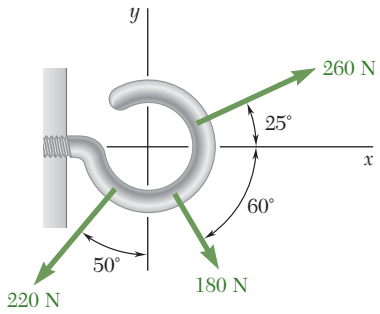


Figura P2.23

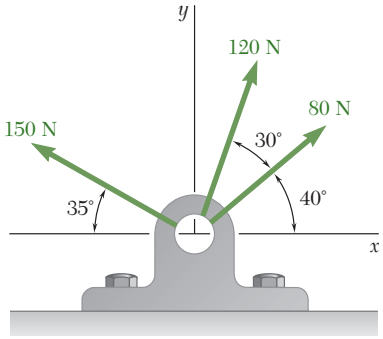


Figura P2.24

2.25 O elemento BD exerce sobre o elemento ABC uma força **P** dirigida ao longo da linha BD. Sabendo que **P** deve ter um componente horizontal de 1330 N, determine (*a*) a intensidade da força **P**, (*b*) sua componente vertical.

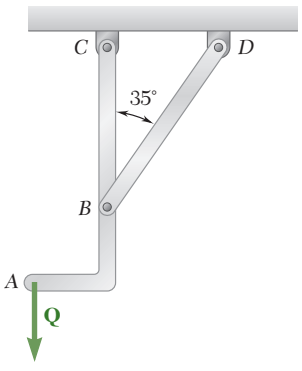


Figura P2.25

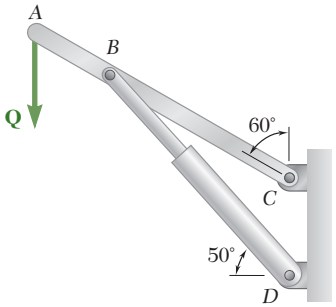


Figura P2.26

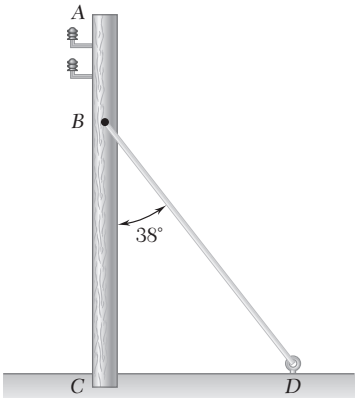


Figura P2.27 e P2.28

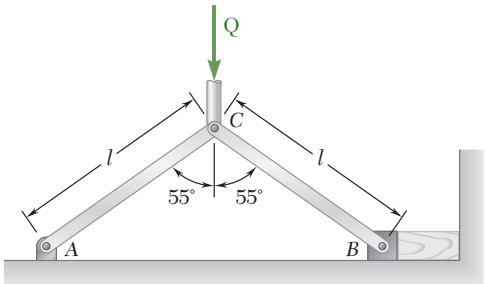


Figura P2.29

2.26 Um cilindro hidráulico *BD* exerce sobre o membro *ABC* uma força **P** dirigida ao longo da linha *BD*. Sabendo que **P** tem um componente perpendicular a *ABC* de 750 N, determine (*a*) a intensidade da força **P**, (*b*) sua componente paralela a *ABC*.

2.27 O cabo de sustentação *BD* exerce no poste telefônico *AC* uma força **P** dirigida ao longo de *BD*. Sabendo que **P** tem uma componente de 120 N perpendicular ao poste *AC*, determine (*a*) a intensidade da força **P**, (*b*) sua componente ao longo da linha *AC*.

2.28 O cabo de sustentação *BD* exerce no poste telefônico *AC* uma força **P** dirigida ao longo de *BD*. Sabendo que **P** tem um componente de 180 N ao longo da linha *AC*, determine (*a*) a intensidade da força **P**, (*b*) sua componente em uma direção perpendicular a *AC*.

2.29 O elemento *CB* de um torno de bancada (morsa) exerce no bloco *B* uma força **P** dirigida ao longo da linha *CB*. Sabendo que **P** tem uma componente horizontal de 1.200 N, determine (*a*) a intensidade da força **P**, (*b*) sua componente vertical.

2.30 O cabo *AC* exerce sobre a viga *AB* a força **P** dirigida ao longo da linha *AC*. Sabendo que **P** tem uma componente vertical de 1.560 N, determine (*a*) a intensidade da força **P**, (*b*) sua componente horizontal.

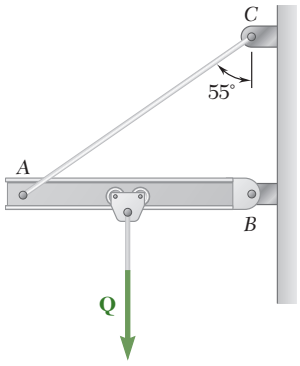


Figura P2.30

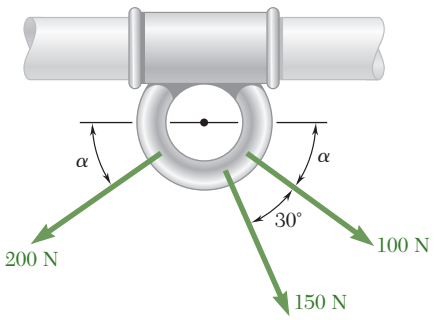


Figura P2.35

2.31 Determine a resultante das três forças do Problema 2.22.

2.32 Determine a resultante das três forças do Problema 2.24.

2.33 Determine a resultante das três forças do Problema 2.23.

2.34 Determine a resultante das três forças do Problema 2.21.

2.35 Sabendo que $\alpha = 35°$, determine a resultante das três forças indicadas.

2.36 Sabendo que a tração no cabo *BC* é 725 N, determine a resultante das três forças exercidas no ponto *B* da viga *AB*.

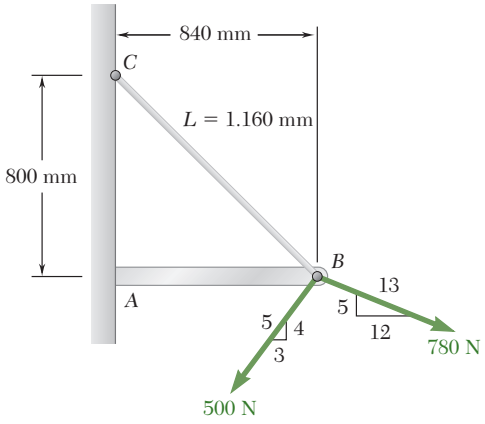


Figura P2.36

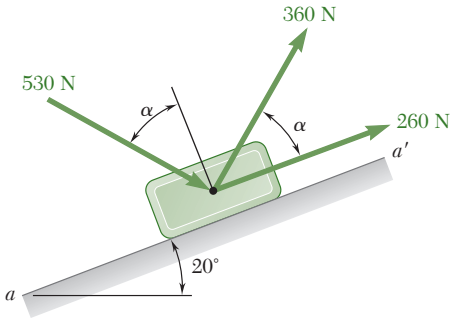


Figura P2.37 e P2.38

2.37 Sabendo que $\alpha = 40°$, determine a resultante das três forças indicadas.

2.38 Sabendo que $\alpha = 75°$, determine a resultante das três forças indicadas.

2.39 Para o anel do Problema 2.35, determine (*a*) o valor necessário de α para que a resultante das forças seja na vertical, (*b*) a correspondente intensidade da resultante.

2.40 Para a viga do Problema 2.36, determine (*a*) a tração necessária no cabo *BC* se a resultante das três forças exercidas no ponto *B* seja vertical, (*b*) a correspondente intensidade da resultante.

2.41 Determine (*a*) a tensão de tração necessária no cabo *AC*, sabendo que a resultante das três forças exercida no ponto *C* da haste *BC* seja ao longo da linha *BC*, (*b*) a correspondente intensidade da resultante.

2.42 Para o bloco dos Problemas 2.37 e 2.38, determine (*a*) o valor necessário de α para que a resultante das três forças mostradas seja paralela ao plano inclinado, (*b*) a correspondente intensidade da resultante.

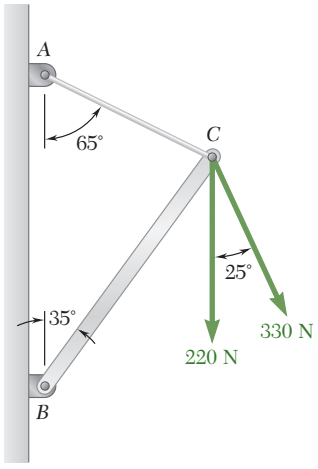


Figura P2.41

2.9 Equilíbrio de uma partícula

Nas seções anteriores, discutimos os métodos para se determinar a resultante de várias forças que atuam sobre uma partícula. Embora isso não tenha ocorrido em nenhum dos problemas considerados até aqui, é perfeitamente possível que a resultante seja zero. Nesse caso, o efeito resultante das forças dadas é nulo, e diz-se que a partícula está em equilíbrio. Temos, então, a seguinte definição: *Quando a resultante de todas as forças que atuam sobre uma partícula é igual a zero, a partícula está em equilíbrio.*

Uma partícula sobre a qual se aplicam duas forças estará em equilíbrio se as duas forças tiverem a mesma intensidade e a mesma linha de ação, mas sentidos opostos. A resultante dessas duas forças é, então, igual a zero. Tal caso é ilustrado na Fig. 2.26.

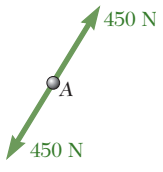


Figura 2.26

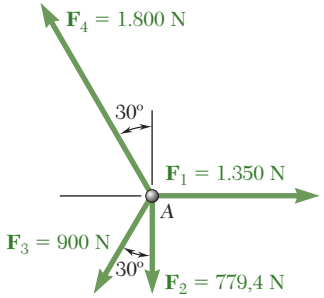


Figura 2.27

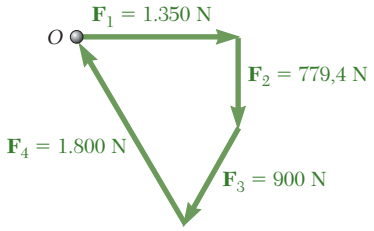


Figura 2.28

Outro caso de equilíbrio de uma partícula é representado na Fig. 2.27, que mostra quatro forças atuando em *A*. Na Fig. 2.28, a resultante das forças dadas é determinada pela regra do polígono. Começando no ponto *O* com $\mathbf{F}_1$ e dispondo as forças no padrão ponta-a-cauda, encontramos que a ponta de $\mathbf{F}_4$ coincide com o ponto inicial *O*. Logo, a resultante **R** do sistema de forças dado é zero e a partícula está em equilíbrio.

O polígono fechado desenhado na Fig. 2.28 fornece uma expressão *gráfica* para o equilíbrio de *A*. Para expressar *algebricamente* as condições de equilíbrio de uma partícula, escrevemos:

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{2.14}$$

Decompondo cada força **F** em componentes retangulares, temos:

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} = 0$$

Concluímos que as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de uma partícula são:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \tag{2.15}$$

Retomando a partícula mostrada na Fig. 2.27, verificamos que as condições de equilíbrio são satisfeitas. Escrevemos

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 1.350\text{ N} - (900\text{ N})\operatorname{sen}30^\circ - (1.800\text{ N})\operatorname{sen}30^\circ\\ &= 1.350\text{ N} - 450\text{ N} - 900\text{ N} = 0\\ \Sigma F_y &= -779{,}4\text{ N} - (900\text{ N})\cos 30^\circ + (1.800\text{ N})\cos 30^\circ\\ &= -779{,}4\text{ N} - 779{,}4\text{ N} + 1.558{,}8\text{ N} = 0\end{aligned}$$

2.10 Primeira lei de Newton do movimento

No fim do século XVII, Sir Isaac Newton formulou três leis fundamentais nas quais se baseia a ciência da mecânica. A primeira dessas leis pode ser enunciada nos seguintes termos:

Se a força resultante que atua sobre uma partícula é nula, a partícula permanecerá em repouso (se originalmente em repouso) ou se moverá à velocidade constante em linha reta (se originalmente em movimento).

Dessa lei e da definição de equilíbrio dada na Seção 2.9, conclui-se que uma partícula em equilíbrio ou está em repouso ou se desloca em linha reta à velocidade constante. Na próxima seção, serão considerados vários problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula.

2.11 Problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula e diagramas de corpo livre

Na prática, um problema de engenharia mecânica é derivado de uma situação física real. Um esboço mostrando as condições físicas do problema é conhecido como *diagrama espacial*.

Os métodos de análise discutidos nas seções precedentes aplicam-se a sistemas de forças que atuam sobre uma partícula. Muitos problemas que envolvem estruturas reais, entretanto, podem ser reduzidos a problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula. Isso é feito escolhendo-se uma partícula significativa e traçando-se um diagrama sepa-

rado mostrando essa partícula e todas as forças que atuam sobre ela. Tal diagrama é denominado *diagrama de corpo livre.*

Como exemplo, considere o caixote de 75 kg mostrado no diagrama espacial da Fig. 2.29*a*. Esse caixote encontra-se entre dois edifícios, e é carregado em um caminhão que irá removê-lo. O caixote é sustentado por um cabo vertical, que está fixado em *A* a duas cordas que passam por roldanas presas aos edifícios em *B* e *C*. Deseja-se determinar a tração em cada uma das cordas *AB* e *AC*.

Para resolver esse problema, deve-se traçar um diagrama de corpo livre mostrando a partícula em equilíbrio. Como estamos interessados nas forças de tração nas cordas, o diagrama de corpo livre deve incluir ao menos uma dessas forças de tração ou, se possível, ambas as forças de tração. Observa-se que o ponto *A* é um bom corpo livre para esse problema. O diagrama de corpo livre do ponto *A* está representado na Fig. 2.29*b*. A figura mostra o ponto *A* e as forças exercidas nele pelo cabo vertical e pelas duas cordas. A força exercida pelo cabo é dirigida para baixo, e sua intensidade é igual ao peso *W* do caixote. Recordando a Eq. (1.4), temos:

$$W = mg = (75\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2) = 736\text{ N}$$

e indicamos esse valor no diagrama de corpo livre. As forças exercidas pelas duas cordas não são conhecidas. Como elas são respectivamente iguais em intensidade às forças de tração na corda *AB* e na corda *AC*, vamos designá-las por $\mathbf{T}_{AB}$ e $\mathbf{T}_{AC}$ e desenhá-las afastando-se de *A* nas direções mostradas no diagrama espacial. Nenhum outro detalhe é incluído no diagrama de corpo livre.

Como o ponto *A* está em equilíbrio, as três forças que atuam sobre ele devem formar um triângulo fechado quando desenhadas no padrão ponta-a-cauda. Esse triângulo de forças foi desenhado na Fig. 2.29*c*. Os valores T_{AB} e T_{AC} das forças de tração nas cordas podem ser encontrados graficamente se o triângulo for desenhado em escala, ou podem ser encontrados por trigonometria. Se for escolhido o último método de solução, usamos a lei dos senos e escrevemos:

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\text{sen } 40^\circ} = \frac{736\text{ N}}{\text{sen } 80^\circ}$$

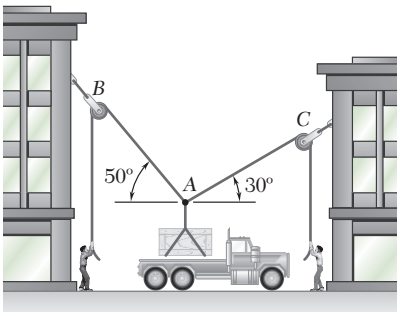
$$T_{AB} = 647\text{ N} \qquad T_{AC} = 480\text{ N}$$

Quando uma partícula está em *equilíbrio sob três forças,* o problema pode ser resolvido desenhando-se um triângulo de forças. Quando a partícula está em *equilíbrio sob mais de três forças,* o problema pode ser resolvido graficamente desenhando-se um polígono de forças. Se desejarmos uma solução analítica, devemos resolver com auxílio das *equações de equilíbrio*, dadas na Seção 2.9:

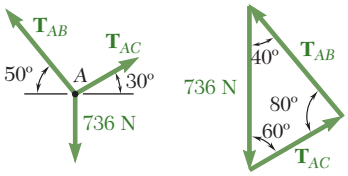
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \tag{2.15}$$

Essas equações podem ser resolvidas para não mais do que *duas incógnitas;* de modo idêntico, o triângulo de forças usado nesse caso de equilíbrio sob três forças pode ser resolvido para duas incógnitas.

Os tipos mais comuns de problemas são aqueles nos quais as duas incógnitas representam (1) os dois componentes (ou a intensidade e a direção) de uma única força, (2) as intensidades de duas forças, cada qual de direção conhecida. Problemas envolvendo a determinação do valor máximo ou mínimo da intensidade de uma força são também encontrados (ver Problemas 2.57 a 2.61).



(*a*) Diagrama espacial



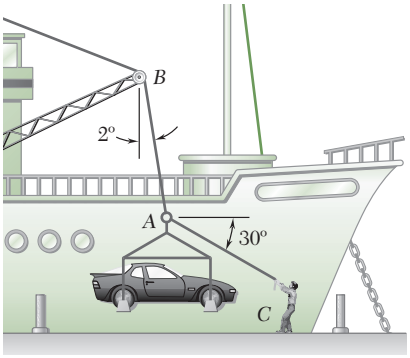
(*b*) Diagrama de corpo livre

(*c*) Triângulo de forças

Figura 2.29

Foto 2.1 Como ilustra o exemplo anterior, é possível determinar as forças de tração nos cabos que sustentam o eixo mostrado tratando o gancho como uma partícula e, então, aplicando as equações de equilíbrio às forças que atuam sobre o gancho.

PROBLEMA RESOLVIDO 2.4



Numa operação de descarregamento de um navio, uma automóvel de 15.750 N é sustentado por um cabo. Uma corda é amarrada ao cabo em A e puxada para pousar o automóvel na posição desejada. O ângulo entre o cabo e a vertical é de 2°, enquanto o ângulo entre a corda e a horizontal é de 30°. Qual é a tração da corda?

SOLUÇÃO

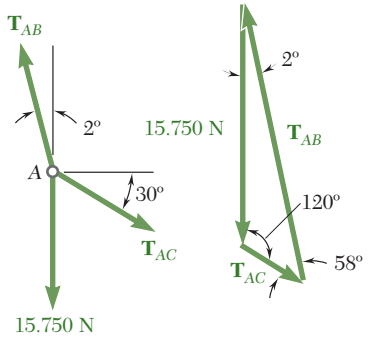


Diagrama de corpo livre. O ponto A é escolhido como um corpo livre, podendo, assim, desenhar o diagrama de corpo livre completo T_{AB} é a tração no cabo AB, e T_{AC} é a tração na corda.

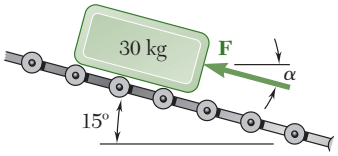
Condição de equilíbrio. Como apenas três forças atuam no corpo livre, desenhamos um triângulo de forças para expressar que o corpo está em equilíbrio. Usando a lei dos senos, temos:

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen } 120°} = \frac{T_{AC}}{\text{sen } 2°} = \frac{15.750 \text{ N}}{\text{sen } 58°}$$

Com uma calculadora, primeiro calculamos e armazenamos na memória o valor do último quociente. Multiplicando-se esse valor sucessivamente por sen 120° e por sen 2°, obtemos

$$T_{AB} = 16.084 \text{ N} \qquad T_{AC} = 648 \text{ N} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 2.5



Determine a intensidade e a direção da menor força **F** que irá manter em equilíbrio a embalagem mostrada na figura. Observe que a força exercida pelos roletes a embalagem é perpendicular ao plano inclinado.

SOLUÇÃO

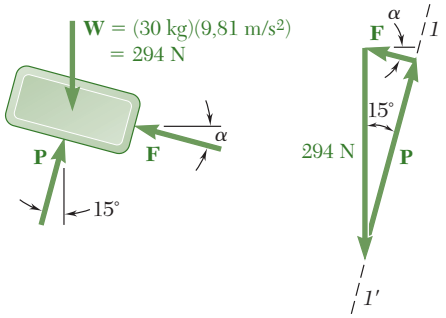


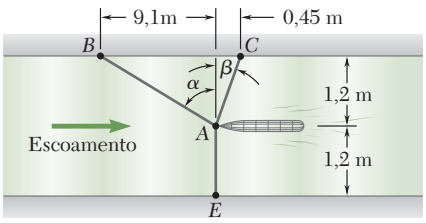
Diagrama de corpo livre. Escolhemos o pacote como um corpo livre, supondo que ele pode ser tratado como uma partícula. Desenhamos o diagrama de corpo livre correspondente.

Condição de equilíbrio. Como apenas três forças atuam no corpo livre, desenhamos um triângulo de forças para expressar que o corpo está em equilíbrio. A linha *1-1′* representa a direção conhecida de **P**. Para obter o valor mínimo da força **F**, escolhemos a direção de **F** perpendicular à de **P**. Da geometria do triângulo obtido, encontramos:

$$F = (294 \text{ N}) \text{ sen } 15° = 76{,}1 \text{ N} \qquad \alpha = 15°$$

$$\mathbf{F} = 76{,}1 \text{ N} \measuredangle 15° \blacktriangleleft$$

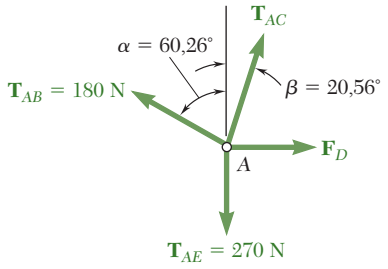
2.1 ou 9.1?



PROBLEMA RESOLVIDO 2.6

Como parte do projeto de um novo baco a vela, deseja-se determinar a força de arrasto que pode ser esperada a uma dada velocidade. Para tal, é colocado um modelo do casco proposto em um canal de teste e são usados três cabos para manter sua proa na linha do centro do canal. Leituras do dinamômetro indicam que, para uma dada velocidade, a tração é de 180 N no cabo *AB* e de 270 N no cabo *AE*. Determine a força de arrasto exercida no casco e a tração no cabo *AC*.

SOLUÇÃO



Determinação dos ângulos. Primeiro, determinam-se os ângulos α e β que definem as direções dos cabos *AB* e *AC*. Temos:

Tg a=9,1/1,2 ?

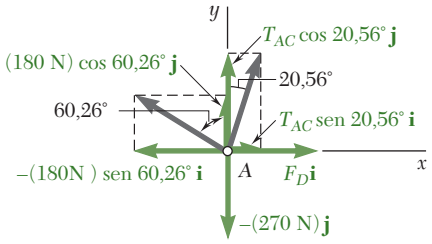
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2{,}1\text{ m}}{1{,}2\text{ m}} = 1{,}75 \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{0{,}45\text{ m}}{1{,}2\text{ m}} = 0{,}375$$

$$\alpha = 60{,}26° \qquad \beta = 20{,}56°$$

Diagrama de corpo livre. Escolhendo o casco como um corpo livre, desenhamos o diagrama de corpo livre mostrado. Esse inclui as forças exercidas pelos três cabos sobre o casco, assim como a força de arrasto $\mathbf{F}_D$ exercida pelo escoamento.

Condição de equilíbrio. Expressamos que o casco está em equilíbrio escrevendo que a resultante de todas as forças é zero:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = 0 \qquad (1)$$



Como mais de três forças estão envolvidas, decompomos as forças em componente *x* e *y*:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{AB} &= -(180\text{ N})\operatorname{sen}60{,}26°\mathbf{i} + (180\text{ N})\cos 60{,}26°\mathbf{j} \\
&= -(156{,}29\text{ N})\mathbf{i} + (89{,}29\text{ N})\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AC} &= T_{AC}\operatorname{sen}20{,}56°\mathbf{i} + T_{AC}\cos 20{,}56°\mathbf{j} \\
&= 0{,}3512T_{AC}\mathbf{i} + 0{,}9363T_{AC}\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AE} &= -(270\text{ N})\mathbf{j} \\
\mathbf{F}_D &= F_D\mathbf{i}
\end{aligned}$$

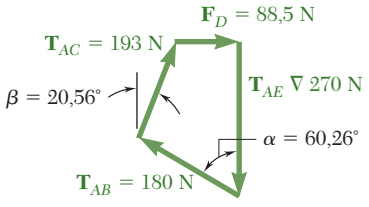
Substituindo as expressões obtidas na Eq. (1) e fatorando os vetores unitários **i** e **j**, temos:

$$(-156{,}29\text{ N} + 0{,}3512T_{AC} + F_D)\mathbf{i} + (89.29\text{ N} + 0.9363T_{AC} - 270\text{ N})\mathbf{j} = 0$$

Essa equação será satisfeita se, e somente se, os coeficientes de **i** e **j** forem iguais a zero. Obtemos, então, duas equações de equilíbrio mostradas a seguir, que expressam, respectivamente, que a soma dos componentes x e a soma dos componentes *y* das forças dadas devem ser iguais a zero.

$$(\Sigma F_x = 0:) \qquad -156{,}29\text{ N} + 0{,}3512T_{AC} + F_D = 0 \qquad (2)$$

$$(\Sigma F_y = 0:) \qquad 89{,}29\text{ N} + 0{,}9363T_{AC} - 270\text{ N} = 0 \qquad (3)$$



A partir da Eq. (3), encontramos $T_{AC} = +193\text{ N}$ ◀

e, substituindo esse valor em Eq. (2), $F_D = +88{,}5\text{ N}$ ◀

Ao traçarmos o diagrama de corpo livres, pressupomos um sentido para cada força desconhecida. O sinal positivo na resposta indica que o sentido proposto está correto. O polígono de forças completo pode ser esquematizado para se verificar os resultados.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando uma partícula está em *equilíbrio*, a resultante das forças que atuam sobre a partícula tem que ser zero. Ao expressar esse fato para uma partícula sob a ação de *forças coplanares*, obtêm-se duas relações entre essas forças. Como vimos nos problemas resolvidos anteriores, essas relações podem ser usadas para se determinar duas incógnitas, tais como a intensidade e a direção de uma força ou as intensidades de duas forças.

Traçar um diagrama de corpo livre é o primeiro passo na solução de um problema que envolva o equilíbrio de uma partícula. Esse diagrama representa a partícula e todas as forças que atuam sobre ela. Indique no seu diagrama de corpo livre as intensidades das forças conhecidas, bem como qualquer ângulo ou dimensões que definam a direção de uma força. Qualquer intensidade ou ângulo desconhecido deve ser representado por um símbolo apropriado. Nada mais deve ser incluído no diagrama de corpo livre.

Traçar um diagrama de corpo livre claro e preciso é fundamental na solução de qualquer problema de equilíbrio. Se saltar esse passo, você pode economizar lápis e papel, mas muito provavelmente chegue a uma solução errada.

Caso 1. Se apenas três forças estão envolvidas no diagrama de corpo livre, o restante da solução é mais bem executado traçando-se essas forças pelo padrão ponta-a-cauda para formar um *triângulo de forças*. Esse triângulo pode ser resolvido graficamente ou por trigonometria, desde que não haja mais do que duas incógnitas [Problemas Resolvidos 2.4 e 2.5].

Caso 2. Se mais de três forças estão envolvidas, é mais vantajoso usar uma *solução analítica*. Comece selecionando eixos x e y apropriados e decomponha cada uma das forças mostradas no diagrama de corpo livre em componentes x e y. Expressando que a soma dos componentes x e a soma dos componentes y de todas as forças são ambas iguais a zero, obterá duas equações que podem ser resolvidas para no máximo duas incógnitas [Problema Resolvido 2.6].

É fortemente recomendado que, quando se adota uma solução analítica, as equações de equilíbrio sejam escritas na mesma forma que as Eqs. (2) e (3) do Problema Resolvido 2.6. A prática, adotada por alguns estudantes, de colocar inicialmente as incógnitas no lado esquerdo da equação e as quantidades conhecidas no lado direito, pode levar à confusão na atribuição do sinal apropriado a cada termo.

Observamos que, independentemente do método empregado para resolver um problema de equilíbrio bidimensional, é possível determinar no máximo duas incógnitas. Se um problema bidimensional envolve mais de duas incógnitas, uma ou mais relações adicionais têm que ser obtidas a partir da informação contida no enunciado do problema.

PROBLEMAS

2.43 Dois cabos estão ligados em *C* e são carregados como mostra a figura. Sabendo que $\alpha = 20°$, determine a tração (*a*) no cabo *AC* e (*b*) no cabo *BC*.

2.44 Dois cabos estão ligados em *C* e são carregados como mostra a figura. Determine a tração (*a*) no cabo *AC* e (*b*) no cabo *BC*.

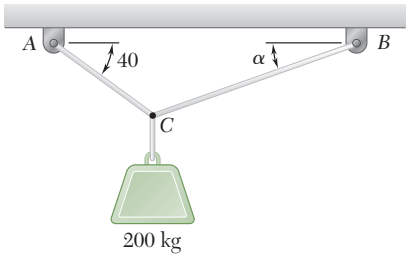


Figura P2.43

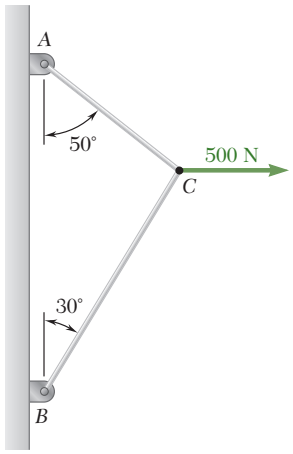


Figura P2.44

2.45 Dois cabos estão ligados em *C* e são carregados como mostra a figura. Sabendo que **P** = 500 N e $\alpha = 60°$, determine a tração (*a*) no cabo *AC* e (*b*) no cabo *BC*.

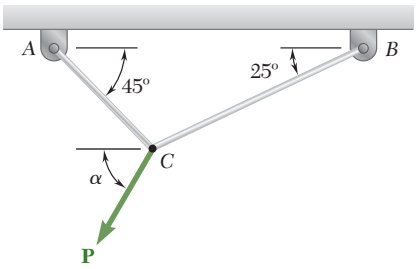


Figura P2.45

2.46 Dois cabos estão ligados em C e são carregados como mostra a figura. Determine a tração (*a*) no cabo *AC* e (*b*) no cabo *BC*.

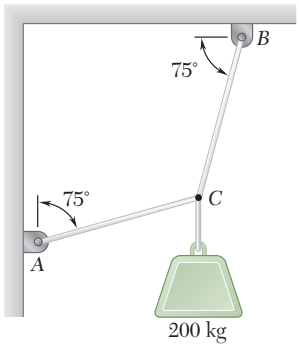


Figura P2.46

2.47 Sabendo que $\alpha = 20°$, determine a tração (*a*) no cabo *AC* e (*b*) na corda *BC*.

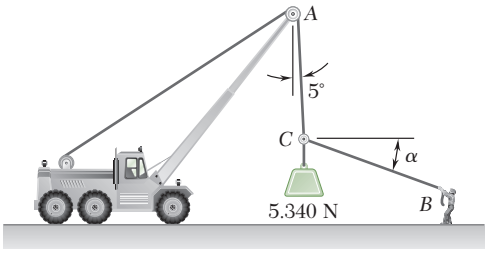


Figura P2.47

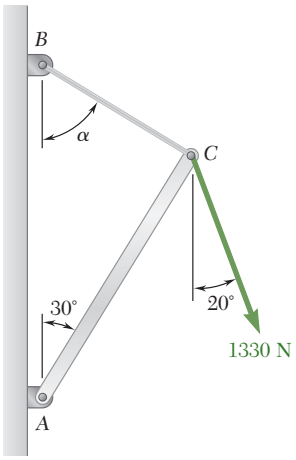


Figura P2.48

2.48 Sabendo que $\alpha = 55°$ e que a haste *AC* exerce no pino *C* uma força dirigida ao longo da linha *AC*, determine (*a*) a intensidade dessa força e (*b*) a tração no cabo *BC*.

2.49 Duas forças **P** e **Q** são aplicadas tal como mostra a figura a uma conexão de uma aeronave. Sabendo que a conexão está em equilíbrio e que $P = 2.220$ N e $Q = 2.890$ N, determine as intensidades das forças exercidas nas barras *A* e *B*.

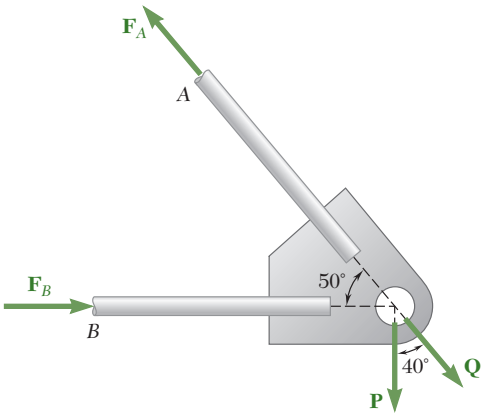


Figura P2.49 e P2.50

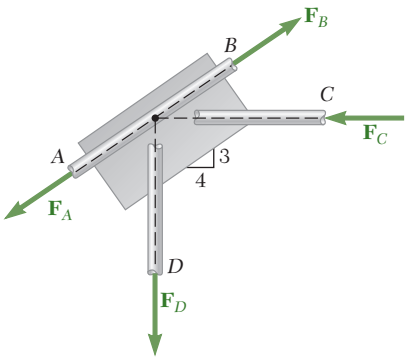


Figura P2.51 e P2.52

2.50 Duas forças **P** e **Q** são aplicadas tal como mostra a figura a uma conexão de uma aeronave. Sabendo que a conexão está em equilíbrio e as intensidades das forças exercidas nas barras *A* e *B* são $F_A = 3330$ N e $F_B = 1.780$ N, determine as intensidades das forças **P** e **Q**.

2.51 Uma conexão soldada está em equilíbrio sob a ação de quatro forças como mostra a figura. Sabendo que $F_A = 8$ kN e $F_B = 16$ kN, determine as intensidades das outras duas forças.

2.52 Uma conexão soldada está em equilíbrio sob a ação de quatro forças como mostra a figura. Sabendo que $F_A = 5$ kN e $F_D = 6$ kN, determine as intensidades das outras duas forças.

2.53 Dois cabos ligados em C estão carregados como mostra a figura. Sabendo que $Q = 266$ N, determine a tensão (a) no cabo AC, (b) no cabo BC.

2.54 Dois cabos ligados em C estão carregados como mostra a figura. Determine o valor de Q de forma que a tensão não exceda 226 N em nenhum dos cabos.

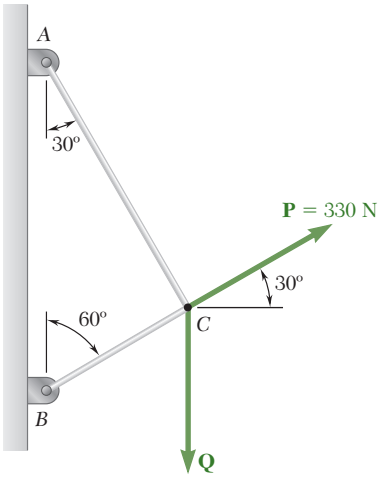


Figura P2.53 e *P2.54*

2.55 Um marinheiro foi resgatado usando uma cadeira de contramestre suspensa por uma roldana que pode se movimentar livremente suportada pelo cabo ACB e é puxada com velocidade constante pelo cabo CD. Sabendo que $\alpha = 30°$ e $\beta = 10°$ e que a cadeira de contramestre e o marinheiro juntos é 900 N, determine a tensão (a) suportada pelo cabo ACB, (b) pelo cabo de tração CD.

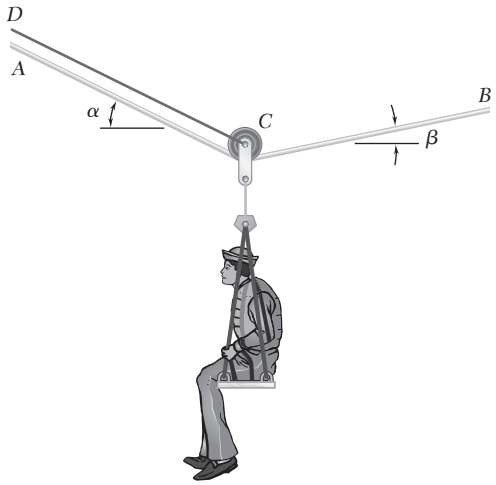


Figura P2.55 e P2.56

2.56 Um marinheiro foi resgatado usando uma cadeira de contramestre suspensa por uma roldana que pode se movimentar livremente suportada pelo cabo ACB e é puxada com velocidade constante pelo cabo CD. Sabendo que $\alpha = 25°$ e $\beta = 15°$ e que a tensão no cabo CD é 80 N, determine (a) o peso da cadeira de contramestre e do marinheiro, (b) a tensão suportada pelo cabo ACB.

2.57 Para os cabos do Problema 2.45, sabe-se que a máxima tensão admissível é de 600 N no cabo AC e 750 N no cabo BC. Determine (a) a máxima força $\mathbf{P}$ que pode ser aplicada em C, (b) o correspondente valor de α.

2.58 Para a situação descrita na Fig. P2.47, determine (a) o valor de α para que a tensão na corda BC seja a menor possível, (b) o valor correspondente dessa tensão.

2.59 Para a estrutura carregada do Problema 2.48, determine (a) o valor de α para que a tensão no cabo BC seja a menor possível, (b) o valor correspondente dessa tensão.

2.60 Sabendo que as porções AC e BC do cabo ACB devem ser iguais, determine o menor comprimento de cabo que pode ser usado para suportar a carga mostrada se a tração no cabo não puder exceder 870 N.

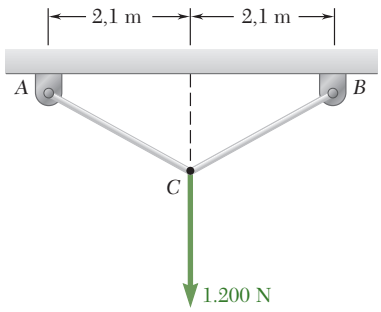


Figura P2.60

2.61 Dois cabos ligados em *C* são carregados como mostra a figura. Sabendo que a tração máxima admissível em cada cabo é de 800 N, determine (*a*) a maior intensidade da força **P** que pode ser aplicada em *C*, (*b*) o correspondente valor de α.

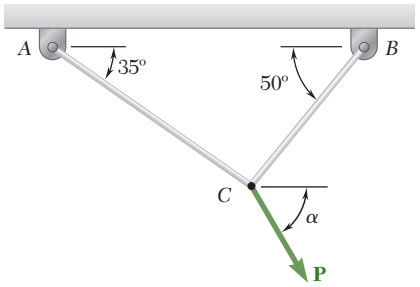


Figura P2.61 e P2.62

2.62 Dois cabos ligados em *C* são carregados como mostra a figura. Sabendo que a tração máxima admissível é 1.200 N no cabo *AC* e 600 N no cabo *BC*, determine (*a*) a maior intensidade da força **P** que pode ser aplicada em *C*, (b) o correspondente valor de α.

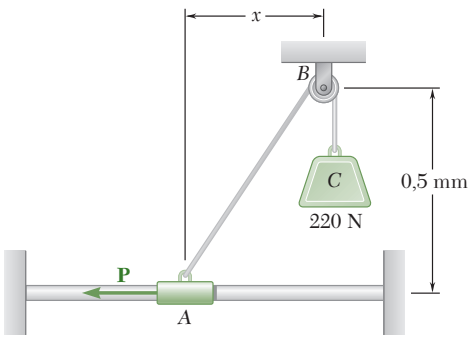


Figura P2.63 e *P2.64*

2.63 O cursor *A* é ligado a uma carga de 220 N e pode deslizar sem atrito sobre a barra horizontal. Determine a intensidade da força **P** para que haja equilíbrio do cursor quando (*a*) $x = 0{,}1$ m, (*b*) $x = 0{,}4$ m.

2.64 O cursor *A* é ligado a uma carga de 220 N e pode deslizar sem atrito sobre a barra horizontal. Determine a distância x para que o cursor esteja em equilíbrio quando $P = 210$ N.

2.65 Um peso cuja massa é 160 kg é sustentado pelo sistema de corda e roldana mostrado na figura. Sabendo que $\beta = 20°$, determine a intensidade, a direção e o sentido da força **P** que deve ser exercida no lado livre da corda para se manter o equilíbrio. (*Dica*: A tensão na corda é a mesma em cada lado para uma roldana simples. Isto será provado no Cap. 4).

2.66 Um peso cuja massa é 160 kg é sustentado pelo sistema de corda e roldana mostrado na figura. Sabendo que $\alpha = 20°$, determine (*a*) o ângulo β, (*b*) a intensidade que a força **P** é exercida no lado livre da corda para se manter o equilíbrio. (Ver a dica do Problema 2.65.)

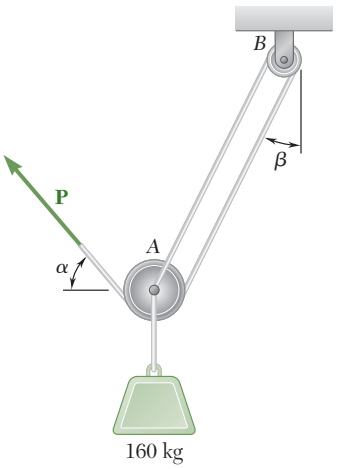


Figura P2.65 e *P2.66*

2.67 Um caixote de 2.670 N é sustentado por vários sistemas de corda e roldana como mostra a figura. Determine para cada caso a tração na corda. (Ver a dica do Problema 2.65.)

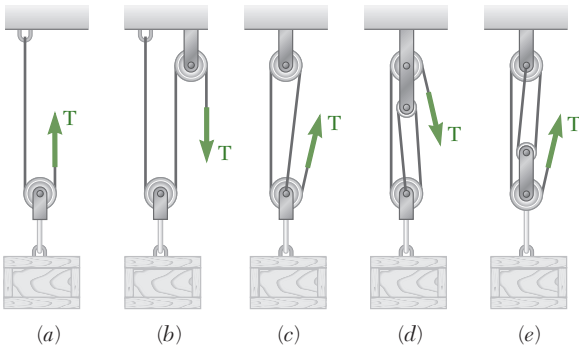


Figura P2.67

2.68 Solucione as partes *b* e *d* do Problema 2.67 considerando que o lado livre da corda está preso ao caixote.

2.69 Uma carga **Q** é aplicada à roldana *C*, que pode rolar no cabo *ACB*. A roldana é segura na posição mostrada por um segundo cabo *CAD*, que passa pela roldana *A* e sustenta uma carga **P**. Sabendo que $P = 750$ N, determine (*a*) a tração no cabo *ACB*, (*b*) a intensidade da carga **Q**.

2.70 Uma carga Q de 1.800 N é aplicada à roldana *C*, que pode rolar no cabo *ACB*. A roldana é segura na posição mostrada por um segundo cabo *CAD*, que passa pela roldana *A* e sustenta uma carga **P**. Determine (*a*) a tração no cabo *ACB*, (*b*) a intensidade da carga **P**.

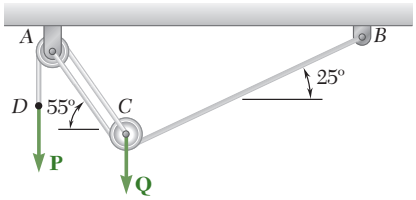


Figura P2.69 e P2.70

FORÇAS NO ESPAÇO

2.12 Componentes retangulares de uma força no espaço

Os problemas considerados na primeira parte deste capítulo envolveram somente duas dimensões; podem ser formulados e solucionados em um único plano. Nesta seção e nas seções restantes deste capítulo, vamos discutir problemas que envolvem as três dimensões do espaço.

Considere a força **F** atuando na origem *O* do sistema de coordenadas retangulares *x*, *y*, *z*. Para definir a direção de **F**, traçamos o plano vertical *OBAC* contendo **F** (Fig. 2.30*a*). Esse plano passa pelo eixo vertical *y*; sua orientação é definida pelo ângulo ϕ que ele forma com o plano *xy*. A direção de **F** no plano é definida pelo ângulo θ_y que **F** forma com o eixo *y*. A força **F** pode ser decomposta em um componente vertical $\mathbf{F}_y$ e um componente horizontal $\mathbf{F}_h$; essa operação, mostrada na Fig. 2.30*b*, é feita no plano *OBAC* de acordo com as regras desenvolvidas na primeira parte do capítulo. Os componentes escalares correspondentes são:

$$F_y = F\cos\theta_y \qquad F_h = F\,\text{sen}\,\theta_y \tag{2.16}$$

Mas $\mathbf{F}_h$ pode ser decomposta em dois componentes retangulares, $\mathbf{F}_x$, e $\mathbf{F}_z$ ao longo dos eixos *x* e *z*, respectivamente. Essa operação, mostrada na Fig. 2.30*c*, é feita no plano *xz*. Obtemos as seguintes expressões para os componentes escalares correspondentes:

$$\begin{aligned} F_x &= F_h\cos\phi = F\,\text{sen}\,\theta_y\cos\phi \\ F_z &= F_h\,\text{sen}\,\phi = F\,\text{sen}\,\theta_y\,\text{sen}\,\phi \end{aligned} \tag{2.17}$$

A força **F** dada foi então decomposta em três componentes retangulares vetoriais $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ e $\mathbf{F}_z$, que estão dirigidos ao longo dos três eixos coordenados.

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos *OAB* e *OCD* da Fig. 2.30, escrevemos:

$$\begin{aligned} F^2 &= (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2 \\ F_h^2 &= (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2 \end{aligned}$$

Eliminando F_h^2 dessas duas equações e resolvendo para *F*, obtemos a seguinte relação entre a intensidade de **F** e seus componentes retangulares escalares:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{2.18}$$

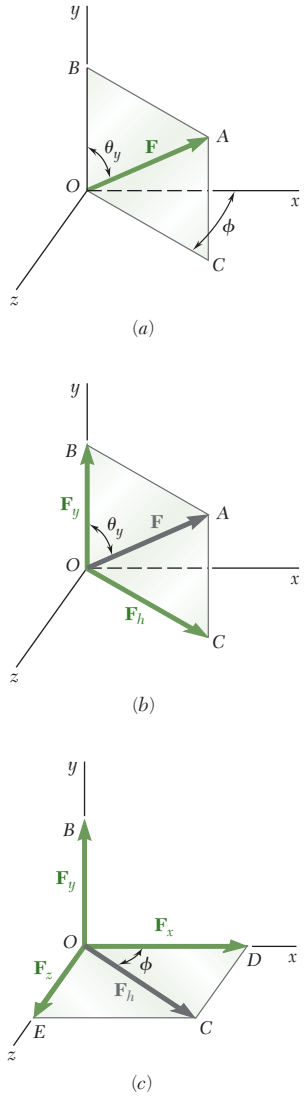


Figura 2.30

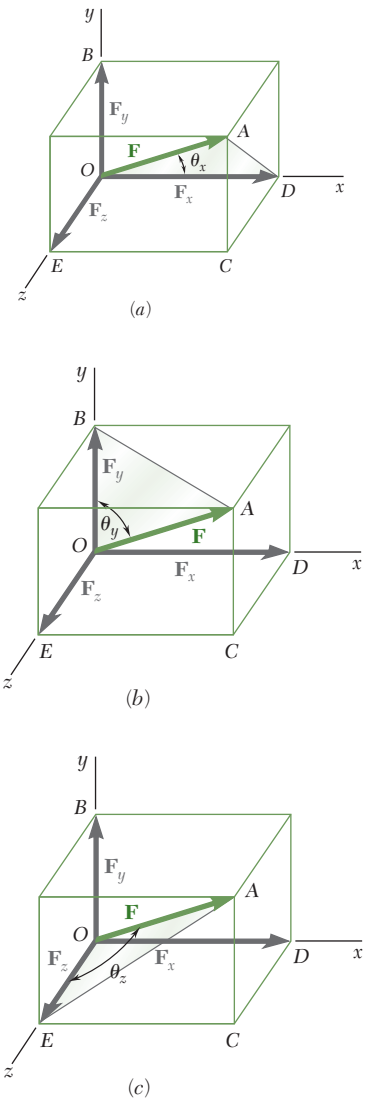


Figura 2.31

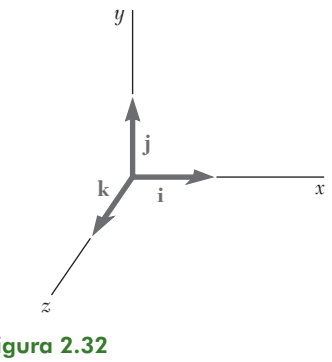


Figura 2.32

A relação existente entre a força **F** e seus três componentes $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ e $\mathbf{F}_z$ é mais facilmente visualizada se uma "caixa" tendo $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ e $\mathbf{F}_z$ como arestas for desenhada tal como mostra a Fig. 2.31. A força **F** é então representada pela diagonal *OA* dessa caixa. A Fig. 2.31*b* mostra o triângulo retângulo *OAB* usado para se deduzir a primeira das expressões (2.16): $F_y = F \cos \theta_y$. Nas Figs. 2.31*a* e *c*, foram também desenhados outros dois triângulos retângulos: *OAD* e *OAE*. Nota-se que esses triângulos ocupam na caixa posições comparáveis à do triângulo *OAB*. Representando por θ_x e θ_z, respectivamente, os ângulos que **F** forma com os eixos *x* e *z*, podemos deduzir duas expressões similares a $F_y = F \cos \theta_y$. Escrevemos então:

$$F_x = F \cos \theta_x \qquad F_y = F \cos \theta_y \qquad F_z = F \cos \theta_z \tag{2.19}$$

Os três ângulos θ_x, θ_y, θ_z definem a direção da força **F**; eles são mais comumente usados para essa finalidade do que os ângulos θ_y e ϕ apresentados no início desta seção. Os cossenos de θ_x, θ_y, θ_z são conhecidos como *cossenos diretores* da força **F**.

Introduzindo os vetores unitários **i, j** e **k**, dirigidos respectivamente ao longo dos eixos *x*, *y* e *z* (Fig. 2.32), podemos expressar **F** na forma:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} - F_z\mathbf{k} \tag{2.20}$$

na qual os componentes escalares F_x, F_y e F_z são definidos pelas relações (2.19).

EXEMPLO 1 Uma força de 500 N forma ângulos de 60°, 45° e 120°, respectivamente, com o eixos *x*, *y* e *z*. Encontre os complementos F_x e F_y, F_z dessa força.

Substituindo $F = 500$ N, $\theta_x = 60°$, $\theta_y = 45°$, $\theta_z = 120°$ nas fórmulas (2.19), escrevemos

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60° = +250 \text{ N}$$
$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45° = +354 \text{ N}$$
$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120° = -250 \text{ N}$$

Aplicando na Eq. (2.20) os valores obtidos para os componentes escalares de **F**, temos:

$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

Assim como no caso de problemas bidimensionais, um sinal positivo indica que o componente tem o mesmo sentido que o eixo correspondente e um sinal negativo, que ele tem sentido oposto. ■

O ângulo que a força **F** forma com um eixo deve ser medido a partir do lado positivo do eixo e será sempre entre 0 e 180°. Um ângulo θ_x menor que 90° (agudo) indica que **F** (cuja origem supõe-se que seja em *O*) está no mesmo lado do plano *yz* como o eixo *x* positivo; cos θ_x e F_x serão, então, positivos. Um ângulo θ_x maior que 90° (obtuso) indica que **F** está no outro lado do plano *yz*; cos θ_x e F_x serão, então, negativos. No Exemplo 1 os ângulos θ_x e θ_y são agudos, enquanto θ_z é obtuso: consequentemente, F_x e F_y são positivos, enquanto F_z é negativo.

Substituindo em (2.20) as expressões obtidas por F_x, F_y, F_z em (2.19), escrevemos

$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}) \tag{2.21}$$

mostrando que a força **F** pode ser expressa como o produto do escalar F pelo vetor:

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k} \tag{2.22}$$

Obviamente, o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor cuja intensidade é igual a 1 e cuja direção e sentido são os mesmo que os de **F** (Fig. 2.33). O vetor $\boldsymbol{\lambda}$ é denominado *vetor unitário* ao longo da linha de ação de **F**. A partir da Eq. (2.22), os componentes do vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ são respectivamente iguais aos cossenos que orientam a linha de ação de **F**:

$$\boldsymbol{\lambda}_x = \cos\theta_x \qquad \boldsymbol{\lambda}_y = \cos\theta_y \qquad \boldsymbol{\lambda}_z = \cos\theta_z \tag{2.23}$$

Deve-se observar que os valores dos três ângulos θ_x, θ_y, θ_z não são independentes. Lembrando que a soma dos quadrados dos componentes de um vetor é igual ao quadrado da sua intensidade, temos:

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

ou, substituindo os valores de $\boldsymbol{\lambda}_x$, $\boldsymbol{\lambda}_y$, $\boldsymbol{\lambda}_z$ a partir de (2.23),

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \tag{2.24}$$

No Exemplo 1, por exemplo, quando os valores $\theta_x = 60°$ e $\theta_y = 45°$ foram selecionados, o valor de θ_z *deve* ser igual a 60° ou 120°, para poder satisfazer a identidade (2.24).

Quando os componentes F_x, F_y, F_z de uma força **F** são dados, a intensidade F da força é obtida de (2.18). *Podem-se, então, resolver as relações (2.19) para os cossenos diretores

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \tag{2.25}$$

e determinar os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que caracterizam a direção de **F**.

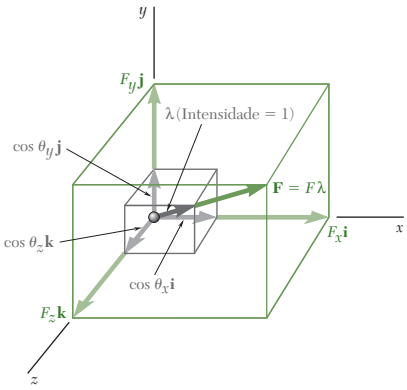


Figura 2.33

EXEMPLO 2 A força **F** tem os componentes $F_x = 90$ N, $F_y = -135$ N, $F_z = 270$ N. Determine sua intensidade F e os ângulos θ_x, θ_y, θ_z que essa força forma com eixos coordenados.

Da fórmula (2.18), obtemos:*

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(90\text{ N})^2 + (-135\text{ N})^2 + (270\text{ N})^2} \\ &= \sqrt{99.225\text{ N}} = 315\text{ N} \end{aligned}$$

* Com uma calculadora programada para converter coordenadas retangulares em coordenadas polares, será mais fácil calcular F pelo seguinte procedimento: primeiro, determine F_h a partir de seus dois componentes retangulares F_x e F_z (Fig. 2.30*c*); depois, determine F a partir de seus dois componentes retangulares F_h e F_y (Fig. 2.30*b*). A verdadeira ordem em que os três componentes F_x, F_y, e F_z são considerados é irrelevante.

Substituindo os valores dos componentes e a intensidade de **F** nas Eqs. (2.25), temos:

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{90\text{ N}}{315\text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-135\text{ N}}{315\text{ N}} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{270\text{ N}}{315\text{ N}}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco cosseno, obtemos:

$$\theta_x = 73{,}4° \qquad \theta_y = 115{,}4° \qquad \theta_z = 31{,}0°$$

Esses cálculos podem ser feitos facilmente com uma calculadora. ■

2.13 Força definida por sua intensidade e por dois pontos em sua linha de ação

Em muitas aplicações, a direção de uma força **F** é definida pela coordenada de dois pontos, $M(x_1, y_1, z_1)$ e $N(x_2, y_2, z_2)$, localizados em sua linha de ação (Fig. 2.34). Considere o vetor $\overrightarrow{MN}$ ligando M e N e de mesmo sentido que **F**. Representando seus componentes escalares por d_x, d_y e d_z, respectivamente, temos:

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \tag{2.26}$$

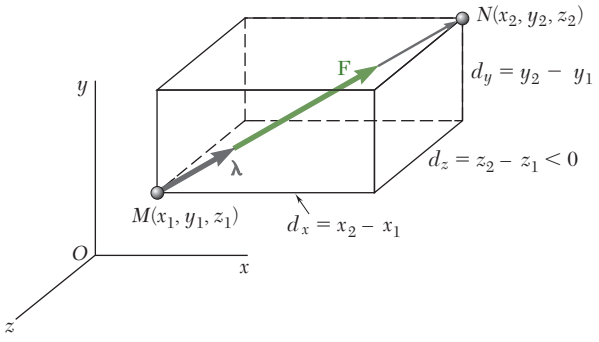


Figura 2.34

O vetor unitário **λ** ao longo da linha de ação de **F** (i.e., ao longo da linha MN) pode ser obtido dividindo-se o vetor $\overrightarrow{MN}$ por sua intensidade MN. Substituindo por $\overrightarrow{MN}$ de (2.26) e observando que MN é igual à distância d de M a N, resultará:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \tag{2.27}$$

Lembrando que **F** é igual ao produto de F e **λ**, temos:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \tag{2.28}$$

do qual segue-se que os componentes escalares de **F** são, respectivamente:

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \tag{2.29}$$

As relações de (2.29) simplificam consideravelmente a determinação dos componentes de uma força **F** de uma dada intensidade F quando a linha de ação de **F** é definida por dois pontos M e N. Subtraindo as coordenadas de M das coordenadas de N, primeiro determinamos os componentes do vetor $\overrightarrow{MN}$ e a distância d de M a N:

$$d_x = x_2 - x_1 \qquad d_y = y_2 - y_1 \qquad d_z = z_2 - z_1$$
$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Substituindo F e d_x, d_y, d_z e d nas relações de (2.29), obtemos os componentes F_x, F_y e F_z da força.

Os ângulos θ_x, θ_y, θ_z que **F** forma com os eixos coordenados podem então ser obtidos das Eqs. (2.25). Comparando as Eqs. (2.22) e (2.27), podemos também escrever

$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \qquad \cos\theta_y = \frac{d_y}{d} \qquad \cos\theta_z = \frac{d_z}{d} \tag{2.30}$$

e determinar os ângulos θ_x, θ_y, θ_z diretamente dos componentes e da intensidade do vetor $\overrightarrow{MN}$.

2.14 Adição de forças concorrentes no espaço

A resultante **R** de duas ou mais forças no espaço será determinada somando-se seus componentes retangulares. Métodos gráficos ou trigonométricos geralmente não são práticos no caso de forças no espaço.

O método que será apresentado a seguir é similar àquele usado na Seção 2.8, para forças coplanares. Fazendo

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$$

decompomos cada força em seus componentes retangulares e escrevemos:

$$\begin{aligned} R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} &= \Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \\ &= (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k} \end{aligned}$$

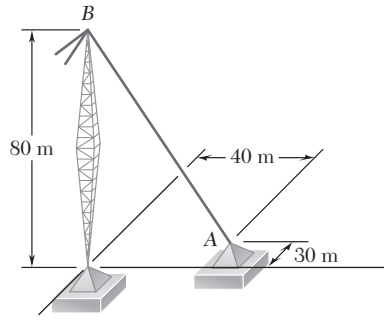
de onde se conclui que

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \tag{2.31}$$

A intensidade da resultante e os ângulos θ_x, θ_y, θ_z que a resultante forma com os eixos coordenados são obtidos por meio do método discutido na Seção 2.12. Escrevemos:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{2.32}$$

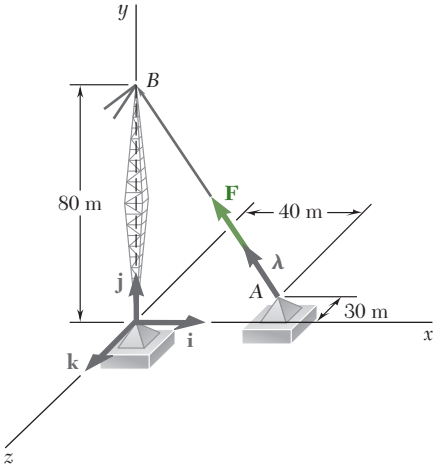
$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \qquad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R} \tag{2.33}$$



PROBLEMA RESOLVIDO 2.7

Um cabo de sustentação de uma torre está ancorado por meio de um parafuso em A. A tração no cabo é 2.500 N. Determine (*a*) os componentes F_x, F_y, F_z da força que atua sobre o parafuso e (*b*) os ângulos θ_x, θ_y, θ_z que definem a direção da força.

SOLUÇÃO



a. Componentes da força. A linha de ação da força que atua no parafuso passa por A e B, e a força é dirigida de A para B. Os componentes de vetor $\overrightarrow{AB}$, que tem a mesma direção da força, são:

$$d_x = -40 \text{ m} \qquad d_y = +80 \text{ m} \qquad d_z = +30 \text{ m}$$

A distância total de A até B é:

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94{,}3 \text{ m}$$

Representando por **i**, **j** e **k** os vetores unitários ao longo dos eixos coordenados, temos:

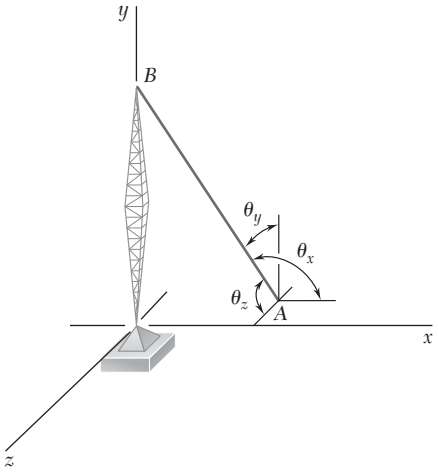
$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduzindo o vetor unitário $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$, escrevemos:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2.500 \text{ N}}{94{,}3 \text{ m}}\overrightarrow{AB}$$

Substituindo a expressão encontrada para $\overrightarrow{AB}$, obtemos:

$$\mathbf{F} = \frac{2.500 \text{ N}}{94{,}3 \text{ m}}[-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{F} = -(1060 \text{ N})\mathbf{i} + (2120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$



Então, os componentes de **F** são:

$$F_x = -1.060 \text{ N} \qquad F_y = +2.120 \text{ N} \qquad F_z = +795 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

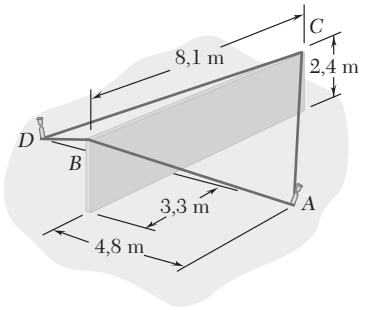
b. Direção da força. Usando as Eqs. (2.25), escrevemos

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1.060 \text{ N}}{2.500 \text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2.120 \text{ N}}{2.500 \text{ N}}$$
$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2.500 \text{ N}}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco cosseno, obtemos

$$\theta_x = 115{,}1° \qquad \theta_y = 32{,}0° \qquad \theta_z = 71{,}5° \quad \blacktriangleleft$$

(*Nota*: este resultado poderia ter sido obtido usando-se os componentes e a intensidade do vetor $\overrightarrow{AB}$ em vez os da força **F**.)



PROBLEMA RESOLVIDO 2.8

Uma seção de um muro de concreto pré-moldado é temporariamente segurada pelos cabos mostrados na figura. Sabendo que a tração é 3.780 N no cabo *AB* e 5.400 N no cabo *AC*, determine a intensidade e a direção da resultante das forças exercidas pelos cabos *AB* e *AC* na estaca *A*.

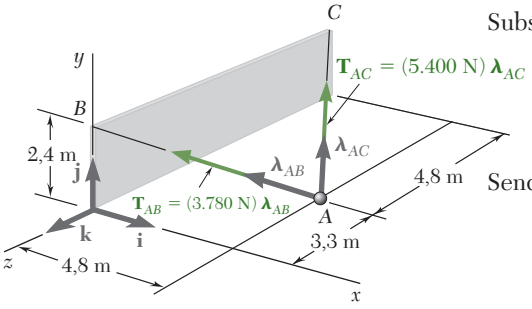
SOLUÇÃO

Componentes das forças. A força exercida por cada cabo na estaca *A* será decomposta em componentes *x*, *y* e *z*. Primeiro determinamos os componentes e a intensidade do vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ medindo-os a partir de *A* em direção à seção do muro. Representando **i**, **j** e **k** os vetores unitários ao longo dos eixos coordenados, temos:

$$\overrightarrow{AB} = -(4{,}8\text{ m})\mathbf{i} + (2{,}4\text{ m})\mathbf{j} + (3{,}3\text{ m})\mathbf{k} \qquad AB = 6{,}3\text{ m}$$
$$\overrightarrow{AC} = -(4{,}8\text{ m})\mathbf{i} + (2{,}4\text{ m})\mathbf{j} - (4{,}8\text{ m})\mathbf{k} \qquad AC = 7{,}2\text{ m}$$

Representando por $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ o vetor unitário ao longo de *AB*, temos:

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{3.780\text{ N}}{6{,}3\text{ m}}\overrightarrow{AB}$$



Substituindo a expressão encontrada para $\overrightarrow{AB}$, obtemos:

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{3.780\text{ N}}{6{,}3\text{ m}}[-(4{,}8\text{ m})\mathbf{i} + (2{,}4\text{ m})\mathbf{j} + (3{,}3\text{ m})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{T}_{AB} = -(2.880\text{ N})\mathbf{i} + (1.440\text{ N})\mathbf{j} + (1.980\text{ N})\mathbf{k}$$

Sendo $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ o vetor unitário ao longo do *AC*, obtemos, de modo similar:

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{5.400\text{ N}}{7{,}2\text{ m}}\overrightarrow{AC}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = -(3.600\text{ N})\mathbf{i} + (1.800\text{ N})\mathbf{j} - (1.620\text{ N})\mathbf{k}$$

Resultante das forças. A resultante **R** das forças exercidas pelos dois cabos é:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(5.480\text{ N})\mathbf{i} + (3.600\text{ N})\mathbf{j} - (1.620\text{ N})\mathbf{k}$$

A intensidade e a direção da resultante são, agora, determinadas por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-6.480)^2 + (3.240)^2 + (-1.620)^2}$$
$$R = 7.425\text{ N} \blacktriangleleft$$

Das Eqs. (2.33), obtemos:

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-6.480\text{ N}}{7.425\text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+3.240\text{ N}}{7.425\text{ N}}$$
$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-1.620\text{ N}}{7.425\text{ N}}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco cosseno, obtemos:

$$\theta_x = 150{,}8° \qquad \theta_y = 64{,}1° \qquad \theta_z = 102{,}6° \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção vimos que *forças no espaço* podem ser definidas por sua intensidade, sua direção e seu sentido ou por seus três componentes retangulares F_x, F_y e F_z.

A. Quando uma força é definida por sua intensidade, sua direção e seu sentido, seus componentes retangulares F_x, F_y e F_z podem ser encontrados das seguintes maneiras:

Caso 1. Se a direção da força **F** é definida pelos ângulos θ_y e ϕ, mostrados na Fig. 2.30, as projeções de **F** calculadas por meio desses ângulos ou seus complementos vão fornecer os componentes de **F** [Eqs. (2.17)]. Observe que os componentes x e z de **F** são encontrados projetando-se **F** primeiramente no plano horizontal; a projeção $\mathbf{F}_h$ obtida dessa maneira é então decomposta nos componentes $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_z$ (Fig. 2.30*c*).

Caso 2. Se a direção da força **F** é definida pelos ângulos θ_x, θ_y, θ_z que **F** forma com os eixos coordenados, cada componente pode ser obtido multiplicando-se o valor de F da força pelo cosseno do ângulo correspondente [Exemplo 1]:

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z$$

Caso 3. Se a direção da força **F** é definida por dois pontos M e N localizados em sua linha de ação (Fig. 2.34), você vai primeiro expressar o vetor $\overrightarrow{MN}$ traçado de M para N em termos de seus componentes d_x, d_y e d_z e dos vetores unitários **i**, **j**, **k**:

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$$

Em seguida, você vai determinar o vetor unitário **λ** ao longo da linha de ação de **F** dividindo o vetor $\overrightarrow{MN}$ por sua intensidade MN. Multiplicando **λ** pela intensidade de **F**, você vai obter a expressão desejada para **F** em termos de seus componentes retangulares [Problema Resolvido 2.7]:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

É vantajoso usar um sistema de notação consistente e significativo quando da determinação dos componentes retangulares de uma força. O método usado neste livro é ilustrado no Problema Resolvido 2.8, no qual, por exemplo, a força $\mathbf{T}_{AB}$ atua a partir da estaca A em direção ao ponto B. Observe que os índices foram ordenados para coincidir com o sentido da força. Recomenda-se que você adote a mesma notação, pois ela vai ajudá-lo a identificar o ponto 1 (o primeiro índice) e o ponto 2 (o segundo índice).

Ao formar o vetor que define a linha de ação de uma força, pode pensar em seus componentes escalares como sendo o número de passos que você deve dar em cada direção coordenada para ir do ponto 1 ao ponto 2. É essencial que você sempre se lembre de atribuir o sinal correto a cada um dos componentes.

B. Quando uma força é definida pelos seus componentes retangulares F_x, F_y e F_z, pode-se obter a sua intensidade F escrevendo:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Você pode determinar os cossenos diretores da linha de ação de **F** dividindo-se os componentes da força por F

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$

Dos cossenos diretores podem-se obter os ângulos θ_x, θ_y, θ_z que **F** forma com os eixos coordenados [Exemplo 2].

C. Para determinar a resultante R de duas ou mais forças em espaço tridimensional, primeiro determine os componentes retangulares de cada força por um dos procedimentos descritos acima. Da adição desses componentes serão obtidas componentes R_x, R_y e R_z.da resultante. A intensidade, a direção e o sentido da resultante podem então ser obtidos tal como indicamos anteriormente para a força **F** [Problema Resolvido 2.8].

PROBLEMAS

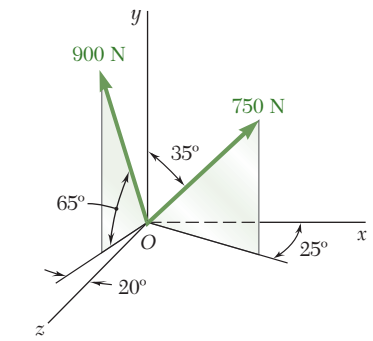


Figura P2.71 e P2.72

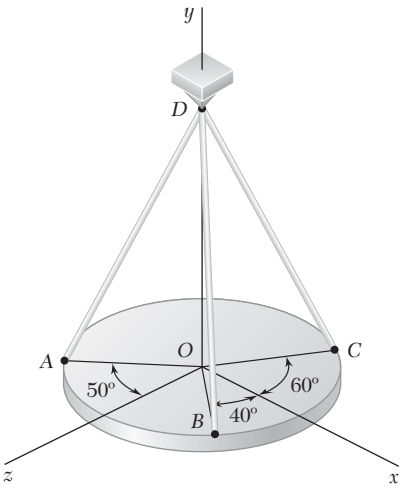


Figura P2.73, P2.74, P2.75 e P2.76

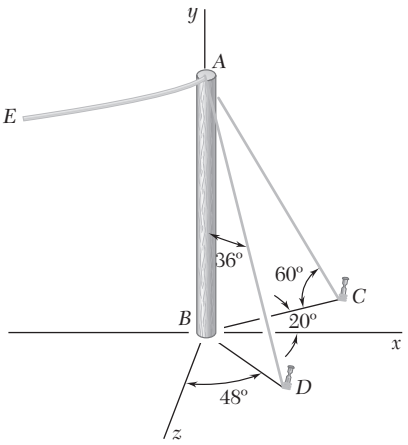


Figura P2.77 e P2.78

2.71 Determine (*a*) as componentes *x*, *y* e *z* da força de 750 N, (*b*) os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que a força forma com os eixos coordenados.

2.72 Determine (*a*) as componentes *x*, *y* e *z* da força de 900 N, (*b*) os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que a força forma com os eixos coordenados.

2.73 Uma placa circular horizontal está suspensa, como mostra a figura, por três fios que estão ligados a um suporte *D* e formam ângulos de 30° com a vertical. Sabendo que o componente *x* da força exercida pelo fio *AD* na placa é 110,3 N, determine (*a*) a tração no fio *AD* e (b) os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que a força exercida em *A* forma com os eixos coordenados.

2.74 Uma placa circular horizontal está suspensa, como mostra a figura, por três fios que estão ligados a um suporte *D* e formam ângulos de 30° com a vertical. Sabendo que o componente *z* da força exercida pelo fio *BD* na placa é – 32,14 N, determine (*a*) a tração no fio *BD* e (*b*) os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que a força exercida em *B* forma com os eixos coordenados.

2.75 Uma placa circular horizontal está suspensa, como mostra a figura, por três fios que estão ligados a um suporte *D* e formam ângulos de 30° com a vertical. Sabendo que a tensão no fio *CD* é 266 N, determine (*a*) as componentes da força exercida por esse fio na placa, (*b*) os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que a força forma com os eixos coordenados.

2.76 Uma placa circular horizontal está suspensa, como mostra a figura, por três fios que estão ligados a um suporte *D* e formam ângulos de 30° com a vertical. Sabendo que a componente *x* da força exercida pelo fio *CD* na placa é – 90 N, determine (*a*) a tração no fio *CD* e (*b*) os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que a força exercida em *C* forma com os eixos coordenados.

2.77 A ponta de um cabo coaxial *AE* é fixada ao poste *AB* que é ancorado pelos fios *AC* e *AD*. Sabendo que a tensão do fio *AC* é 530 N, determine (*a*) o componente da força exercida por esse fio no poste, (*b*) os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que a força forma com os eixos coordenados.

2.78 A ponta de um cabo coaxial *AE* é fixada ao poste *AB* que é ancorado pelos fios *AC* e *AD*. Sabendo que a tensão do fio *AD* é 380 N, determine (*a*) o componente da força exercida por esse fio no poste, (*b*) os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que a força forma com os eixos coordenados.

2.79 Determine a intensidade, a direção e o sentido da força $\mathbf{F} = (320\text{ N})\mathbf{i} + (400\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{k}$.

2.80 Determine a intensidade, a direção e o sentido da força $\mathbf{F} = (240\text{ N})\mathbf{i} - (270\text{ N})\mathbf{j} + (680\text{ N})\mathbf{k}$.

2.81 Uma força atua na origem de um sistema de coordenadas na direção definida pelos ângulos $\theta_x = 70{,}9°$ e $\theta_y = 144{,}9°$. Sabendo que a componente z da força é -230 N, determine, (*a*) o ângulo θ_z, (*b*) os outros componentes e a intensidade da força.

2.82 Uma força atua na origem de um sistema de coordenadas na direção definida pelos ângulos $\theta_y = 55°$ e $\theta_z = 45°$. Sabendo que o componente x da força é -2.220 N, determine, (*a*) o ângulo θ_x, (*b*) os outros componentes e a intensidade da força.

2.83 Uma força **F** de intensidade 210 N atua na origem de um sistema de coordenadas. Sabendo que $F_x = 80$ N, $\theta_z = 151{,}2°$ e $F_y < 0$, determine, (*a*) os componentes F_y e F_z, (*b*) os ângulos θ_x e θ_y.

2.84 Uma força **F** de intensidade 230 N atua na origem de um sistema de coordenadas. Sabendo que $\theta_x = 32{,}5°$, $F_y = -60$ N e $F_z > 0$, determine (*a*) os componentes F_x e F_z, (*b*) os ângulos θ_y e θ_z.

2.85 Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ancorados por parafusos em *B*, *C* e *D*. Se a tração no cabo *AB* é 2335 N determine os componentes da força exercida pelo cabo no parafuso em *B*.

2.86 Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ancorados por parafusos em *B*, *C* e *D*. Se a tração no cabo *AD* é 1.400 N, determine os componentes da força exercida pelo cabo no parafuso em *D*.

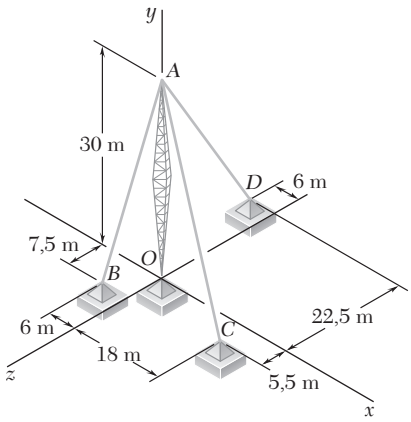


Figura P2.85 e P2.86

2.87 Uma barra de aço *ABC* é sustentada em parte pelo cabo *DBE*, que passa pelo anel *B* sem atrito. Sabendo que a tração no cabo é 1.712 N, determine os componentes dessa força exercida pelo cabo no suporte em *D*.

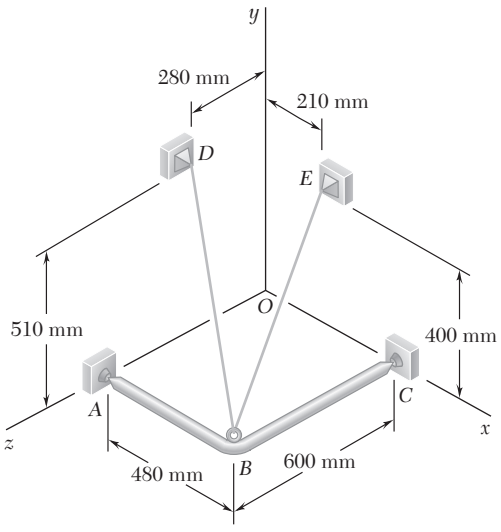


Figura P2.87

2.88 Para a barra de aço e o cabo do Problema 2.87, determine os componentes da força exercida pelo cabo no suporte em *E*.

2.89 Sabendo que a tração no cabo *AB* é 1.425 N, determine a componente da força exercida na placa em *B*.

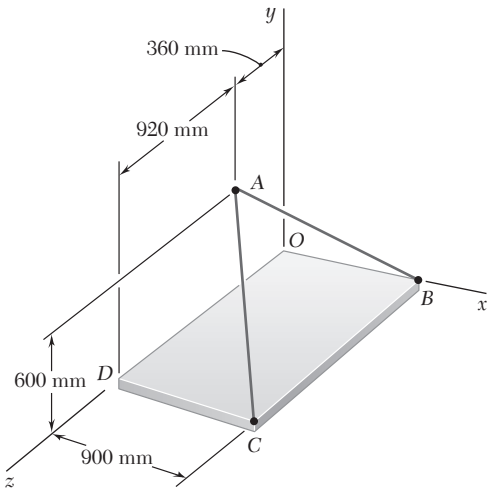


Figura P2.89 e P2.90

2.90 Sabendo que a tração no cabo *AC* é 2.130 N, determine a componente da força exercida na placa em *C*.

2.91 Encontre a intensidade, a direção e o sentido da resultante das duas forças mostradas, sabendo que $P = 300$ N e $Q = 400$ N.

2.92 Encontre a intensidade, a direção e o sentido da resultante das duas forças mostradas, sabendo que $P = 400$ N e $Q = 300$ N.

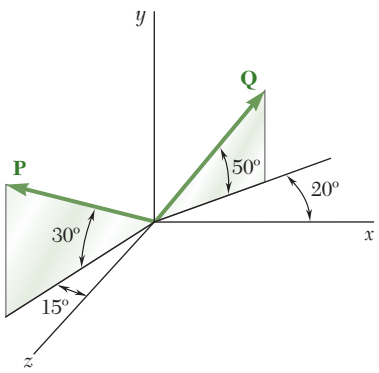


Figura P2.91 e P2.92

2.93 Sabendo que a tração é 1.890 N no cabo *AB* e 2.270 N no cabo *AC*, determine a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas em *A* pelos dois cabos.

2.94 Sabendo que a tração é 2.270 N no cabo *AB* e 1.890 N no cabo *AC*, determine a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas em *A* pelos dois cabos.

2.95 Para a barra do Problema 2.87, determine a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas pelo cabo em *B* sabendo que a tensão no cabo é 385 N.

2.96 Para os cabos do Problema 2.89, sabendo que a tração é 1.425 N no cabo *AB* e 2.130 N no cabo *AC*, determine a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas em *A* pelos dois cabos

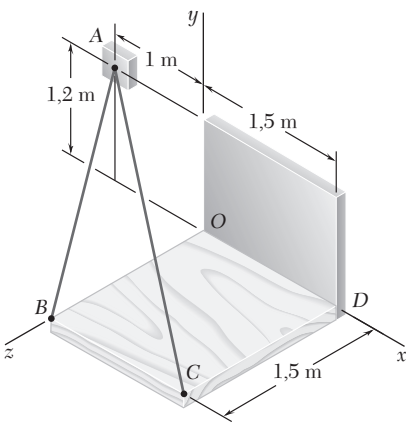


Figura P2.93 e P2.94

2.97 A ponta de um cabo coaxial *AE* é fixada ao poste *AB* que é ancorado pelos fios *AC* e *AD*. Sabendo que a tensão do fio *AC* é 670 N e a resultante das forças exercidas em *A* pelos fios *AC* e *AD* devem estar contidas no plano *xy*, determine (*a*) a tensão em *AD*, (*b*) a intensidade, a direção e o sentido da resultante das duas forças.

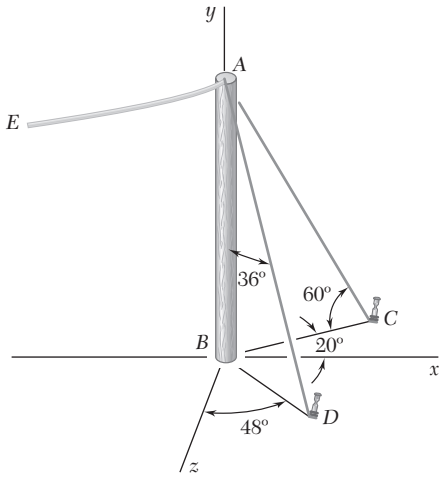


Figura P2.97 e *P2.98*

2.98 A ponta de um cabo coaxial *AE* é fixada ao poste *AB*, que é ancorado pelos fios *AC* e *AD*. Sabendo que a tensão do fio *AC* é 556 N e que a resultante das forças exercidas em *A* pelos fios *AC* e *AD* devem estar contidas no plano *xy*, determine (*a*) a tensão em *AC*, (*b*) intensidade, a direção e o sentido da resultante das duas forças.

2.15 Equilíbrio de uma partícula no espaço

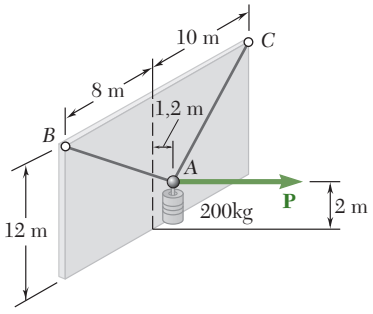
De acordo com a definição dada na Seção 2.9, uma partícula *A* estará em equilíbrio se a resultante de todas as forças que atuam em *A* for zero. Os componentes R_x, R_y e R_z da resultante são dados pelas relações (2.31). Dado que os componentes da resultante são zero, escrevemos:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{2.34}$$

As Eq. (2.34) representam as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de uma partícula no espaço. Podem ser usadas na resolução de problemas relacionados ao equilíbrio de uma partícula que envolvam não mais do que três incógnitas.

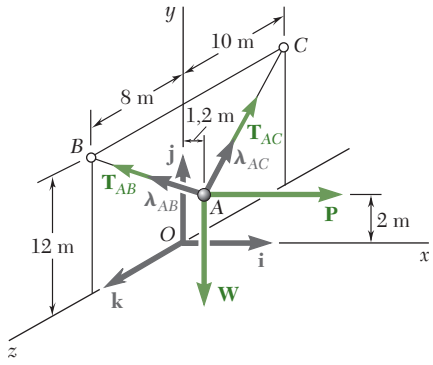
Para resolver tais problemas, deve-se primeiro desenhar um diagrama de corpo livre representando a partícula em equilíbrio e *todas* as forças que atuam nela. Pode-se então escrever as equações de equilíbrio (2.34) e resolvê-las para as três incógnitas. Nos problemas mais comuns, essas incógnitas representam (1) os três componentes de uma única força ou (2) a intensidade de três forças, todas de direção conhecida.

Foto 2.2 Embora a tração nos *quatro* cabos de sustentação do carro não possa ser obtida usando as três equações de (2.34), a relação entre as trações pode ser obtida considerando o equilíbrio do gancho.



PROBLEMA RESOLVIDO 2.9

Um cilindro de 200 kg está pendurado por meio de dois cabos *AB* e *AC*, presos ao topo de uma parede vertical. Uma força horizontal **P** perpendicular à parede segura o cilindro na posição mostrada. Determine a intensidade de **P** e a tração em cada cabo.



SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Escolhemos o ponto *A* como um corpo livre; esse ponto está sujeito a quatro forças, três das quais têm intensidade desconhecida.

Introduzindo os vetores unitários **i**, **j** e **k**, decompomos cada força em componentes retangulares.

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1.962\text{ N})\mathbf{j} \qquad (1)$$

No caso de $\mathbf{T}_{AB}$ e $\mathbf{T}_{AC}$, é necessário primeiro determinar os componentes e as intensidades dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Representando por $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ o vetor unitário ao longo de *AB*, temos:

$$\overrightarrow{AB} = -(1{,}2\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} + (8\text{ m})\mathbf{k} \qquad AB = 12{,}862\text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12{,}862\text{ m}} = -0{,}09330\mathbf{i} + 0{,}7775\mathbf{j} + 0{,}6220\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = -0{,}09330T_{AB}\mathbf{i} + 0{,}7775T_{AB}\mathbf{j} + 0{,}6220T_{AB}\mathbf{k} \qquad (2)$$

Representando por $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ o vetor unitário ao longo de *AC*, podemos escrever de modo similar:

$$\overrightarrow{AC} = -(1{,}2\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} - (10\text{ m})\mathbf{k} \qquad AC = 14{,}193\text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14{,}193\text{ m}} = -0{,}08455\mathbf{i} + 0{,}7046\mathbf{j} - 0{,}7046\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = -0{,}08455T_{AC}\mathbf{i} + 0{,}7046T_{AC}\mathbf{j} - 0{,}7046T_{AC}\mathbf{k} \qquad (3)$$

Condição de equilíbrio. Como *A* está em equilíbrio, devemos ter

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

ou, substituindo as expressões (1), (2) e (3) na expressão (4) e fatorando em **i**, **j** e **k**:

$$(-0{,}09330T_{AB} - 0{,}08455T_{AC} + P)\mathbf{i} + (0{,}7775T_{AB} + 0{,}7046T_{AC} - 1.962\text{ N})\mathbf{j} + (0{,}6220T_{AB} - 0{,}7046T_{AC})\mathbf{k} = 0$$

Igualando os coeficientes de **i**, **j** e **k** a zero, escrevemos três equações escalares, que expressam que as somas de componentes *x*, *y* e *z* das forças são respctivamente iguais a zero.

$$(\Sigma F_x = 0:) \qquad -0{,}09330T_{AB} - 0{,}08455T_{AC} + P = 0$$
$$(\Sigma F_y = 0:) \qquad +0{,}7775T_{AB} + 0{,}7046T_{AC} - 1.962\text{ N} = 0$$
$$(\Sigma F_z = 0:) \qquad +0{,}6220T_{AB} - 0{,}7046T_{AC} = 0$$

Resolvendo essas equações, obtemos:

$$P = 235\text{ N} \qquad T_{AB} = 1.402\text{ N} \qquad T_{AC} = 1.238\text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vimos anteriormente que, quando uma partícula está em *equilíbrio*, a resultante das forças que atuam sobre a partícula deve ser nula. Ao expressar esse fato no caso do equilíbrio de uma *partícula no espaço tridimensional*, você obterá três relações entre as forças atuantes sobre a partícula. Essas relações podem ser usadas para a determinação de três incógnitas – geralmente as intensidades das três forças.

A solução consistirá nos seguintes passos:

1. Desenhe um diagrama de corpo livre da partícula. Esse diagrama mostra a partícula e todas as forças que atuam sobre ela. Indique no diagrama as intensidades das forças conhecidas, bem como quaisquer ângulos ou dimensões que definam a direção de uma força. Qualquer intensidade ou ângulo desconhecido deve ser representado por um símbolo apropriado. Nada mais deve ser incluído em seu diagrama de corpo livre.

2. Decomponha cada uma das forças em componentes retangulares. Seguindo o método adotado na lição anterior, você irá determinar para cada força $\mathbf{F}$ o vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ que define a direção daquela força, e expressar $\mathbf{F}$ como o produto da sua intensidade $\mathbf{F}$ pelo vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$. Você obterá uma expressão da forma

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

na qual d, d_x, d_y, d_z são as dimensões obtidas do diagrama de corpo livre da partícula. Se uma força é conhecida tanto em intensidade como em direção, então $\mathbf{F}$ é conhecida, e a expressão obtida para ela fica inteiramente definida; caso contrário, F é uma das três incógnitas que devem ser determinadas.

3. Faça a resultante, ou soma, das forças exercidas sobre a partícula igual a zero. Você obterá uma equação vetorial que consiste em termos que contêm os vetores unitários **i, j** ou **k**. Você irá agrupar os termos que contenham o mesmo vetor unitário e fatorar esse vetor. Para que a equação vetorial seja satisfeita, o coeficiente de cada vetor unitário deve ser igual a zero. Logo, tornando cada coeficiente igual a zero, serão obtidas três equações escalares que poderá resolver para um máximo de três incógnitas [Problema Resolvido 2.9].

PROBLEMAS

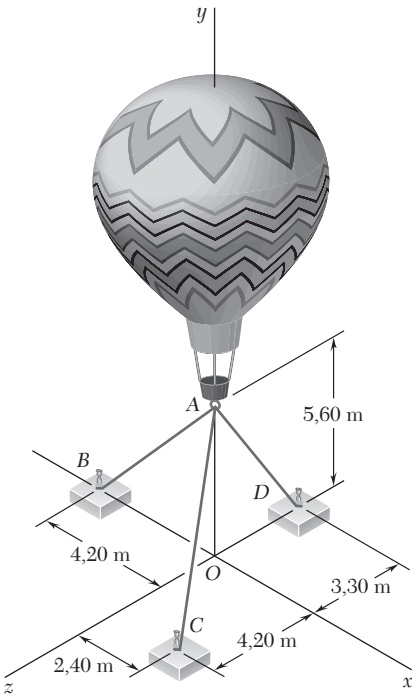


Figura P2.99, *P2.100*, P2.101 e *P2.102*

2.99 Três cabos são usados para amarrar um balão, como mostra a figura. Determine a força vertical **P** exercida pelo balão em *A*, sabendo que a tração no cabo *AB* é 259 N.

2.100 Três cabos são usados para amarrar um balão, como mostra a figura. Determine a força vertical **P** exercida pelo balão em *A*, sabendo que a tração no cabo *AC* é 444 N.

2.101 Três cabos são usados para amarrar um balão, como mostra a figura. Determine a força vertical **P** exercida pelo balão em *A*, sabendo que a tração no cabo *AD* é 481 N.

2.102 Três cabos são usados para amarrar um balão, tal como mostra a figura. Sabendo que o balão exerce uma força vertical de 800 N em *A*, determine a tensão em cada cabo.

2.103 Um caixote é sustentado por três cabos, como mostrado na figura. Determine o peso do caixote, sabendo que a tração no cabo *AB* é 3.330 N.

2.104 Um caixote é sustentado por três cabos como mostrado na figura. Determine o peso do caixote, sabendo que a tração no cabo *AD* é 2.740 N.

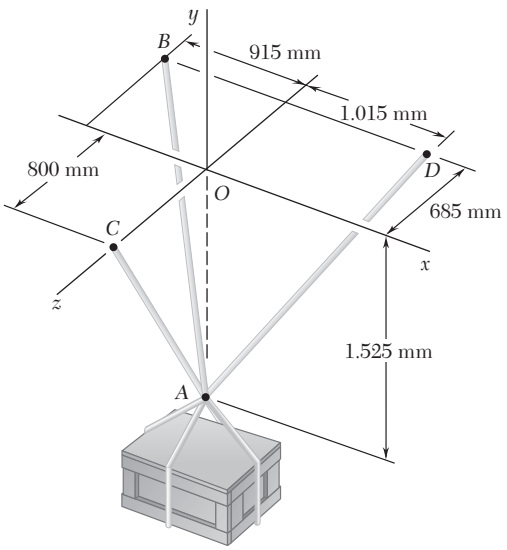


Figura P2.103, P2.104, P2.105 e *P2.106*

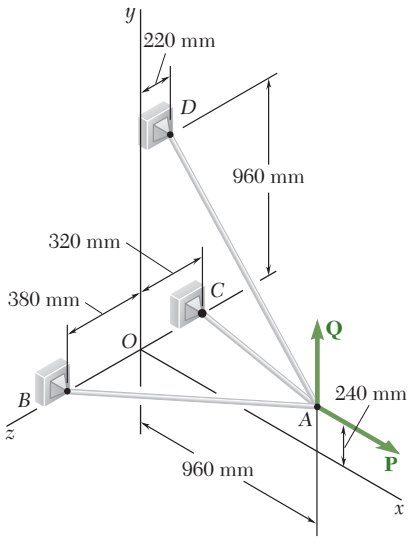


Figura P2.107 e P2.108

2.105 Um caixote é sustentado por três cabos como mostrado na figura. Determine o peso do caixote, sabendo que a tração no cabo *AC* é 2.420 N.

2.106 O peso de 7.116 N do caixote é suportado por três cabos como mostrado na figura. Determine a tensão em cada cabo.

2.107 Três cabos estão conectados em *A*, onde são aplicadas as forças **P** e **Q**, como mostra a figura. Sabendo que $Q = 0$, encontre o valor de *P* para que a tensão no cabo *AD* seja 305 N.

2.108 Três cabos estão conectados em *A*, onde são aplicadas as forças **P** e **Q**, como mostra a ilustração. Sabendo que $P = 1.200$ N, encontre o valor de *Q* para que o cabo *AD* fique esticado.

2.109 Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ligados a um pino em *A* e ancorados por parafusos em *B*, *C* e *D*. Se a tensão no cabo *AB* é de 2.800 N, determine a força vertical **P** exercida pela torre no pino em *A*.

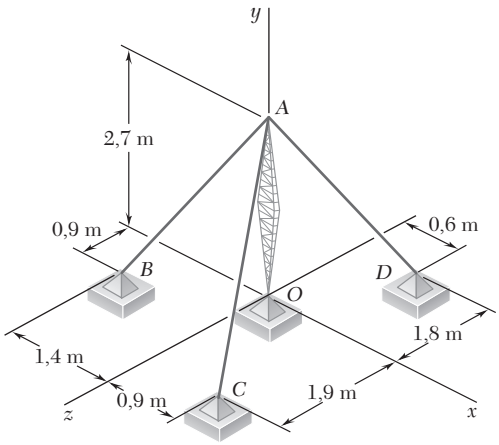
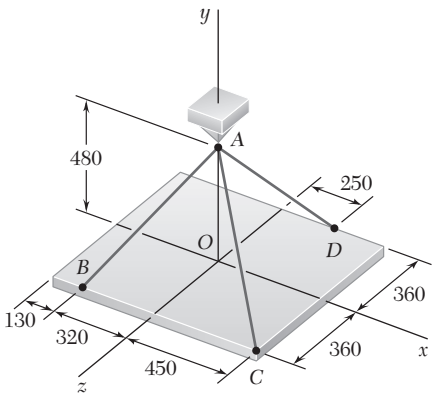


Figura P2.109 e P2.110

2.110 Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ligados a um pino em *A* e ancorados por parafusos em *B*, *C* e *D*. Se a tensão no cabo *AC* é de 4.092 N, determine a força vertical **P** exercida pela torre no pino em *A*.

2.111 Uma placa retangular é sustentada por três cabos, como mostra a figura. Sabendo que a tração no cabo *AC* é 60 N, determine o peso da placa.



Dimensões em mm

Figura P2.111 e P2.112

2.112 Uma placa retangular é sustentada por três cabos, como mostra a figura. Sabendo que a tração no cabo *AD* é 520 N, determine o peso da placa.

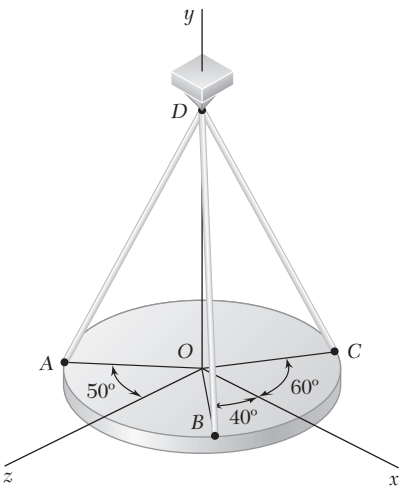


Figura P2.114

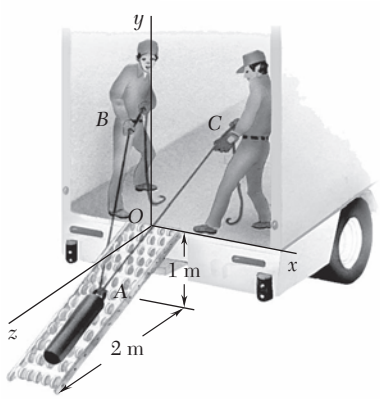


Figura P2.119

2.113 Para a torre de transmissão dos Problemas 2.109 e 2.110, determine a tensão em cada cabo de sustentação sabendo que a torre exerce no pino *A* uma força vertical para cima de 9.340 N.

2.114 Uma placa circular horizontal de peso igual a 267 N é suspensa por três fios que são ligados a um suporte *D* e formam ângulos de 30° com a vertical. Determine a tração em cada fio.

2.115 Para a placa retangular dos Problemas 2.111 e 2.112, determine a tensão de cada um dos três cabos sabendo que o peso da placa é 792 N.

2.116 Para o sistema de cabos dos Problemas 2.107 e 2.108, determine a tensão em cada cabo sabendo que $P = 2.880$ N e $Q = 0$.

2.117 Para o sistema de cabos dos Problemas 2.107 e 2.108, determine a tensão em cada cabo sabendo que $P = 2.880$ N e $Q = 576$ N.

2.118 Para o sistema de cabos dos Problemas 2.107 e 2.108, determine a tensão em cada cabo sabendo que $P = 2.880$ N e $Q = -576$ N. (A direção de **Q** é para baixo).

2.119 Usando duas cordas e uma rampa de roletes, dois operários descarregam de um caminhão um contrapeso de ferro fundido de 890 N. Sabendo que, no instante mostrado, o contrapeso é mantido parado e que as posições dos pontos *A*, *B* e *C* são, respectivamente, *A*(0; −0,5 m; 1 m), *B*(−1 m; 1,3 m; 0) e *C*(1,1 m; 1 m; 0) e admitindo que não há atrito entre o contrapeso e a rampa, determine a tração em cada corda. (*Dica*: como não há atrito, a força exercida pela rampa sobre o contrapeso deve ser perpendicular à rampa)

2.120 Resolver o Problema 2.119 admitindo que um terceiro operário esteja exercendo uma força $\mathbf{P} = -(178 \text{ N})\mathbf{i}$ no contrapeso.

2.121 Um recipiente de peso *W* é sustentado pelo anel *A*. O cabo *BAC* passa através do anel e é fixado nos suportes *B* e *C*. Duas forças $\mathbf{P} = P\mathbf{i}$ e $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ são aplicadas no anel para manter a posição como mostrado na figura. Sabendo que $W = 376$ N, determine *P* e *Q*. (*Dica*: a tração é a mesma em ambas as porções do cabo *BAC*.)

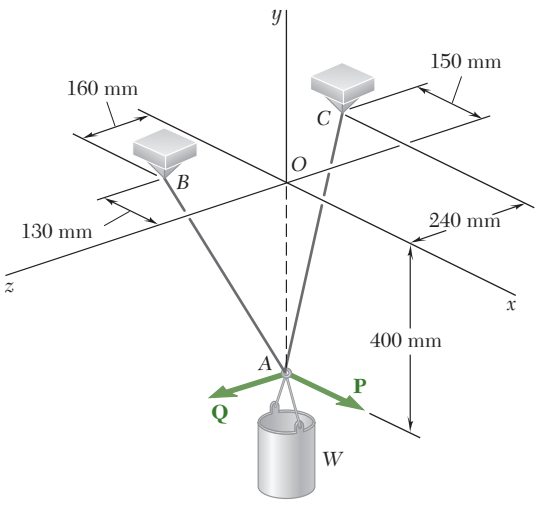


Figura P2.121

2.122 Para o sistema do Problema 2.121, determine W e Q sabendo que $P = 164$ N.

2.123 Um recipiente de peso W é sustentado pelo anel A onde os cabos AC e AE são fixados. A força **P** é aplicada na ponta F do terceiro cabo que passa por uma roldana B e pelo anel A, fixado no suporte D. Sabendo que $W = 1.000$ N, determine a intensidade de **P**. (Dica: A tensão é a mesma em todas as porções do cabo $FBAD$).

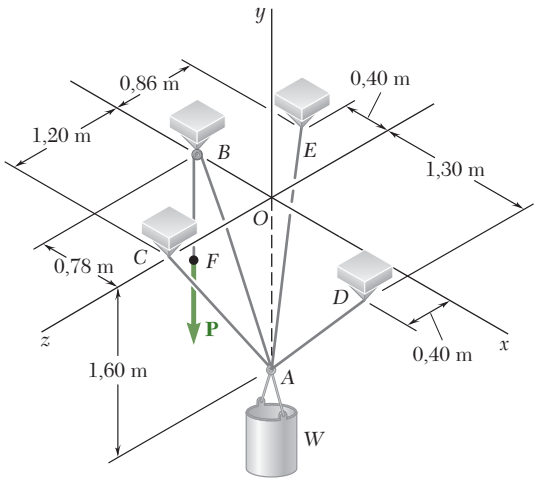


Figura P2.123

2.124 Sabendo que a tensão no cabo AC do sistema descrito no Problema 2.123 é 150 N, determine (*a*) a intensidade da força **P**, (*b*) o peso W do recipiente.

2.125 Os cursores A e B são conectados por um fio de 635 mm de comprimento e podem deslizar livremente sobre as hastes sem atrito. Se uma força **Q** de 267 N é aplicada no cursor B, como mostrada na figura, determine (*a*) a tração no fio quando $x = 228$ mm, (*b*) a intensidade da força **P** necessária para se manter o equilíbrio do sistema.

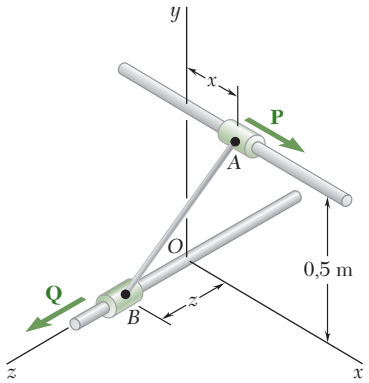


Figura P2.125 e P2.126

2.126 Os cursores A e B são conectados por um fio de 635 mm de comprimento e podem deslizar livremente sobre as hastes sem atrito. Determine as distâncias x e z para se manter o equilíbrio do sistema quando $P = 534$ N e $Q = 267$ N.

REVISÃO E RESUMO

Neste capítulo, estudamos o efeito de forças sobre partículas, isto é, sobre corpos de forma e tamanho tais que todas as forças que atuam sobre eles podem ser consideradas como aplicadas no mesmo ponto.

Resultante de duas forças

Forças são *grandezas vetoriais*. São caracterizadas por um *ponto de aplicação*, uma *intensidade*, uma *direção e* um *sentido* e adicionadas de acordo com a *lei do paralelogramo* (Fig. 2.35). A intensidade, a direção e o sentido da resultante **R** de duas forças **P** e **Q** podem ser determinados graficamente ou por trigonometria usando sucessivamente a lei dos cossenos e a lei dos senos [Problema Resolvido 2.1].

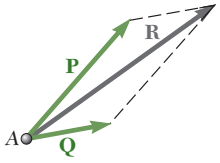


Figura 2.35

Componente de uma força

Qualquer força dada que atue sobre uma partícula pode ser decomposta em dois ou mais componentes, ou seja, pode ser substituída por duas ou mais forças que têm o mesmo efeito sobre a partícula. Pode-se decompor a força **F** em dois componentes **P** e **Q** desenhando-se um paralelogramo com **F** na diagonal; os componentes **P** e **Q** são, então, representados pelos dois lados adjacentes do paralelogramo (Fig. 2.36) e podem ser determinados graficamente ou por trigonometria [Seção 2.6].

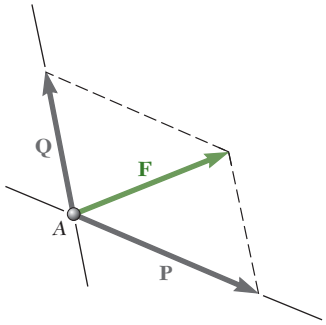


Figura 2.36

Componente retangular Vetor unitário

Diz-se que a força **F** é decomposta em dois *componentes retangulares* se seus componentes $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$ forem perpendiculares entre si e dirigidos ao longo dos eixos coordenados (Fig. 2.37). Introduzindo os *vetores unitários* **i** e **j** ao longo dos eixos *x* e *y*, respectivamente, escrevemos [Seção 2.7]

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j} \tag{2.6}$$

e

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \tag{2.7}$$

onde F_x e F_y são os *componentes escalares* de **F**. Esses componentes, que podem ser positivos ou negativos, são definidos pelas relações:

$$Fx = F\cos\theta \qquad F_y = F\,\text{sen}\,\theta \tag{2.8}$$

Quando os componentes retangulares F_x e F_y de uma força **F** são dados, pode-se obter o ângulo θ que define a direção da força escrevendo-se:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{2.9}$$

Pode-se, então, obter a intensidade *F* da força resolvendo-se uma das Eqs. (2.8) para *F* ou aplicando-se o teorema de Pitágoras e escrevendo-se:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2.10}$$

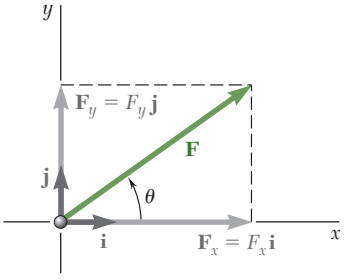


Figura 2.37

Resultante de várias forças coplanares

Quando *três ou mais forças coplanares* atuam sobre uma partícula, os componentes retangulares de sua resultante **R** podem ser obtidos adicionando-se algebricamente os componentes correspondentes das forças dadas [Seção 2.8]. Temos:

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y$$

Podemos então determinar a intensidade e a direção de **R** a partir de relações similares às das Eqs. (2.9) e (2.10) [Problema Resolvido 2.3].

Forças no espaço

Uma força **F** no *espaço tridimensional* pode ser decomposta em componentes retangulares $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ e $\mathbf{F}_z$, [Seção 2.12]. Representando por θ_x, θ_y, θ_z, respectivamente, os ângulos formados por **F** com os eixos x, y e z (Fig. 2.38), temos:

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z \tag{2.19}$$

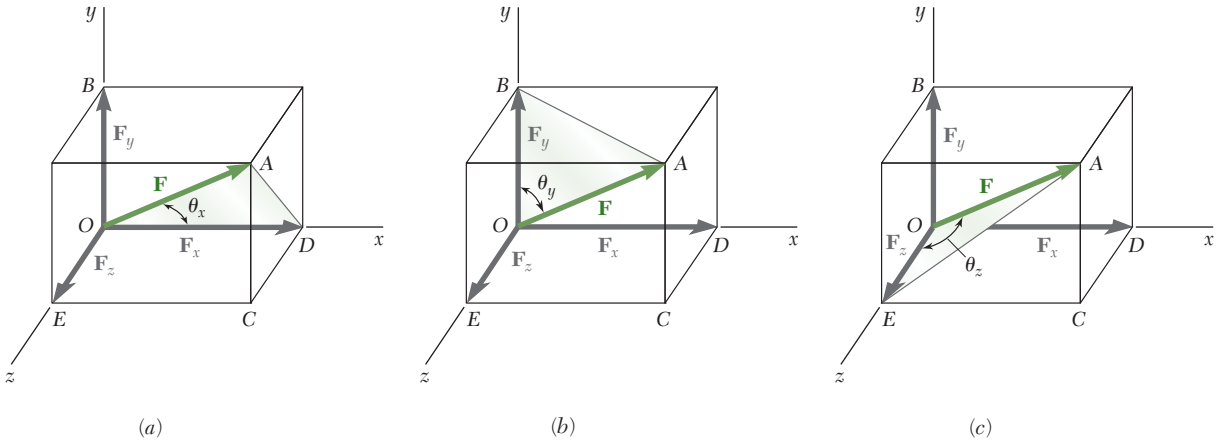


Figura 2.38

Cossenos diretores

Os cossenos de θ_x, θ_y, θ_z são conhecidos como *cossenos diretores* da força **F**. Introduzindo os vetores unitários **i**, **j**, **k** ao longo dos eixos coordenados, temos:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{2.20}$$

ou

$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}) \tag{2.21}$$

o que mostra (Fig. 2.39) que **F** é o produto da sua intensidade F pelo vetor unitário:

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}$$

Como a intensidade de $\boldsymbol{\lambda}$ é igual à unidade, devemos ter:

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \tag{2.24}$$

Quando os componentes regulares F_x, F_y e F_z de uma força **F** são dados, encontramos a intensidade F da força escrevendo:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{2.18}$$

e obtemos os cossenos diretores de **F** a partir da Eq. (2.19). Temos:

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \tag{2.25}$$

Quando uma força **F** é definida no espaço tridimensional pela sua intensidade F e por dois pontos M e N sobre sua linha de ação [Seção 2.13], seus componentes retangulares podem ser obtidos da seguinte maneira:

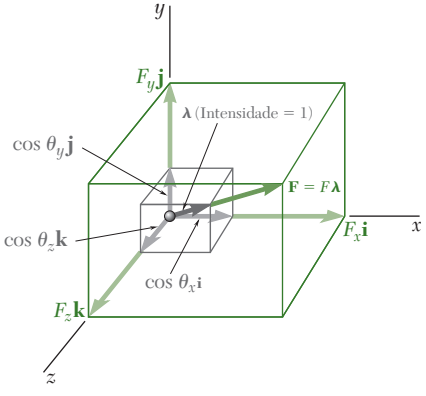


Figura 2.39

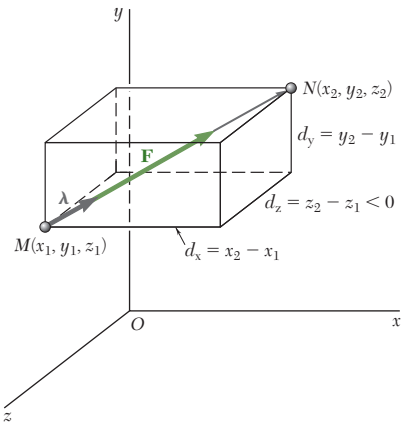


Figura 2.40

primeiro, expressamos o vetor $\overrightarrow{MN}$ que liga os pontos M e N em termos de seus componentes d_x, d_y, d_z (Fig, 2.40); escrevemos:

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \tag{2.26}$$

Em seguida, determinamos o vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ ao longo da linha de ação de $\mathbf{F}$ dividindo $\overrightarrow{MN}$ por sua intensidade $MN = d$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \tag{2.27}$$

Lembrando que $\mathbf{F}$ é igual ao produto de F por $\boldsymbol{\lambda}$, temos

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \tag{2.28}$$

de onde se segue [Problemas Resolvidos 2.7 e 2.8] que os componentes escalares de $\mathbf{F}$ são, respectivamente

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \tag{2.29}$$

Resultante de força no espaço

Quando duas ou mais forças atuam sobre uma partícula no espaço tridimensional, podem-se obter os componentes retangulares de sua resultante $\mathbf{R}$ pela adição algébrica dos componentes correspondentes das forças dadas [Seção 2.14]. Temos:

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \tag{2.31}$$

A intensidade, a direção e o sentido de $\mathbf{R}$ podem, então, ser determinados a partir de relações similares às das Eqs. (2.18) e (2.25) [Problema Resolvido 2.8].

Equilíbrio de uma partícula

Diz-se que a partícula está em *equilíbrio* quando a resultante de todas as forças que atuam sobre ela é nula [Seção 2.9]. A partícula, então, permanecerá em repouso (se originalmente em repouso) ou se moverá a uma velocidade constante em linha reta (se originalmente em movimento) [Seção 2.10].

Diagrama de corpo livre

Para resolver um problema que envolva uma partícula em equilíbrio, primeiro devemos traçar um *diagrama de corpo livre* da partícula, mostrando todas as forças que atuam sobre ela [Seção 2.11]. Se *apenas três forças coplanares* atuam sobre a partícula, pode-se desenhar um *triângulo de forças* para expressar que a partícula está em equilíbrio. Usando-se métodos gráficos ou trigonometria, pode-se resolver esse triângulo para no máximo duas incógnitas [Problema Resolvido 2.4]. Se *mais que três forças coplanares* estão envolvidas, devem-se usar as equações de equilíbrio.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \tag{2.15}$$

Essas equações podem ser resolvidas para no máximo duas incógnitas [Problema Resolvido 2.6].

Equilíbrio no espaço

Quando uma partícula está em *equilíbrio no espaço tridimensional* [Seção 2.15], devem-se usar as três equações de equilíbrio:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{2.34}$$

Essas equações podem ser resolvidas para no máximo três incógnitas [Problema Resolvido 2.9].

PROBLEMAS DE REVISÃO

2.127 A direção e sentido das forças de 330 N podem variar, mas o ângulo entre elas é sempre 50°. Determine o favor de α para que a resultante das forças atuantes em A seja na horizontal e para a esquerda.

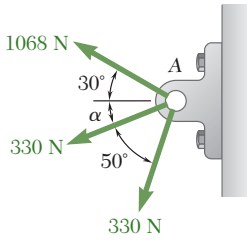


Figura P2.127

2.128 Uma estaca é puxada do solo por meio de duas cordas como mostra a figura. Sabendo que a intensidade, direção e sentido da força exercida em uma das cordas, determine a intensidade, a direção e o sentido que a força **P** deveria exercer com a outra corda se a resultante dessas duas forças é uma força vertical de 178 N.

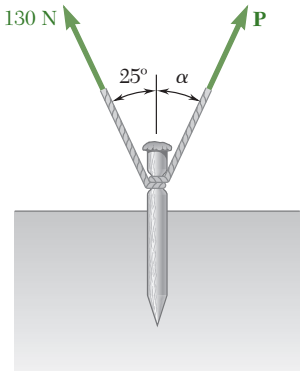


Figura P2.128

2.129 O elemento BD exerce sobre o elemento ABC uma força **P** dirigida ao longo da linha BD. Sabendo que **P** deve ter um componente vertical de 1.068 N, determine (*a*) a intensidade da força **P**, (*b*) sua componente horizontal.

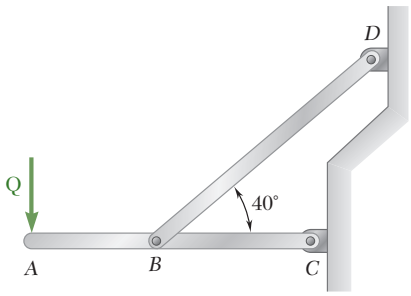


Figura P2.129

2.130 Dois cabos estão ligados juntos a C e carregados como mostra a figura. Determine a tensão (*a*) no cabo AC, (*b*) no cabo BC.

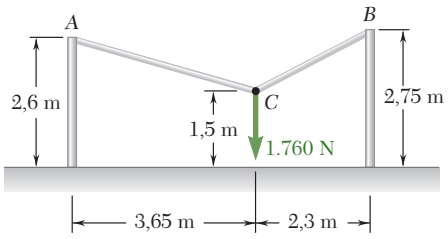


Figura P2.130

2.131 Dois cabos estão ligados juntos em C e carregados como mostra a figura. Sabendo que $P = 360$ N, determine a tensão (*a*) no cabo AC, (*b*) no cabo BC.

2.132 Dois cabos estão ligados juntos a C e carregados como mostra a figura. Determine a faixa da carga P para que ambos os cabos permaneçam esticados.

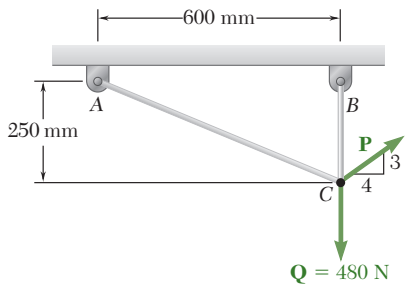


Figura P2.131 e P2.132

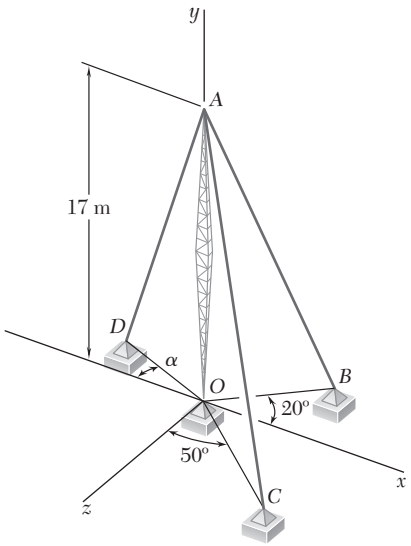


Figura P2.134

2.133 Uma força atua na origem de um sistema de coordenadas definidas pelos ângulos $\theta_x = 69{,}3°$ e $\theta_z = 57{,}9°$. Sabendo que a componente y da força é -774 N, determine (*a*) o ângulo θ_y, (*b*) os outros componentes da força e suas intensidades.

2.134 O comprimento do cabo *AB* é 20 m e a tensão neste cabo é 17.350 N. Determine (*a*) as componentes *x*, *y* e *z* da força exercida pelo cabo na âncora *B*, (*b*) os ângulos θ_x, θ_y e θ_z, definindo a direção e sentido da força.

2.135 No sentido de mover um caminhão acidentado, dois cabos foram fixados em *A* e puxados pelos guinchos *B* e *C* como mostrado na figura. Sabendo que a tração é 10 kN no cabo *AB* e 7,5 kN no cabo *AC*, determine a intensidade, direção e sentido da resultante das forças exercidas em *A* pelos dois cabos.

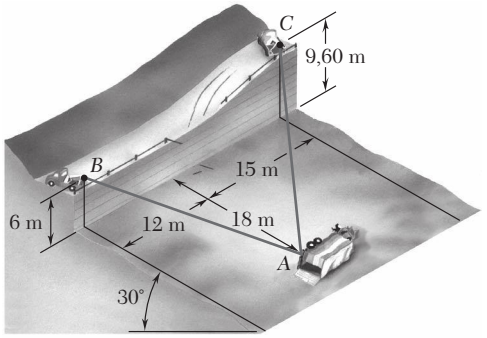


Figura P2.135

2.136 Um recipiente de peso $W = 1.165$ N é suspenso por três cabos como mostrado na figura. Determine a tensão em cada cabo.

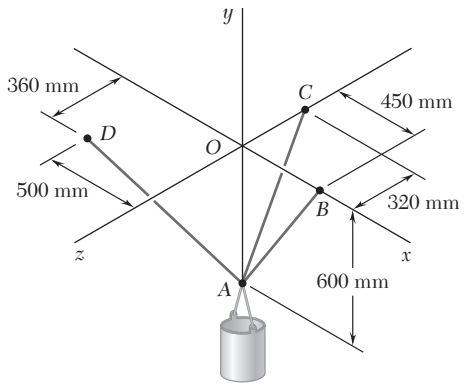


Figura P2.136

2.137 Os cursores *A* e *B* são conectados por um fio de comprimento de 525 mm e podem deslizar livremente, sem atrito, sobre as hastes. Se a força **P** = (341 N)**j** é aplicada ao colar *A*, determine (*a*) a tensão no fio quando $y = 155$ mm, (*b*) a intensidade da força **Q** requerida para manter o equilíbrio do sistema.

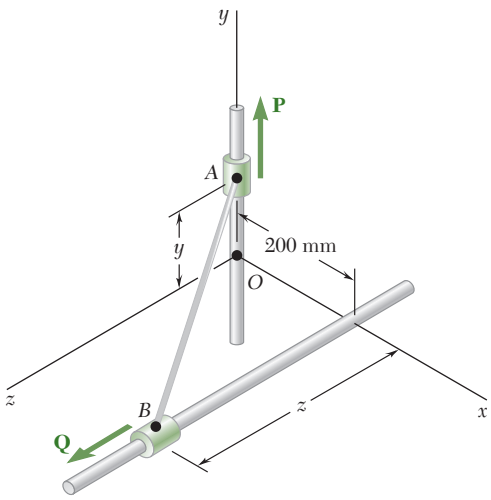


Figura P2.137

2.138 Resolver o Problema 2.137 adotando $y = 275$ mm.

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

2.C1 Usando um aplicativo computacional, determine a intensidade e a direção da resultante de n forças coplanares aplicadas em um ponto A. Use esse aplicativo para resolver os Problemas 2.32, 2.33, 2.34 e 2.38.

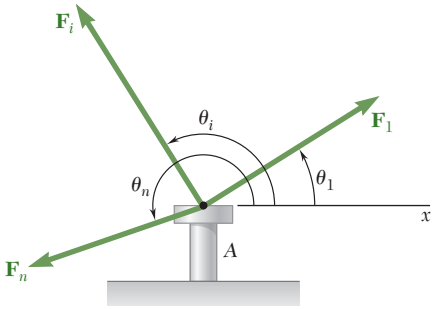


Figura P2.C1

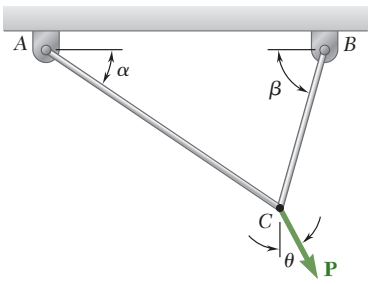


Figura P2.C2

2.C2 Uma carga **P** é sustentada por dois cabos, como mostra a figura. Usando um programa de computador, determine a tração em cada cabo em função de P para valores de θ variando de $\theta_1 = \beta - 90^\circ$ até $\theta_2 = 90^\circ - \alpha$, usando dados incrementais $\Delta\theta$. Usando esse programa, determine para os três conjuntos de valores numéricos (*a*) a tensão em cada cabo para valores de θ variando de θ_1 a θ_2, (*b*) o valor de θ para que a tensão nos dois cabos seja a menor possível, (c) o valor correspondente da tensão.

(1) $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $P = 1.780$ N, $\Delta\theta = 5^\circ$
(2) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $P = 2.668$ N, $\Delta\theta = 10^\circ$
(3) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $P = 1.110$ N, $\Delta\theta = 5^\circ$

2.C3 Um acrobata está caminhando em uma corda-bamba de comprimento L = 20,1 m, fixada nos suportes A e B a uma distância de 20,0 m entre si. O peso combinado do acrobata e de sua vara de equilíbrio é de 800 N, e o atrito entre suas sapatilhas e a corda é grande o suficiente para impedi-lo de escorregar. Desprezando o peso da corda e qualquer deformação elástica, use um aplicativo computacional para determinar a deflexão y e as forças de tração nas porções AC e BC da corda para valores de x entre 0,5 m e 10,0 m, usando incrementos de 0,5 m. A partir dos resultados obtidos, determine (*a*) a máxima deflexão da corda, (*b*) a máxima força de tração na corda, (*c*) os valores mínimos das forças de tração nas porções AC e BC da corda.

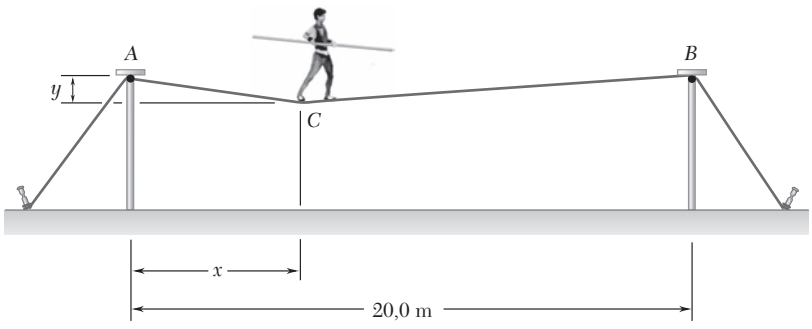


Figura P2.C3

2.C4 Desenvolva um programa de computador que possa ser usado para determinar a intensidade e direção da resultante de n forças $\mathbf{F}_i$, onde $i = 1, 2, \ldots, n$, que são aplicadas no ponto A_0 de coordenadas x_0, y_0 e z_0, sabendo que a linha de ação de $\mathbf{F}_i$, passa através do ponto A_i de coordenadas x_i, y_i e z_i. Use esse programa para resolver os Problemas 2.93, 2.94, 2.95 e 2.135.

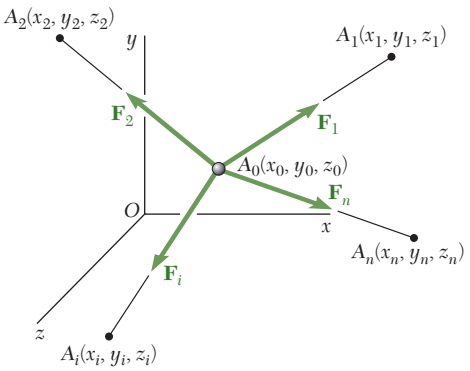


Figura P2.C4

2.C5 Três cabos são fixados respectivamente aos pontos A_1, A_2 e A_3 e conectados ao ponto A_0, no qual é aplicada uma carga $\mathbf{P}$ como mostrado na figura. Desenvolva um programa de computador que possa ser usado para determinar a tensão de cada um dos cabos. Use este programa para resolver os Problemas 2.102, 2.106, 2.107 e 2.115.

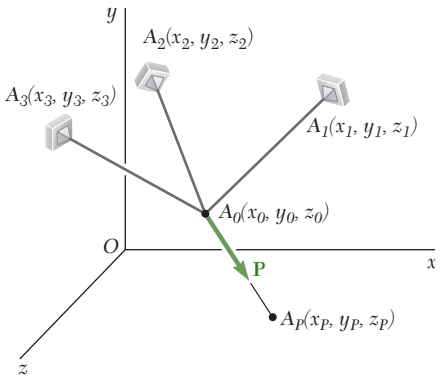


Figura P2.C5

O encouraçado USS *New Jersey* é manobrado por quatro rebocadores no porto naval de Bremerton. Neste capítulo, mostraremos que as forças exercidas pelos quatro rebocadores sobre o navio poderiam ser substituídas por uma única força equivalente exercida por um rebocador potente.

CAPÍTULO 3

Corpos rígidos: emas equivalentes de forças

3 Corpos rígidos: sistemas equivalentes de forças

3.1 Introdução
3.2 Forças externas e forças internas
3.3 Princípio da transmissibilidade e forças equivalentes
3.4 Produto vetorial de dois vetores
3.5 Produtos vetoriais expressos em termos de componentes retangulares
3.6 Momento de uma força em relação a um ponto
3.7 Teorema de Varignon
3.8 Componentes retangulares do momento de uma força
3.9 Produto escalar de dois vetores
3.10 Produto triplo misto de três vetores
3.11 Momento de uma força em relação a um dado eixo
3.12 Momento de um binário
3.13 Binários equivalentes
3.14 Adição de binários
3.15 Binários podem ser representados por vetores
3.16 Substituição de uma dada força por uma força em o e um binário
3.17 Redução de um sistema de forças a uma força e um binário
3.18 Sistemas equivalentes de forças
3.19 Sistemas equipolentes de vetores
3.20 Casos particulares de redução de um sistema de forças
3.21 Redução de um sistema de forças a um torsor

3.1 Introdução

No capítulo anterior, admitiu-se que cada corpo considerado poderia ser tratado como uma única partícula. Tal ponto de vista, porém, nem sempre é possível, e um corpo, em geral, deve ser tratado como uma combinação de um grande número de partículas. O tamanho do corpo terá de ser levado em conta, bem como o fato de que as forças atuarão sobre partículas diferentes e, portanto, terão diferentes pontos de aplicação.

Na maior parte dos casos, os corpos considerados em mecânica elementar são *rígidos*, sendo um *corpo rígido* aquele que não se deforma. No entanto, as estruturas e máquinas reais nunca são absolutamente rígidas e se deformam sob a ação das cargas a que estão sujeitas. Essas deformações, contudo, geralmente são pequenas e não afetam de modo apreciável as condições de equilíbrio ou movimento da estrutura em consideração. São importantes, por outro lado, na medida em que a resistência da estrutura a falhas é levada em consideração, e são estudadas em mecânica dos materiais.

Neste capítulo, você estudará o efeito de forças exercidas sobre um corpo rígido e aprenderá a substituir um dado sistema de forças por um sistema equivalente mais simples. Essa análise terá por base o pressuposto fundamental: o efeito de uma dada força sobre um corpo rígido permanece inalterado se essa força for deslocada ao longo da sua linha de ação (*princípio da transmissibilidade*). Por conseguinte, forças que atuam sobre um corpo rígido podem ser representadas por *vetores deslizantes*, como indicamos anteriormente na Seção 2.3.

Dois conceitos importantes associados ao efeito de uma força sobre um corpo rígido são o *momento de uma força em relação a um ponto* (Seção 3.6) e o *momento de uma força em relação a um eixo* (Seção 3.11). Uma vez que a determinação dessas grandezas envolve o cálculo de produtos vetoriais e produtos escalares de dois vetores, os fundamentos de álgebra vetorial serão apresentados neste capítulo e aplicados na solução de problemas que envolvam forças que atuam sobre corpos rígidos.

Outro conceito importante apresentado neste capítulo é o de *binário*, ou seja, a combinação de duas forças de mesma intensidade, linhas de ação paralelas e sentido oposto (Seção 3.12). Como você verá, qualquer sistema de forças que atuam sobre um corpo rígido pode ser substituído por um sistema equivalente que consista em uma força que atua em um dado ponto e um binário. Esse sistema básico é denominado *sistema força-binário*. No caso de forças paralelas, coplanares ou concorrentes, o sistema força-binário equivalente pode ainda ser reduzido a uma única força, denominada *resultante* do sistema, ou a um único binário, denominado *binário resultante* do sistema.

3.2 Forças externas e forças internas

As forças que atuam sobre corpos rígidos podem ser separadas em dois grupos: *(1) forças externas* e *(2) forças internas:*

1. As *forças externas* representam a ação de outros corpos sobre o corpo rígido em consideração. São inteiramente responsáveis pelo comportamento externo do corpo rígido. As forças externas vão causar o movimento do corpo ou garantir que ele permaneça em repouso. Neste capítulo e nos Caps. 4 e 5, vamos nos preocupar apenas com forças externas.

2. As *forças internas* são as forças que mantêm juntas as partículas que formam o corpo rígido. Se o corpo rígido é composto estruturalmente de várias partes, as forças que mantêm juntas as partes componentes também são definidas como forças internas. As forças internas serão estudadas nos Caps. 6 e 7.

Como exemplo de forças externas, consideremos as forças atuantes sobre um caminhão enguiçado que três pessoas puxam para frente por meio de uma corda amarrada no para-choque dianteiro (Fig. 3.1). As forças externas que atuam sobre o caminhão estão mostradas em um *diagrama de corpo livre* (Fig. 3.2). Consideremos primeiro o *peso* do caminhão. Embora ele englobe o efeito da atração da Terra sobre cada uma das partículas que compõem o caminhão, o peso pode ser representado por uma única força **W**. O *ponto de aplicação* desta força, isto é, o ponto onde a força atua, é definido como sendo o *centro de gravidade* do caminhão. Veremos no Cap. 5 como determinar os centros de gravidade. O peso **W** tende a mover o caminhão verticalmente para baixo. De fato, ele realmente faria o caminhão mover-se para baixo, isto é, cair, não fosse a presença do solo. O solo opõe-se ao movimento descendente do caminhão por meio das reações $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$. Essas forças são exercidas *pelo* solo *sobre* o caminhão e, portanto, devem ser incluídas entre as forças externas que agem sobre o caminhão.

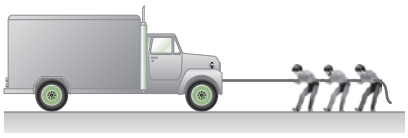


Figura 3.1

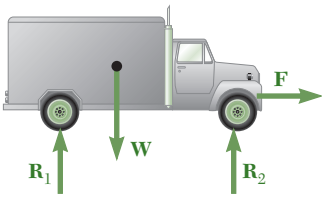


Figura 3.2

As pessoas que puxam a corda exercem uma força **F**. O ponto de aplicação de **F** está sobre o para-choque dianteiro. A força **F** tende a mover o caminhão para frente em linha reta e realmente, o fará, já que não há forças externas opondo-se a esse movimento. (Para simplificar, desprezamos aqui a resistência de rolamento.) Esse movimento do caminhão para frente, durante o qual cada linha reta mantém sua orientação original (o assoalho do caminhão permanece na horizontal e a carroceria permanece na vertical) é conhecido como *translação*. Outras forças podem causar no caminhão um tipo diferente de movimento. Por exemplo, a força exercida por um macaco colocado sob o eixo dianteiro faria o caminhão girar em torno do eixo traseiro. Tal movimento denomina-se *rotação*. Logo, pode-se concluir que cada uma das *forças externas* que atuam sobre um *corpo rígido* pode, caso não seja contrabalançada, imprimir ao corpo rígido um movimento de translação ou de rotação, ou ambos.

3.3 Princípio da transmissibilidade e forças equivalentes

O *princípio da transmissibilidade* estabelece que as condições de equilíbrio ou movimento de um corpo rígido permanecerão inalteradas se uma força **F** que atue em um dado ponto do corpo rígido for substituída por uma força **F′** de intensidade, direção e sentido iguais, mas atuando em um ponto diferente, *desde que essas duas forças tenham igual linha de ação* (Fig. 3.3). As duas forças **F** e **F′** têm o mesmo efeito sobre o corpo rígido, e diz-se que são *equivalentes*. O princípio da transmissibilidade, que estabelece que a ação de uma força pode ser *transmitida* ao longo da sua linha de ação, está baseado em evidência experimental; Esse princípio *não pode* ser deduzido das propriedades estabelecidas até aqui neste texto e, portanto, deve ser aceito como uma lei experimental. Todavia, como veremos na Seção 16.5, o princípio da transmissibilidade pode ser deduzido do estudo da dinâmica dos corpos rígidos, mas, para esse estudo, é necessária a introdução da segunda e da terceira leis de Newton,

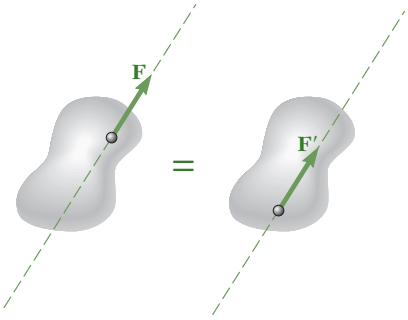


Figura 3.3

bem como de uma gama de outros conceitos. Logo, nosso estudo da estática dos corpos rígidos será baseado nos três princípios apresentados até agora, ou seja, a lei do paralelogramo de adição, a primeira lei de Newton e o princípio da transmissibilidade.

No Cap. 2, indicamos que as forças atuantes sobre uma partícula podem ser representadas por vetores. Esses vetores tinham um ponto de aplicação bem definido, a saber, a própria partícula e, portanto, eram vetores fixos. No caso de forças que atuam sobre um corpo rígido, porém, o ponto de aplicação da força não importa desde que a linha de ação permaneça inalterada. Logo, forças que atuam sobre um corpo rígido devem ser representadas por um tipo diferente de vetor, denorninado *vetor deslizante*, pois as forças são livres para deslizar ao longo de suas linhas de ação. Devemos notar que todas as propriedades a ser deduzidas nas próximas seções para as forças que atuam sobre um corpo rígido serão válidas de modo mais geral para qualquer sistema de vetores deslizantes. Todavia, a fim de manter nossa exposição mais intuitiva, iremos obtê-las em termos de forças físicas em vez de vetores deslizantes matemáticos.

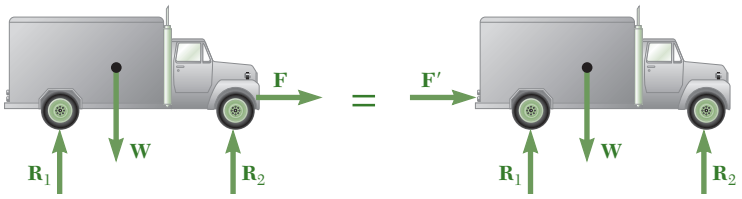


Figura 3.4

Retornando ao exemplo do caminhão, observemos primeiro que a linha de ação da força **F** é uma linha horizontal que passa através do para-choque dianteiro e traseiro (Fig. 3.4). Aplicando o princípio da transmissibilidade, podemos então substituir **F** por uma *força equivalente* **F′** que atua sobre o para-choque traseiro. Em outras palavras, as condições de movimento não são afetadas e todas as outras forças externas que atuam sobre o caminhão (**W**, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$) permanecem inalteradas se as pessoas empurrarem pelo para-choque traseiro em vez de puxar pelo para-choque dianteiro do caminhão.

Contudo, o princípio da transmissibilidade e o conceito de forças equivalentes têm limitações. Considere, por exemplo, uma barra curta *AB* sujeita a forças axiais iguais e opostas $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, como mostra a Fig. 3.5*a*. De acordo com o princípio da transmissibilidade, a força $\mathbf{P}_2$ pode ser substituída por uma força $\mathbf{P}'_2$ com a mesma intensidade, a mesma linha

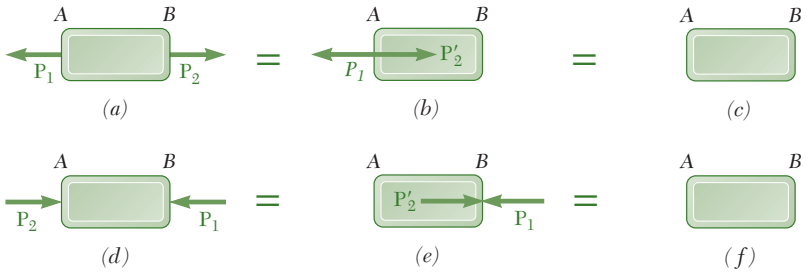


Figura 3.5

de ação e o mesmo sentido, mas atuando em A em vez de B (Fig. 3.5*b*). As forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ que atuam sobre a mesma partícula podem ser adicionadas de acordo com as regras do Cap. 2 e, como essas forças são iguais e opostas, sua soma é igual a zero. Logo, em termos do comportamento externo da barra, o sistema original de forças mostrado na Fig. 3.5*a* é equivalente a nenhuma força aplicada (Fig. 3.5*c*).

Considere agora as duas forças iguais e opostas $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ atuando sobre a barra AB, como mostra a Fig. 3.5*d*. A força $\mathbf{P}_2$ pode ser substituída por uma força $\mathbf{P}'_2$ de igual intensidade, igual linha de ação e sentido, mas atuando em B em vez de em A (Fig. 3.5*e*). As forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}'_2$ podem então ser adicionadas e sua soma é de novo zero (Fig. 3.5*f*). Logo, do ponto de vista da mecânica dos corpos rígidos, os sistemas mostrados na Fig. 3.5*a* e *d* são equivalentes. Mas *as forças internas* e as *deformações* produzidas pelos dois sistemas são nitidamente diferentes. A barra da Fig. 3.5*a* está sob *tração* e, não sendo absolutamente rígida, irá aumentar ligeiramente de comprimento; a barra da Fig. 3.5*d* está sob *compressão* e, não sendo absolutamente rígida, irá diminuir ligeiramente de comprimento. Portanto, o princípio da transmissibilidade, embora possa ser usado livremente na determinação das condições de movimento ou de equilíbrio de corpos rígidos e no cálculo das forças externas que atuam sobre esses corpos, deve ser evitado ou, pelo menos, utilizado com cuidado na determinação de forças internas e deformações.

3.4 Produto vetorial de dois vetores

A fim de compreendermos melhor o efeito de uma força sobre um corpo rígido, vamos apresentar agora um novo conceito, o conceito de *momento de uma força em relação a um ponto.* Esse conceito será mais bem compreendido e aplicado de maneira mais eficaz se antes acrescentarmos às ferramentas matemáticas de que dispomos o *produto vetorial* de dois vetores.

O produto vetorial de dois vetores **P** e **Q** é definido como o vetor **V** que satisfaz às seguintes condições.

1. A linha de ação de **V** é perpendicular ao plano que contém **P** e **Q** (Fig. 3.6*a*).
2. A intensidade de **V** é o produto das intensidades de **P** e **Q** e do seno do ângulo θ formado por **P** e **Q** (cujo valor será sempre menor ou igual a 180°); temos então:

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta \tag{3.1}$$

3. A direção e o sentido de **V** são obtidos pela regra *da mão direita.* Feche a mão direita e posicione-a de modo que seus dedos se curvem no mesmo sentido da rotação em θ que leva o vetor **P** a alinhar-se com o vetor **Q**; seu polegar irá então indicar a direção e o sentido do vetor **V** (Fig. 3.6*b*). Observe que, se não tiverem um ponto comum de aplicação, **P** e **Q** deverão primeiro ser redesenhados com as origens no mesmo ponto. Os três vetores **P**, **Q** e **V** – tomados nesta ordem – formam uma *tríade orientada diretamente.**

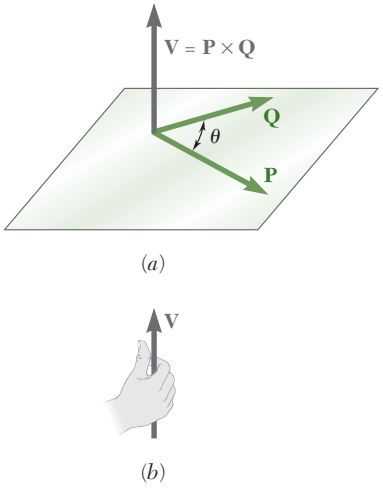


Figura 3.6

* Devemos observar que os eixos x, y e z usados no Cap. 2 formam um sistema de eixos ortogonais orientado diretamente e que os vetores unitários i, j e k definidos na Seção 2.12 formam uma tríade ortogonal orientada diretamente.

Conforme mencionamos anteriormente, o vetor **V** que satisfaz essas três condições (que o definem univocamente) é citado como o produto vetorial de **P** e **Q**; esse vetor é representado pela expressão matemática

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \tag{3.2}$$

Por causa da notação que usamos o protudo vetorial dos vetores **P** e **Q** é chamado de *produto vetorial* de **P** e **Q**.

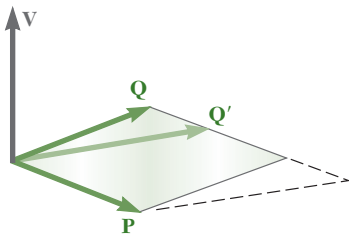


Figura 3.7

Tem-se da Eq. (3.1) que, quando dois vetores **P** e **Q** têm a mesma direção e sentidos iguais ou opostos, seu produto vetorial é nulo. No caso geral em que o ângulo θ formado pelos dois vetores não é 0° nem 180°, é possível fornecer uma interpretação geométrica simples da Eq. (3.1): a intensidade V do produto vetorial de **P** e **Q** é igual à área do paralelogramo que tem **P** e **Q** como lados (Fig. 3.7). Logo, o produto vetorial $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ ficará inalterado se substituirmos **Q** por um vetor **Q′** coplanar com **P** e **Q** e tal que a linha que une as pontas de **Q** e **Q′** seja paralela a **P**. Escrevemos

$$\mathbf{V}=\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}' \tag{3.3}$$

Da terceira condição usada para definir o produto vetorial **V** de **P** e **Q**, ou seja, a condição que estabelece que **P**, **Q** e **V** devam formar uma tríade orientada diretamente, conclui-se que os produtos vetoriais *não são comutativos,* ou seja, $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ não é igual a $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$. De fato, podemos constatar facilmente que $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ é representado pelo vetor $-\mathbf{V}$, que é igual e oposto a **V**. Escrevemos então

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.4}$$

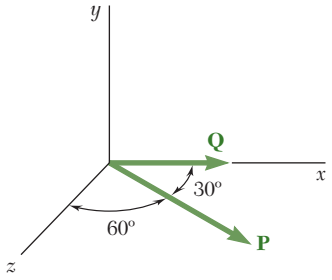


Figura 3.8

EXEMPLO Vamos calcular o produto vetorial $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$, onde o vetor **P** tem intensidade 6 e está no plano *zx* a um ângulo de 30° com o eixo *x*, e onde o vetor **Q** é de intensidade 4 e está sobre o eixo *x* (Fig. 3.8).

Segue-se diretamente da definição de produto vetorial que o vetor **V** deve estar ao longo do eixo *y,* deve ter a intensidade

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta = (6)(4) \operatorname{sen} 30^\circ = 12$$

e deve estar direcionado para cima. ■

Vimos que propriedade comutativa não se aplica aos produtos vetoriais. Podemos nos perguntar se a propriedade *distributiva* vale, ou seja, se a relação

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \tag{3.5}$$

é válida. A resposta é *sim.* Muitos leitores provavelmente estarão propensos a aceitar sem demonstração formal uma resposta que eles intuitivamente julgam correta. Entretanto, como toda a estrutura tanto da álgebra vetorial como da estática depende da relação (3.5), devemos despender um tempo em deduzi-la

Sem perder o caráter geral da operação, podemos admitir que **P** esteja dirigido ao longo do eixo *y* (Fig. 3.9*a*). **Q** represente a soma de $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$, traçamos então perpendiculares a partir das pontas de **Q**, $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ até o plano *zx*, definindo desse modo os vetores $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{Q}'_1$ e $\mathbf{Q}'_2$. Esses vetores serão chamados, respectivamente, de *projeções* de **Q**, $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ sobre o plano *zx*. Retomando a propriedade expressa pela Eq. (3.3), notamos que

o primeiro membro da Eq. (3.5) pode ser substituído por $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$; analogamente, os produtos vetoriais $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2$ podem ser substituídos, respectivamente, por $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1$ e $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2$. Logo, à relação a ser demonstrada pode ser escrita na forma

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q}' = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2 \qquad (3.5')$$

Observamos agora que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$ pode ser obtido a partir de $\mathbf{Q}'$, multiplicando-se este vetor pelo escalar P e girando-o 90° no sentido anti-horário no plano zx (Fig. 3.9*b*); os outros dois produtos vetoriais na Eq. (3.5′) podem ser obtidos da mesma forma a partir de $\mathbf{Q}'_1$ e $\mathbf{Q}'_2$,

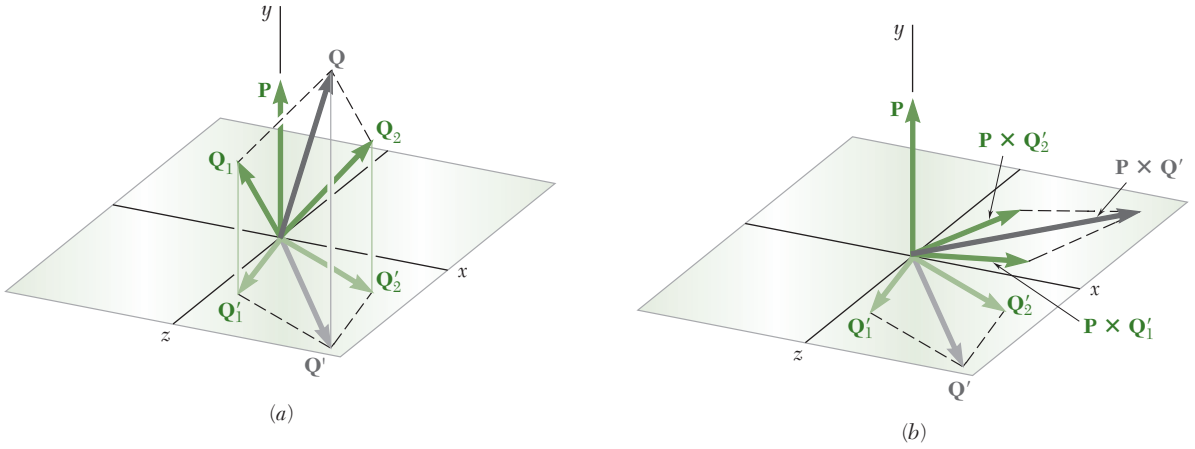


Figura 3.9

respectivamente. Agora, como a projeção de um paralelogramo sobre um plano arbitrário é um paralelogramo, a projeção $\mathbf{Q}'$ da soma $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ deve ser a soma das projeções $\mathbf{Q}'_1$ e $\mathbf{Q}'_2$ de $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ sobre o mesmo plano (Fig. 3.9*a*). Esta relação entre os vetores $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{Q}'_1$ e $\mathbf{Q}'_2$ ainda será válida depois que os três vetores tenham sido multiplicados pelo escalar P e girados 90° (Fig. 3.9*b*). Logo, a relação (3.5′) está demonstrada, e podemos agora estar seguros de que a propriedade distributiva vale para os produtos vetoriais.

Uma terceira propriedade, a propriedade associativa, não se aplica aos produtos vetoriais; em geral, temos

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \qquad (3.6)$$

3.5 Produtos vetoriais expressos em termos de componentes retangulares

Vamos determinar agora o produto vetorial de dois vetores unitários quaisquer entre **i**, **j** e **k**, definidos no Cap. 2. Considere primeiro o produto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (Fig. 3:10*a*). Como ambos os vetores têm intensidade igual a 1, e como formam um ângulo reto entre si, seu produto vetorial também será um vetor unitário. Esse vetor unitário será **k**, pois os vetores **i**, **j** e **k** são mutuamente perpendiculares e formam uma tríade orientada diretamente. Por outro lado, resulta da regra da mão direita, mencionada na Seção 3.4 – Produto vetorial de dois vetores, que o produto $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ será

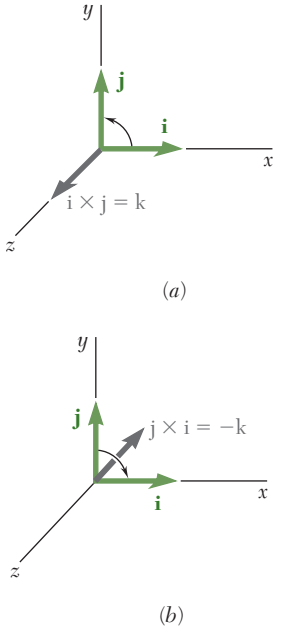


Figura 3.10

igual a $-\mathbf{k}$ (Fig. 3.10*b*). Finalmente, deve-se observar que o produto vetorial de um vetor unitário por si próprio, tal como $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, é igual a zero, pois ambos os vetores têm a mesma direção. Os produtos vetoriais dos vários pares possíveis de vetores unitários são

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array} \tag{3.7}$$

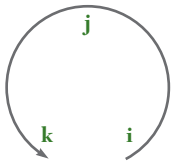


Figura 3.11

Arranjando as três letras que representam os vetores unitários em um círculo, em ordem anti-horária (Fig. 3.11), podemos simplificar a determinação do sinal do produto vetorial de dois vetores unitários. O produto vetorial de dois vetores unitários será positivo se ambos seguirem um ao outro em ordem anti-horária e será negativo se seguirem um ao outro em ordem horária.

Podemos agora expressar o produto vetorial $\mathbf{V}$ de dois vetores dados $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ em termos dos componentes retangulares desses vetores. Decompondo $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$, escrevemos primeiro

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \times (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

Usando a propriedade distributiva, expressamos $\mathbf{V}$ como uma soma de produtos vetoriais, tais como $P_x\mathbf{i} \times Q_y\mathbf{j}$. Uma vez que cada uma das expressões obtidas é igual ao produto vetorial de dois vetores unitários, tais como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, multiplicado pelo produto de dois escalares, tais como P_xQ_y, e retomando as identidades (3.7), obtemos, após a fatoração de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$,

$$\mathbf{V} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k} \tag{3.8}$$

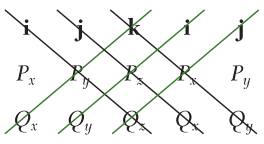
Os componentes retangulares do produto vetorial $\mathbf{V}$ são determinados então como

$$\begin{aligned} V_x &= P_yQ_z - P_zQ_y \\ V_y &= P_zQ_x - P_xQ_z \\ V_z &= P_xQ_y - P_yQ_x \end{aligned} \tag{3.9}$$

Retornando à Eq. (3.8), observamos que o segundo elemento representa a expansão de um determinante. O produto vetorial $\mathbf{V}$ pode então ser representado na seguinte forma, mais fácil de memorizar.*

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

* Qualquer determinante que consista em três linhas e três colunas pode ser calculado repetindo-se a primeira e a segunda colunas e formando-se os produtos ao longo de cada linha diagonal. A soma dos produtos obtidos ao longo das linhas é então subtraída da soma dos produtos obtidos ao longo das linhas em preto.



3.6 Momento de uma força em relação a um ponto

Vamos considerar agora uma força **F** que atua sobre um corpo rígido (Fig. 3.12*a*). Como sabemos, a força **F** é representada por um vetor que define sua intensidade, sua direção e seu sentido. Entretanto, o efeito da força sobre o corpo rígido depende também do seu ponto de aplicação *A*. A posição de *A* pode ser convenientemente definida pelo vetor **r** que liga o ponto de referência fixo *O* com *A*; esse vetor é conhecido como *vetor posição* de *A*.* O vetor posição **r** e a força **F** definem o plano mostrado na Fig. 3.12*a*.

Vamos definir o *momento de* **F** *em relação a O* como o produto vetorial de **r** e **F**:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

De acordo com a definição de produto vetorial dada na Seção 3.4, o momento $\mathbf{M}_O$ deve ser perpendicular ao plano que contém *O* e a força **F**. O sentido de $\mathbf{M}_O$ é definido pelo sentido da rotação que faz o vetor **r** ficar alinhado com o vetor **F**; essa rotação será vista como *anti-horária* por um observador localizado na ponta de $\mathbf{M}_O$. Outro modo de se definir o sentido de $\mathbf{M}_O$ é fornecido por uma variação da regra da mão direita: feche a mão direita e á posicione de modo que seus dedos fiquem curvados no sentido da rotação que **F** imprimiria ao corpo rígido em relação a um eixo fixo dirigido ao longo da linha de ação de $\mathbf{M}_O$; seu polegar irá indicar o sentido do momento $\mathbf{M}_O$ (Fig. 3.12*b*).

Finalmente, representando por θ o ângulo formado entre as linhas de ação do vetor posição **r** e a força **F**, concluímos que a intensidade do momento de **F** em relação a *O* é

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.12}$$

onde *d* representa a distância perpendicular de *O* até a linha de ação de **F**. Como a tendência de uma força **F** de fazer um corpo rígido girar em torno de um eixo fixo perpendicular à força depende da distância de **F** desse eixo bem como da intensidade de **F**, notamos que *a intensidade de* $\mathbf{M}_O$ *mede a tendência de uma força* **F** *de fazer o corpo rígido girarem torno de um eixo fixo dirigido ao longo de* $\mathbf{M}_O$.

No Sistema Internacional de Unidades, no qual a força é expressa em newtons (N) e a distância em metros (m), o momento de uma força é expresso em newton-metros (N · m). No sistema usual de unidades dos EUA, onde a força é expressa em libras e a distância em pés ou polegadas, o momento de uma força é expresso em lb · ft ou lb · in.

Podemos observar que, embora o momento $\mathbf{M}_O$ de uma força em relação a um ponto dependa da intensidade, da linha de ação e do sentido da força, ele *não* depende da posição real do ponto de aplicação da força ao longo da sua linha de ação. De modo inverso, o momento $\mathbf{M}_O$ de uma força **F** não caracteriza a posição do ponto de aplicação de **F**.

Todavia, como veremos agora, o momento $\mathbf{M}_O$ de uma força **F** de intensidade, direção e sentido conhecidos *define completamente a linha*

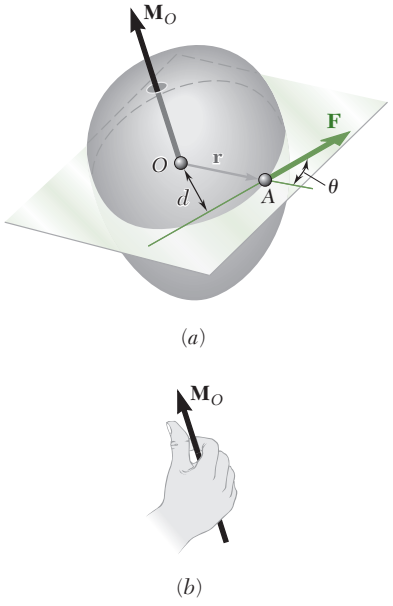


Figura 3.12

* Podemos facilmente verificar que os vetores posição obedecem à lei da adição de vetores e, portanto, são vetores verdadeiros. Considere, por exemplo, os vetores posição **r** e **r′** de *A* com relação a dois pontos de referência *O* e *O′* e o vetor posição **s** de *O* com relação a *O′* (Fig. 3.40*a*, Seção 3.16). Verificamos que o vetor posição $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'A}$ pode ser obtido dos vetores posição $\mathbf{s} = \overrightarrow{OO'}$ e $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$, aplicando-se a regra do triângulo para adição de vetores.

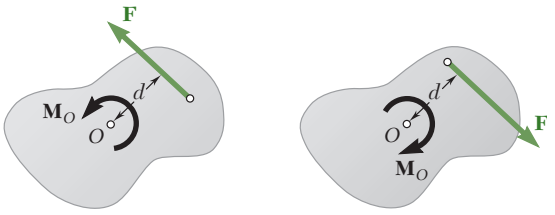
de ação de **F**. De fato, a linha de ação de **F** deve estar em um plano que contenha *O* e ser perpendicular ao momento $\mathbf{M}_O$; sua distância *d* de *O* deve ser igual ao quociente M_O / F das intensidades de $\mathbf{M}_O$ e F; e o sentido de $\mathbf{M}_O$ determina se a linha de ação de **F** deve ser traçada de um lado ou de outro do ponto *O*.

Lembremos, da Seção 3.3, que o princípio da transmissibidade estabelece que duas forças **F** e **F′** são equivalentes (isto é, têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido) se tiverem a mesma intensidade, a mesma linha de ação e o mesmo sentido. Esse princípio pode agora ser reescrito da seguinte maneira: *duas forças* **F** *e* **F′** *são equivalentes se, e somente se, forem iguais* (isto é, se tiverem a mesma intensidade, a mesma direção e o mesmo sentido) *e têm momentos iguais em relação a um dado ponto O.* Logo, as condições necessárias e suficientes para que duas forças **F** e **F′** sejam equivalentes são

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \qquad \text{e} \qquad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O \tag{3.13}$$

Devemos observar, a partir desse enunciado, que, se as relações (3.13) valem para um dado ponto *O*, irão valer para qualquer outro ponto.

Problemas envolvendo apenas duas dimensões. Muitas aplicações lidam com estruturas bidimensionais, ou seja, estruturas que têm comprimento e largura, mas profundidade desprezível e estão sujeitas a forças contidas no plano da estrutura. Estruturas bidimensionais e as forças que atuam sobre elas podem ser diretamente representadas em uma folha de papel ou em um quadro negro. Sua análise, portanto, é consideravelmente mais simples que a das estruturas e forças tridimensionais.



(*a*) $M_O = +\text{Fd}$ (*b*) $M_O = -\text{Fd}$

Figura 3.13

Considere, por exemplo, uma placa rígida sujeita a uma força **F** (Fig. 3.13). O momento de **F** em relação a um ponto *O* escolhido no plano da figura é representado por um vetor $\mathbf{M}_O$ de intensidade *Fd*, perpendicular ao plano. No caso da Fig. 3.13*a*, o vetor $\mathbf{M}_O$ aponta *para fora* do papel, enquanto no caso da Fig. 3.13*b* ele aponta *para dentro* do papel. Olhando para a figura, observamos, no primeiro caso, que **F** tende a girar a placa no sentido anti-horário e, no segundo caso, que ela tende a girar a placa no sentido horário. Logo, é natural referir-se ao sentido do momento de **F** em relação a *O* na Fig. 3.13*a* como anti-horário ↰, e na Fig. 3.13*b* como horário ↲.

Como o momento de uma força **F** que atua no plano da figura deve ser perpendicular a esse plano, precisamos especificar apenas a *intensidade* e o *sentido* do momento de **F** em relação a *O*. Isso pode ser feito atribuindo-se à intensidade $\mathbf{M}_O$ do momento um sinal positivo ou negativo conforme o vetor $\mathbf{M}_O$ aponte para fora ou para dentro do papel.

3.7 Teorema de Varignon

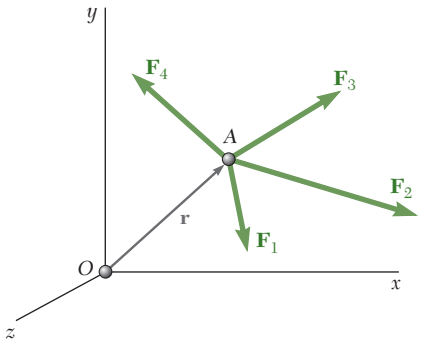


Figura 3.14

A propriedade distributiva dos produtos vetoriais pode ser usada para determinar o momento da resultante de várias *forças concorrentes*. Se várias forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., são aplicadas ao mesmo ponto A (Fig. 3.14) e se representarmos por $\mathbf{r}$ o vetor posição de A, segue-se imediatamente da Eq. (3.5) da Seção 3.4 que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \cdots \tag{3.14}$$

Em palavras, *o momento em relação a um dado ponto O da resultante de diversas forças concorrentes é igual à soma dos momentos das várias forças em relação ao mesmo ponto O.* Esta propriedade, que foi originalmente estabelecida pelo matemático francês Pierre Varignon (1654–1722) bem antes da introdução da álgebra vetorial, é conhecida como *teorema de Varignon.*

A relação (3.14) torna possível a substituição da determinação direta do momento de uma força $\mathbf{F}$ pela determinação dos momentos de duas ou mais forças componentes. Como você verá na próxima seção, $\mathbf{F}$ geralmente será decomposta em componentes paralelos aos eixos de coordenadas. Todavia, pode ser mais rápido em algumas circunstâncias decompor $\mathbf{F}$ em componentes que não sejam paralelos aos eixos de coordenadas (ver Problema Resolvido 3.3).

3.8 Componentes retangulares do momento de uma força

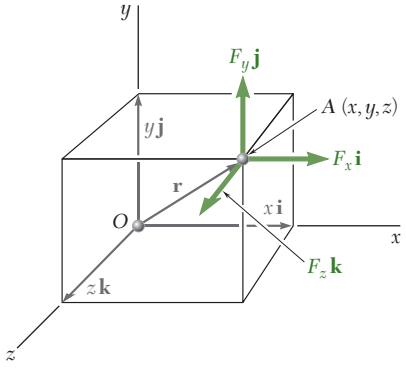


Figura 3.15

Em geral, a determinação do momento de uma força no espaço será consideravelmente simplificada se a força e o vetor posição do seu ponto de aplicação forem decompostos em componentes retangulares x, y *e* z. Considere, por exemplo, o momento $\mathbf{M}_O$ em relação a O de uma força $\mathbf{F}$ cujos componentes são F_x, F_y e F_z e que é aplicada a um ponto A de coordenadas x, y e z (Fig. 3.15). Observando que os componentes do vetor posição $\mathbf{r}$ são respectivamente iguais às coordenadas x, y *e* z do ponto A, escrevemos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.15}$$
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{3.16}$$

Substituindo as expressões para $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$ das Eqs. (3.15) e (3.16) em

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

e retomando os resultados obtidos na Seção 3.5, escrevemos o momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ em relação a O na seguinte forma

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \tag{3.17}$$

onde os componentes M_x, M_y e M_z são definidos pelas relações

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

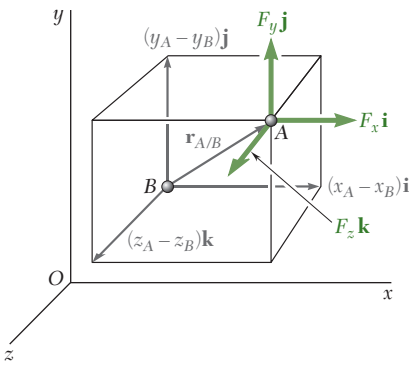


Figura 3.16

Como você verá na Seção 3.11, os componentes escalares M_x, M_y e M_z do momento $\mathbf{M}_O$ medem a tendência da força $\mathbf{F}$ de imprimir a um corpo rígido um movimento de rotação em tomo dos eixos x, y e z, respectivamente. Substituindo a Eq. (3.18) na Eq. (3.17), podemos também escrever $\mathbf{M}_O$ na forma de um determinante

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

Para calcular o momento $\mathbf{M}_B$ em relação a um ponto B arbitrário de uma força $\mathbf{F}$ aplicada em A (Fig. 3.16), devemos substituir o vetor posição $\mathbf{r}$ na Eq. (3.11) por um vetor traçado de B até A. Esse vetor é o *vetor posição de A com relação a B* e será representado por $\mathbf{r}_{A/B}$. Observando que $\mathbf{r}_{A/B}$ pode ser obtido subtraindo-se $\mathbf{r}_B$ de $\mathbf{r}_A$, temos:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \tag{3.20}$$

ou, usando a forma de determinante

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.21}$$

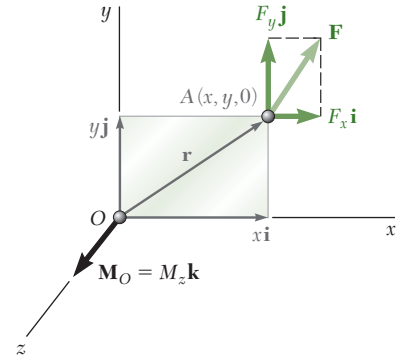


Figura 3.17

onde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ e $z_{A/B}$ representam os componentes do vetor $\mathbf{r}_{A/B}$

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

No caso de *problemas que envolvam apenas duas dimensões*, pode-se admitir que a força $\mathbf{F}$ esteja no plano xy (Fig. 3.17). Tornando $z = 0$ e $F_z = 0$ na Eq. (3.19), obtemos:

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

Verificamos que o momento de $\mathbf{F}$ em relação a O é perpendicular ao plano da figura e é completamente definido pelo escalar:

$$\mathbf{M_O} = M_x = xF_y - yF_x \tag{3.21}$$

Conforme observamos anteriormente, um valor positivo de M_O indica que o vetor $\mathbf{M}_O$ aponta para fora do papel (a força $\mathbf{F}$ tende a girar o corpo no sentido anti-horário em torno de O) e um valor negativo indica que o vetor $\mathbf{M}_O$ aponta para dentro do papel (a força $\mathbf{F}$ tende a girar o corpo no sentido horário em torno de O).

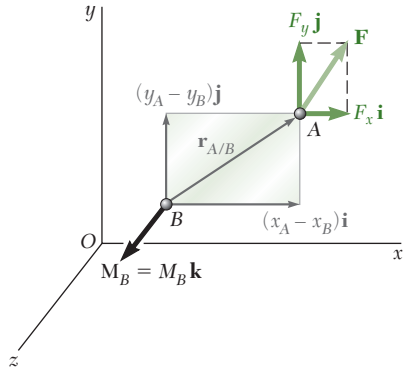
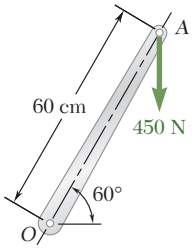


Figura 3.18

Para calcular o momento em relação a B (x_B, y_B) de uma força situada no plano xy e aplicada em A (x_A, y_A) (Fig. 3.18), estabelecemos que $z_{A/B} = 0$ e $F_z = 0$ nas relações (3.21), e observamos que o vetor $\mathbf{M}_B$ é perpendicular ao plano xy e é definido em intensidade e sentido pelo escalar

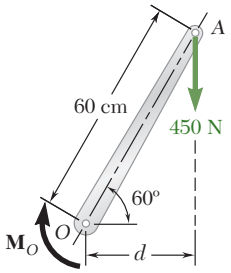
$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \tag{3.23}$$



PROBLEMA RESOLVIDO 3.1

Uma força vertical de 450 N é aplicada na extremidade de um alavanca que está ligada a um eixo em *O*. Determine (a) o momento da força de 450 N em relação a *O*; (b) a força horizontal aplicada em *A* que gera o mesmo momento em ralação, a *O*; (c) a força mínima aplicada em *A* que gera o mesmo momento em relação a *O*; (d) a que distância do eixo deve atuar uma força vertical de 1.080 N para gerar o mesmo momento em relação a *O*; (e) se alguma das forças obtidas nas parte *b*, *c* e *d* é a força original.

SOLUÇÃO



a. Momento em relação a O. A distância perpendicular de *O* até a linha de ação da força de 450 N é:

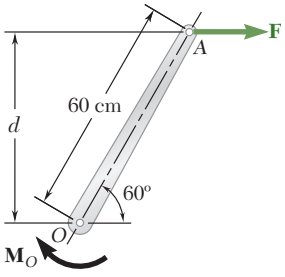
$$d = (60\text{ cm})\cos 60° = 30\text{ cm}$$

A intensidade do momento da força de 450 N em relação a *O* é:

$$M_O = Fd = (450\text{ N})(0{,}3\text{ m}) = 135\text{ N}\cdot\text{m}$$

Como a força tende girar a alavanca no sentido horário em torno de *O*, o momento será representeado pelo vetor $\mathbf{M}_O$ perpendicular ao plano de figura e apontando para dentro do papel. Expressamos esse fato da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_O = 135\text{ N}\cdot\text{m}\ \curvearrowright \quad \blacktriangleleft$$

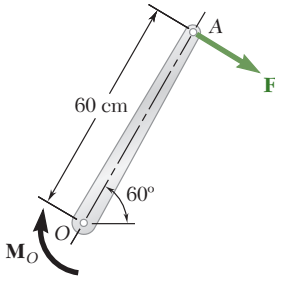


b. Força horizontal. Neste caso, temos:

$$d = (60\text{ cm})\ \text{sen}\ 60° = 52\text{ cm}$$

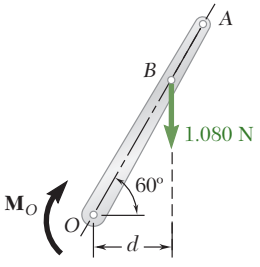
Como o momento em relação a *O* deve ser de 135 N · m, escrevemos:

$$M_O = Fd$$
$$135\text{ N}\cdot\text{m} = F(0{,}52\text{ m})$$
$$F = 259{,}6\text{ N} \qquad \mathbf{F} = 259{,}6\text{ N}\rightarrow \quad \blacktriangleleft$$



c. Força mínima. Como $M_O = Fd$, o valor mínimo da força *F* ocorrerá quando d for máximo. Escolhemos a força perpendicular a *OA* e vemos que *d* = 60 com; logo,

$$M_O = Fd$$
$$135\text{ N}\cdot\text{m} = F(0{,}6\text{ m})$$
$$F = 225\text{ N} \qquad \mathbf{F} = 225\text{ N}\ \measuredangle 30° \quad \blacktriangleleft$$

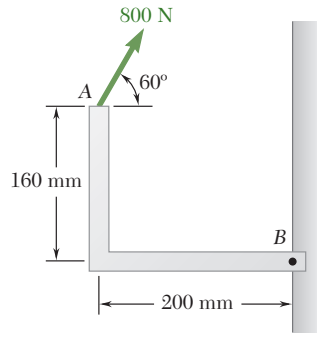


d. Força vertical de 1.080 N. Neste caso, $M_O = Fd$ fornece:

$$135\text{ N}\cdot\text{m} = (1.080\text{ N})d \qquad d = 0{,}125\text{ N}$$

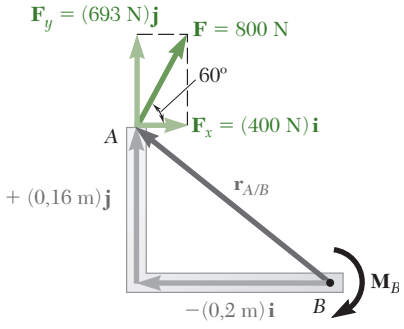
mas $OB\cos 60° = d$ $\qquad OB = 25\text{ cm}$ $\blacktriangleleft$

e. Nenhuma das forças consideradas na parte *b*, *c* e *d* é equivalente à força original de 450 N. Embora tenha o mesmo momento em relação a *O*, tais forças têm diferentes componentes *x* e *y*. Em outras palavras, embora cada força tenda a girar o eixo da mesma maneira, cada uma faz a alavanca empurrar o eixo de um modo diferente.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.2

Uma força de 800 N atua sobre um suporte, como mostra a ilustração. Determine o momento da força em relação B.



SOLUÇÃO

O momento $\mathbf{M}_B$ da força $\mathbf{F}$ em relação a B é obtido por meio do produto vetorial

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{r}_{A/B}$ é o vetor traçado de B até A. Decompondo $\mathbf{r}_{A/B}$ e $\mathbf{F}$ em componentes retangulares, temos:

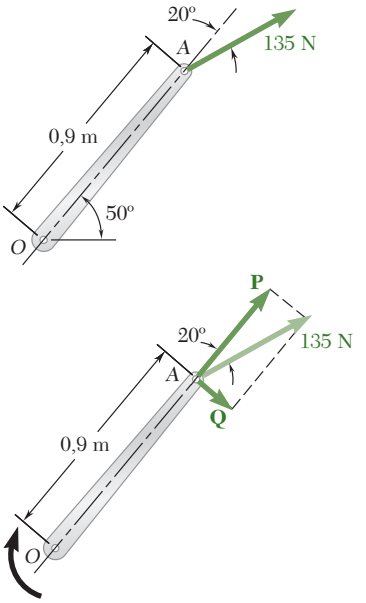
$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{A/B} &= -(0{,}2\text{ m})\mathbf{i} + (0{,}16\text{ m})\mathbf{j}\\ \mathbf{F} &= (800\text{ N})\cos 60°\mathbf{i} + (800\text{ N})\operatorname{sen} 60°\mathbf{j}\\ &= (400\text{ N})\mathbf{i} + (693\text{ N})\mathbf{j}\end{aligned}$$

Retomando as relações (3.7) para os produtos vetoriais de vetores unitários (Seção 3.5) obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} &= [-(0{,}2\text{ m})\mathbf{i} + (0{,}16\text{ m})\mathbf{j}] \times [(400\text{ N})\mathbf{i} + (693\text{ N})\mathbf{j}]\\ &= -(138{,}6\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} - (64{,}0\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\\ &= -(202{,}6\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_B = 203\text{ N}\cdot\text{m}\,\circlearrowright \quad \blacktriangleleft$$

O momento $\mathbf{M}_B$ é um vetor perpendicular ao plano da figura e que aponta para *dentro* do papel.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.3

Uma força de 135 N atua na extremidade de uma alavanca de 0.9 m, como mostra a ilustração. Determine o momento da força em relação a O.

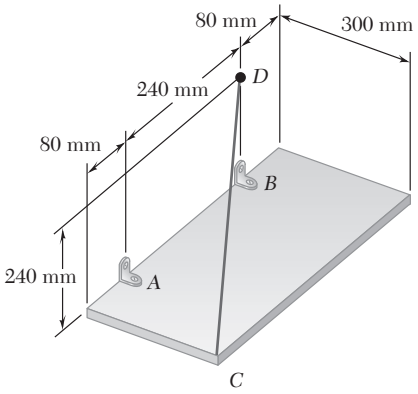
SOLUÇÃO

A força é substituida por dois componentes, um $\mathbf{P}$ na direção OA e um componente $\mathbf{Q}$ perpendicular a OA. Como O está sobre a linha de ação de $\mathbf{P}$, o momento de $\mathbf{P}$ em relação a O é nulo e o momento da força 135 N reduz-se ao momento de $\mathbf{Q}$, que é horário e, portanto, representado por um escalar negativo.

$$Q = (135\text{ N})\operatorname{sen} 20° = 46{,}17\text{ N}$$
$$M_O = -Q(0{,}9\text{ m}) = -(46{,}17\text{ N})(0{,}9\text{ m}) = -41{,}55\text{ N}\cdot\text{m}$$

Como o valor obtido para o escalar M_O é negativo, o momento $\mathbf{M}_O$ aponta para *dentro* do papel. Temos:

$$\mathbf{M}_O = 41{,}55\text{ N}\cdot\text{m}\,\circlearrowright \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 3.4

Uma placa retangular é sustentada pelos suportes *A* e *B* e por um fio *CD*. Sabendo que a tração no fio é de 200 N, determine o momento em relação a *A* da força exercida pelo fio no ponto *C*.

SOLUÇÃO

O momento $\mathbf{M}_A$ da força $\mathbf{F}$ exercida pelo fio no ponto *C* em relação a *A* é obtido escrevendo-se o produto vetorial

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \tag{1}$$

onde $\mathbf{r}_{C/A}$ é o vetor traçado de *A* até *C*

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0{,}3\text{ m})\mathbf{i} + (0{,}08\text{ m})\mathbf{k} \tag{2}$$

e $\mathbf{F}$ é a força de 200 N dirigida ao longo de *CD*. Introduzindo o vetor unitário $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{CD}/CD$, temos:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200\,\text{N})\frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \tag{3}$$

Decompondo o vetor $\overrightarrow{CD}$ em componentes retangulares, temos:

$$\overrightarrow{CD} = -(0{,}3\text{ m})\mathbf{i} + (0{,}24\text{ m})\mathbf{j} - (0{,}32\text{ m})\mathbf{k} \qquad CD = 0{,}50\text{ m}$$

Substituindo por (3), obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{200\,\text{N}}{0{,}50\,\text{m}}[-(0{,}3\text{ m})\mathbf{i} + (0{,}24\text{ m})\mathbf{j} - (0{,}32\text{ m})\mathbf{k}] \\ &= -(120\text{ N})\mathbf{i} + (96\text{ N})\mathbf{j} - (128\text{ N})\mathbf{k}\end{aligned} \tag{4}$$

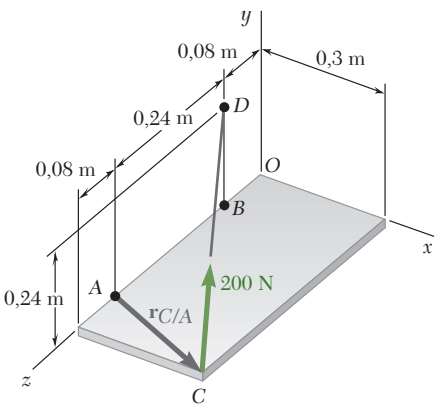
Substituindo $\mathbf{r}_{C/A}$ e $\mathbf{F}$ de (2) e (4) por (1) e retomando as relações (3.7) da Seção 3.5, obtemos:

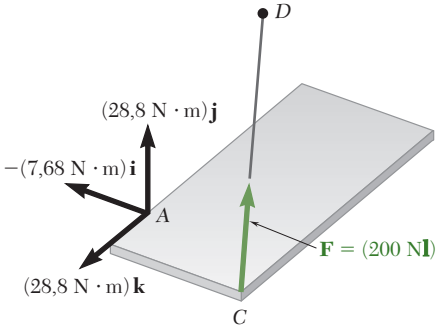
$$\begin{aligned}\mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0{,}3\mathbf{i} + 0{,}08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k}) \\ &= (0{,}3)(96)\mathbf{k} + (0{,}3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0{,}08)(-120)\mathbf{j} + (0{,}08)(96)(-\mathbf{i}) \\ \mathbf{M}_A &= -(7{,}68\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28{,}8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28{,}8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\ \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Solução alternativa. Conforme indicamos na Seção 3.8, o momento $\mathbf{M}_A$ pode ser expresso em forma de um determinante:

$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = -(7{,}68\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28{,}8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28{,}8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\ \blacktriangleleft$$





METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, apresentamos o *produto vetorial* de dois vetores. Nos problemas, a seguir, você usará o produto vetorial para calcular o *momento de uma força em relação a um ponto* e determinar também a *distância perpendicular* de um ponto a uma linha.

Definimos o momento de uma força **F** em relação ao ponto *O* de um corpo rígido como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

onde **r** é o vetor posição *de O até qualquer ponto* da linha de ação de **F**. Como o produto vetorial não é comutativo, é absolutamente necessário, ao calcular tal produto, que você coloque os vetores na ordem apropriada e que cada vetor tenha o sentido correto. O momento $\mathbf{M}_O$ é importante porque sua intensidade é uma medida da tendência de uma força **F** em fazer o corpo rígido girar em torno de um eixo dirigido ao longo de $\mathbf{M}_O$.

1. Cálculo do momento M_O de uma força em duas dimensões. Pode-se adotar um dos seguintes procedimentos:

a. Use a Eq. (3.12), $M_O = Fd$, que expressa a intensidade do momento como o produto da intensidade de **F** e da *distância perpendicular d* de *O* até a linha de ação de **F** (Problema Resolvido 3.1).

b. Expresse **r** e **F** na forma de componentes e efetue o produto vetorial $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ formalmente (Problema Resolvido 3.2).

c. Decomponha **F** nos componentes paralelo e perpendicular ao vetor posição **r**, respectivamente. Apenas a componente perpendicular contribui para o momento de **F** (Problema Resolvido 3.30).

d. Use a Eq. (3.22), $M_O = M_z = xF_y - yF_x$. Quando se aplica esse método, a abordagem mais simples é tratar os componentes escalares de **r** e **F** como positivos e, por observação, atribuir então o sinal apropriado ao momento produzido por cada um dos componentes da força. Por exemplo, aplicando esse método no Problema Resolvido 3.2, observamos que ambos os componentes da força tendem a produzir uma rotação horária em tomo de *B.* Logo, o momento de cada componente da força em relação a *B* deve ser representado por um escalar negativo. Temos então o momento total.

$$M_B = -(0{,}16\ \text{m})\,(400\ \text{N}) - (0{,}20\ \text{m})\,(693\ \text{N}) = -202{,}6\ \text{N} \cdot \text{m}$$

2. Cálculo do momento M_O de uma força F em três dimensões. Seguindo o método do Problema Resolvido 3.4, o primeiro passo é selecionar o vetor posição **r** mais conveniente (mais simples). Em seguida, você deve expressar **F** em termos de componentes retangulares. O passo final consiste em efetuar o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para determinar o momento. Na maioria dos problemas tridimensionais, você achará mais fácil calcular o produto vetorial usando um determinante.

3. Determinação da distância perpendicular d de um ponto a até uma dada linha. Primeiro, admita que a força **F** de intensidade conhecida F esteja ao longo de uma dada linha. Em seguida, determine seu momento em relação a *A* escrevendo o produto vetorial $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, e calcule esse produto tal como indicamos anteriormente. Calcule, então, sua intensidade M_A. Finalmente, substitua os valores de *F* e M_A na equação $M_A = Fd$ e a resolva para *d.*

PROBLEMAS

3.1 Uma válvula de pedal para um sistema pneumático é articulada em *B*. Sabendo que $\alpha = 28°$, determine o momento de uma força de 16 N em relação ao ponto *B* decompondo a força em componentes horizontal e vertical.

3.2 Uma válvula de pedal para um sistema pneumático é articulada em *B*. Sabendo que $\alpha = 28°$, determine o momento de uma força de 16 N em relação ao ponto *B* decompondo a força em componentes ao longo de *ABC* e em uma direção perpendicular a *ABC*.

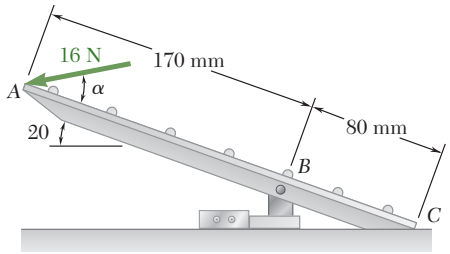


Figura P3.1 e P3.2

3.3 A força de 300 N é aplicada em *A* como mostrado na figura. Determine *(a)* o momento da força de 300 N sobre *D*, *(b)* a menor força aplicada em *B* que cria o mesmo momento em *D*.

3.4 A força de 300 N é aplicada em *A* como mostrado na figura. Determine *(a)* o momento da força de 300 N sobre *D*, *(b)* a intensidade e sentido da força horizontal aplicada em *C* que cria o mesmo momento sobre *D*, *(c)* menor força aplicada em *C* que cria o mesmo momento em *D*.

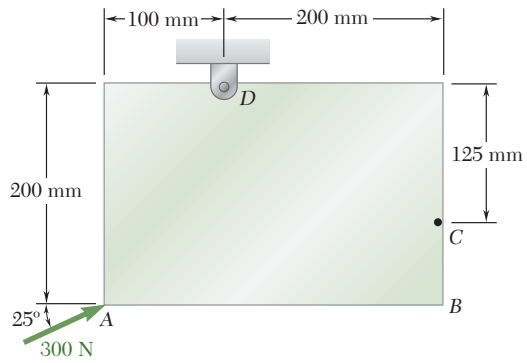


Figura P3.3 e P3.4

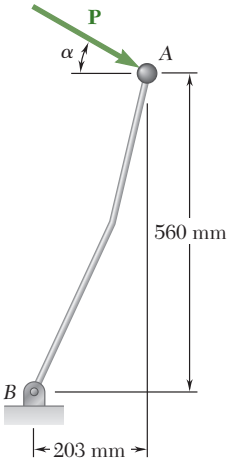


Figura P3.5, *P3.6* e P3.7

3.5 Uma força **P** de 35 N é aplicada em uma alavanca de câmbio. Determine o momento de **P** sobre *B* quando a é igual a 25°.

3.6 Para a alavanca de câmbio mostrada na figura determine a intensidade e direção da menor força **P** que gera um momento no sentido horário de 24 N·m sobre *B*.

3.7 Uma força **P** de 49 N é aplicada em uma alavanca de câmbio. O momento *P* sobre *B* é horário e tem a intensidade de 28 N·m. Determine o valor de α.

3.8 Sabe-se que uma força vertical de 890 N é necessária para remover da tábua o prego fixado em *C*. Ao primeiro movimento do prego, determine *(a)* o momento em relação a *B* da força exercida sobre o prego, *(b)* a intensidade da força **P** que cria o mesmo momento em relação a *B* se $\alpha = 10°$, *(c)* a menor força **P** que cria o mesmo momento em relação a *B*.

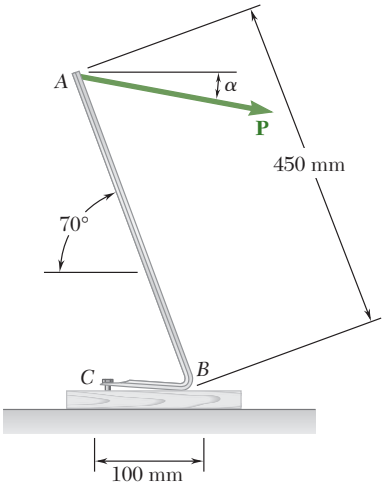


Figura *P3.8*

3.9 Um guincho *AB* é usado para endireitar um mourão. Sabendo que a tração no cabo *BC* é 1.140 N e o comprimento *d* é 1,9 m, determine o momento em relação a *D* da força exercida pelo cabo em *C* decompondo tal força no componente horizontal e no vertical aplicados *(a)* no ponto *C*, *(b)* no ponto *E*.

3.10 Sabe-se que é necessária uma força com um momento de 960 N·m em relação a *D* para endireitar o mourão *CD*. Se $d = 2{,}8$ m, determine a tração que deve ser desenvolvida no cabo do guincho *AB* para se criar o momento necessário em relação ao ponto *D*.

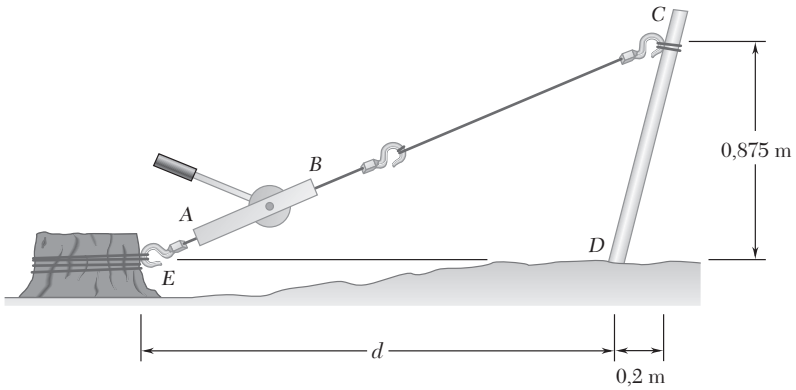


Figura P3.9, P3.10 e *P3.11*

3.11 Sabe-se que é necessária uma força com um momento de 960 N·m em relação a *D* para se endireitar o mourão *CD*. Se a capacidade do guincho *AB* 2.400 N, determine o valor mínimo da distância *d* para se criar o momento especificado em relação ao ponto *D*.

3.12 e 3.13 A porta traseira de um carro é sustentada por uma haste hidráulica *BC*. Se a haste exerce uma força de 556 N dirigida ao longo da sua linha de centro sobre a rótula em *B*, determine o momento da força em relação a *A*.

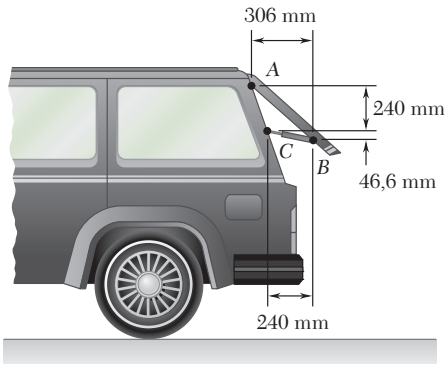


Figura P3.12

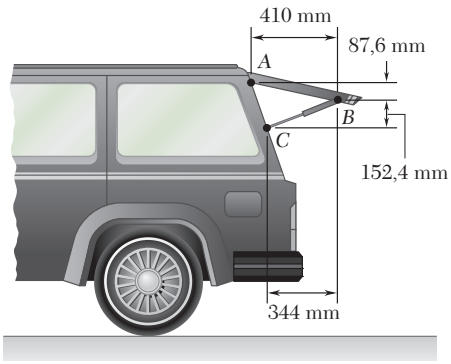


Figura P3.13

3.14 Um mecânico utiliza um pedaço de tubo *AB* como alavanca para esticar a correia de um alternador. Quando ele empurra a alavanca para baixo em *A*, uma força de 485 N é exercida sobre o alternador em *B*. Determine o momento dessa força em relação ao parafuso *C* se a sua linha de ação passa através de *O*.

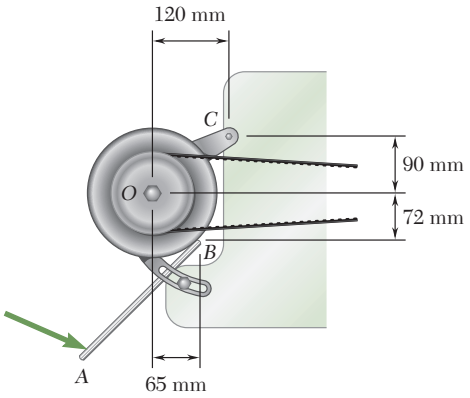


Figura P3.14

3.15 Desenvolva os produtos vetoriais $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ e $\mathbf{B}' \times \mathbf{C}$, onde $B = B'$, e use os resultados obtidos para demonstrar a identidade:

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

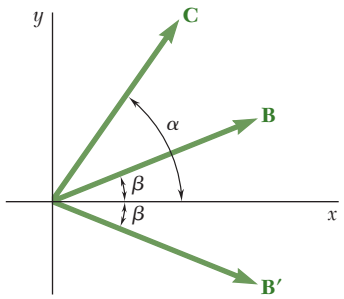


Figura P3.15

3.16 Uma linha passa pelos pontos (20 m, 16 m) e (−1 m, −4 m). Determine a distância perpendicular *d* da linha até a origem *O* do sistema de coordenadas.

3.17 Os vetores **P** e **Q** constituem dois lados adjacentes de um paralelogramo. Determine a área do paralelogramo quando *(a)* $\mathbf{P} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, *(b)* $\mathrm{P} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

3.18 Um plano contém os vetores **A** e **B**. Determine o vetor unitário normal ao plano quando **A** e **B** são iguais, respectivamente, *(a)* $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ e $4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, *(b)* $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

3.19 Determine o momento em relação à origem *O* da força $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ que atua em um ponto *A*. Suponha que o vetor posição de *A* seja *(a)* $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, *(b)*) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j} - 1{,}5\mathbf{k}$, (c) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

3.20 Determine o momento em relação à origem *O* da força $\mathbf{F} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ que atua em um ponto *A*. Suponha que o vetor posição de *A* seja *(a)* $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, *(b)* $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, *(c)* $\mathbf{r} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

3.21 Uma força de 200 N é aplicada em um suporte *ABC* como mostrado na figura. Determine o momento da força sobre *A*.

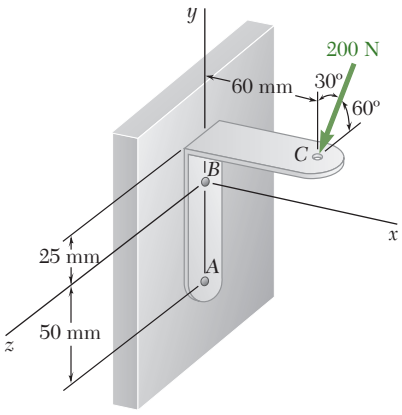


Figura P3.21

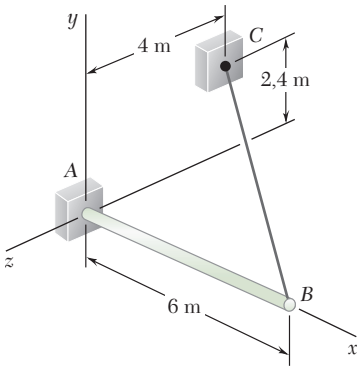


Figura P3.23

3.22 Antes que o tronco de uma grande árvore venha a cair, são amarrados os cabos *AB* e *BC*, como mostra a figura. Sabendo que as forças de tração nos cabos *AB* e *BC* são de 555 N e 660 N, respectivamente, determine o momento em relação a *O* da força resultante exercida sobre a árvore pelos cabos em *B*.

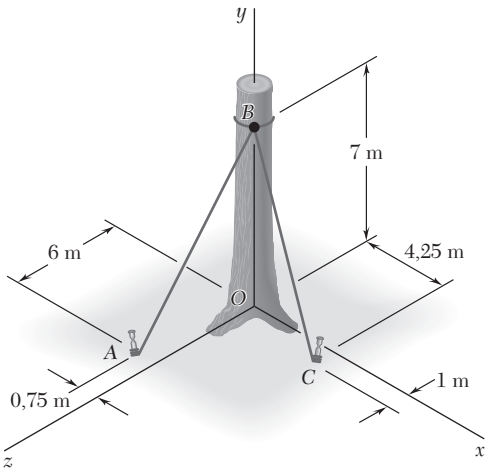


Figura P3.22

3.23 Uma barra de 6 m tem uma ponta fixada em *A*. Um cabo de aço é esticado da ponta livre *B* da barra ao ponto *C* localizado na parede vertical. Se a tensão no cabo é 2,5 kN, determine o binário que a força exerce sobre *A* através do cabo em *B*.

3.24 Uma tábua *AB*, usada para escorar temporariamente um telhado, exerce no ponto A do telhado uma força de 254 N dirigida ao longo de *BA*. Determine o momento da força em relação a *C*.

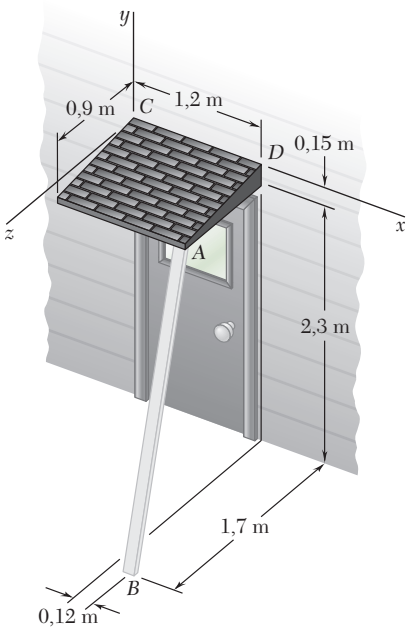


Figura P3.24

3.25 A rampa *ABCD* é sustentada por cabos nos cantos *C* e *D*. A tração em cada um dos cabos é 810 N. Determine o momento em relação a *A* da força exercida *(a)* pelo cabo em *D*, *(b)* pelo cabo em *C*.

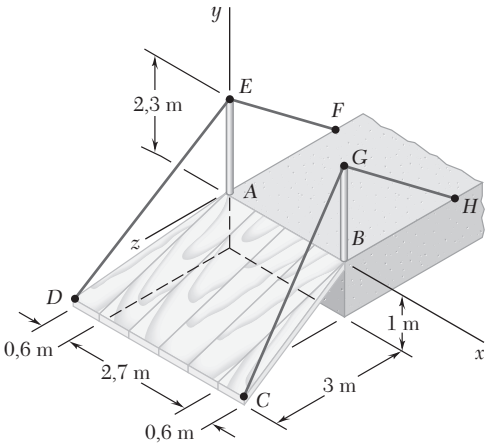


Figura P3.25

3.26 Um pequeno barco é suportado por dois guindastes, um dos quais é mostrado na figura. A tensão na linha *ABAD* é 365 N. Determine o momento da resultante $\mathbf{R}_A$ sobre *C* exercida pelo guindaste em *A*.

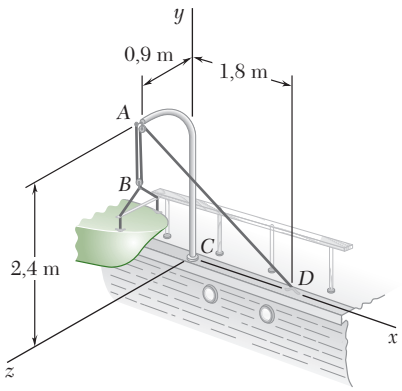


Figura P3.26

3.27 No Problema 3.22 determine a distância perpendicular do ponto *O* até o cabo *AB*.

3.28 No Problema 3.22 determine a distância perpendicular do ponto *O* até o cabo *BC*.

3.29 No Problema 3.24, determine a distância perpendicular do ponto *D* até uma linha que passa pelos pontos *A* e *B*.

3.30 No Problema 3.24, determine a distância perpendicular do ponto *C* até uma linha que passa pelos pontos *A* e *B*.

3.31 No Problema 3.25 determine a distância perpendicular do ponto *A* até a porção *DE* do cabo *DEF*.

3.32 No Problema 3.25 determine a distância perpendicular do ponto *A* até uma linha que passa pelos pontos *C* e *G*.

3.33 No Problema 3.26 determine a distância perpendicular do ponto *C* até a porção *AD* da linha *ABAD*.

3.34 Determine o valor de *a* que minimiza a distância perpendicular de um ponto *C* até a seção da tubulação que passa pelos pontos *A* e *B*.

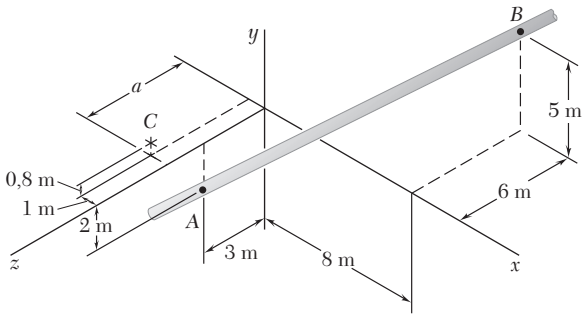


Figura P3.34

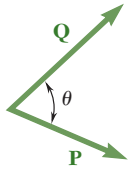


Figura 3.19

3.9 Produto escalar de dois vetores

O *produto escalar* de dois vetores **P** e **Q** é definido como o produto das intensidades de **P** e **Q** e do cosseno do ângulo θ formado por **P** e **Q**. (Fig. 3.19). O produto escalar de **P** e **Q** é representado por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Escrevemos então:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \tag{3.24}$$

Observe que a expressão definida na Eq. (3.24) não é um vetor, mas um *escalar*, o que explica o nome *produto escalar*.

Segue-se imediatamente da definição que o produto escalar de dois vetores é *comutativo*, ou seja, que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \tag{3.25}$$

Para provar que o produto escalar é também *distributivo*, devemos demonstrar a relação

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 \tag{3.26}$$

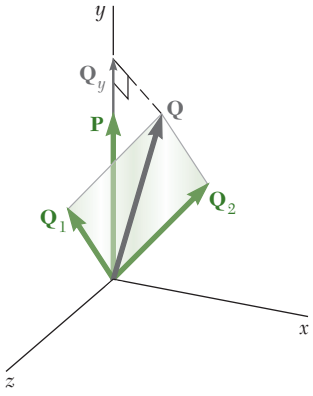


Figura 3.20

Podemos admitir; sem perda do caráter genérico, que **P** esteja dirigido ao longo do eixo y (Fig. 3.20). Representando por **Q** a soma de $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ e por θ_y o ângulo formado entre **Q** e o eixo y, expressamos o primeiro membro de (3.26) da seguinte maneira:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta_y = PQ_y \tag{3.27}$$

onde Q_y *é o* componente y de **Q**. De modo semelhante, podemos expressar o segundo membro de (3.26) como:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \tag{3.28}$$

Como **Q** é a soma de $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$, seu componente y deve ser igual à soma dos componentes y de $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$. Logo, as expressões obtidas em (3.27) e (3.28) são iguais e a relação (3.26) está demonstrada.

A terceira propriedade – a propriedade associativa – não se aplica aos produtos escalares. De fato, $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ não tem sentido, pois $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ não é um vetor, mas um escalar.

O produto escalar de dois vetores **P** e **Q** pode ser expresso em termos componentes retangulares. Exprimindo **P** e **Q** em componentes, escrevemos primeiro:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \cdot (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

Fazendo uso da propriedade distributiva, expressamos $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ como uma soma de produtos escalares, tais como $P_x\mathbf{i} \cdot Q_x\mathbf{i}$ e $P_x\mathbf{i} \cdot Q_y\mathbf{j}$. Entretanto, da definição do produto escalar segue-se que os produtos escalares dos vetores unitários são iguais a zero ou um.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{array} \tag{3.29}$$

Logo, a expressão obtida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ reduz-se a

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \tag{3.30}$$

No caso particular em que **P** e **Q** são iguais, observamos que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \tag{3.31}$$

Aplicações

1. *Ângulo formado por dois vetores.* Sejam dois vetores dados em termos de seus componentes:

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}$$

Para determinar o ângulo formado pelos dois vetores, igualamos as expressões obtidas em (3.24) e (3.30) para seu produto escalar e escrevemos

$$PQ \cos\theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

Resolvendo para cosθ, temos:

$$\cos\theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$

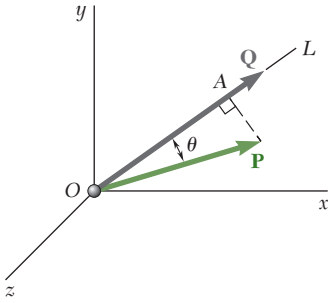


Figura 3.21

2. *Projeção de um vetor sobre um dado eixo.* Considere um vetor **P** formando um ângulo θ com um eixo, ou linha orientada, *OL* (Fig. 3.21). A *projeção de* **P** *sobre o eixo OL* é definida como sendo o escalar:

$$P_{OL} = P \cos\theta \tag{3.33}$$

Observamos que a projeção P_{OL} é igual em valor absoluto ao comprimento do segmento *OA*; a projeção será positiva se *OA* tiver o mesmo sentido do eixo *OL*, ou seja, se o ângulo θ for agudo, e negativo, em caso contrário. Se **P** e *OL* estiverem em ângulo reto, a projeção de **P** sobre *OL* será nula.

Considere agora um vetor **Q** dirigido ao longo de *OL* e no mesmo sentido de *OL* (Fig. 3.22). O produto escalar de **P** e **Q** pode ser expresso como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos\theta = P_{OL} Q \tag{3.34}$$

da qual segue-se que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q} \tag{3.35}$$

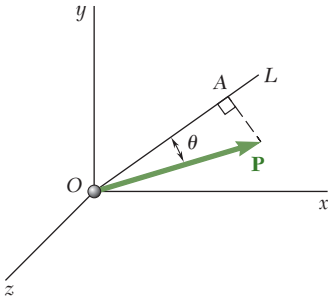


Figura 3.22

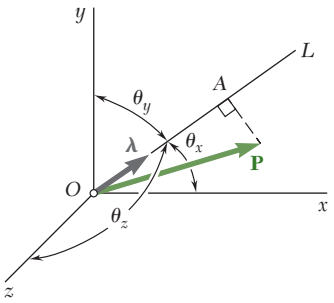


Figura 3.23

No caso particular em que o vetor escolhido ao longo de *OL* seja o vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ (Fig. 3.23), temos:

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{3.36}$$

Decompondo **P** e $\boldsymbol{\lambda}$ em componentes retangulares, e lembrando da Seção 2.12, que os componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ ao longo dos eixos de coordenadas são respectivamente iguais aos cossenos diretores de *OL*, expressamos a projeção de P sobre *OL* como

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \tag{3.37}$$

onde θ_x, θ_y e θ_z representam os ângulos que o eixo *OL* forma com os eixos de coordenadas.

3.10 Produto triplo misto de três vetores

Definimos o *produto triplo misto* de três vetores **S**, **P** e **Q** como a expressão escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.38}$$

obtida a partir do produto escalar de **S** pelo produto vetorial de **P** e **Q**.*

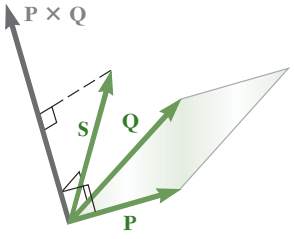


Figura 3.24

Uma interpretação geométrica simples pode ser dada para o produto triplo misto de **S**, **P** e **Q** (Fig. 3.24). Primeiro, como vimos na Seção 3.4, o vetor **P** × **Q** é perpendicular ao plano que contém **P** e **Q** e que sua intensidade é igual à área do paralelogramo que tem **P** e **Q** por lados. Por outro lado, a Eq. (3.34) indica que o produto escalar de **S** e **P** × **Q** pode ser obtido multiplicando-se a intensidade de **P** × **Q** (ou seja, a área do paralelogramo definido por **P** e **Q**) pela projeção de **S** sobre o vetor **P** × **Q** (isto é, pela projeção de **S** sobre a normal ao plano que contém o paralelogramo). Logo, o produto triplo misto é igual, em valor absoluto, ao volume do paralelepípedo, tendo os vetores **S**, **P** e **Q** por lados (Fig. 3.25). Observamos que o sinal do produto triplo misto será positivo se **S**, **P** e **Q** formarem uma tríade orientada diretamente e negativo se formarem uma tríade orientada inversamente (isto é, **S** · (**P** × **Q**) será negativo se a rotação que faz **P** ficar alinhado com **Q** for vista no sentido horário a partir da ponta de **S**). O produto triplo misto será zero se **S**, **P** e **Q** forem coplanares.

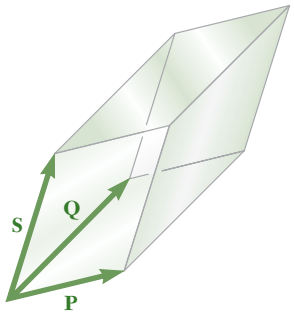


Figura 3.25

Como o paralelepípedo definido no parágrafo anterior independe da ordem em que os três vetores são tomados, os seis produtos triplos mistos

* Outro tipo de produto triplo será apresentado posteriormente (Cap. 15): o *produto triplo vetorial* **S** × (**P** × **Q**).

que podem ser formados com **S**, **P** e **Q** terão todos o mesmo valor absoluto, embora não o mesmo sinal. Verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) &= \mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{S}) = \mathbf{Q}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{P})\\ &= -\mathbf{S}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{P}) = -\mathbf{P}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{Q}) = -\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{S})\end{aligned} \tag{3.39}$$

Arranjando as três letras que representam os três vetores em um círculo, em ordem anti-horária (Fig. 3.26), observamos que o sinal do produto triplo misto permanece inalterado se os vetores forem permutados de modo que eles ainda sejam lidos em ordem anti-horária. Tal permutação é denominada *permutação cíclica.* Da Eq. (3.39) e da propriedade comutativa dos produtos escalares resulta também que o produto triplo misto de **S**, **P** e **Q** pode ser bem definido igualmente como $\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$ ou como $(\mathbf{S}\times\mathbf{P})\cdot\mathbf{Q}$.

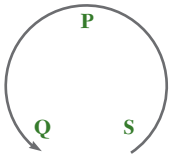


Figura 3.26

O produto triplo misto dos vetores **S**, **P** e **Q** pode ser expresso em termos dos componentes retangulares desses vetores. Representando $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ por **V** e usando a fórmula (3.30) para expressar o produto escalar de **S** e **V**, temos:

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \mathbf{S}\cdot\mathbf{V} = S_xV_x + S_yV_y + S_zV_z$$

Substituindo os componentes de **V** obtidos pelas relações (3.9), obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = {} & S_x(P_yQ_z - P_zQ_y) + S_y(P_zQ_x - P_xQ_z)\\ & + S_z(P_xQ_y - P_yQ_x)\end{aligned} \tag{3.40}$$

Essa expressão pode ser escrita de modo mais compacto se observarmos que ela representa a expansão de um determinante:

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix} \tag{3.41}$$

Aplicando as regras que regem as permutações de linhas em um determinante, poderíamos verificar facilmente as relações (3.39), antes deduzidas a partir de considerações geométricas.

3.11 Momento de uma força em relação a um dado eixo

Agora que aumentamos mais nosso conhecimento de álgebra vetorial, podemos apresentar um novo conceito, o conceito de *momento de uma força em relação a um eixo.* Considere novamente uma força **F** que atua sobre um corpo rígido e o momento $\mathbf{M}_O$ dessa força em relação a *O* (Fig. 3.27). Seja *OL* um eixo através de *O; definimos o momento* M_{OL} *de* **F**

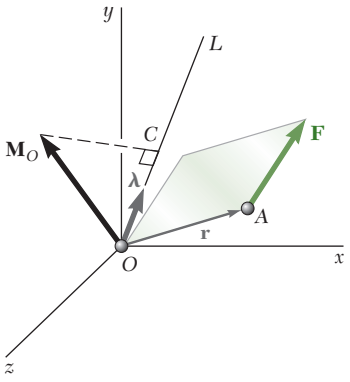


Figura 3.27

em relação a OL como a projeção OC do momento $\mathbf{M}_O$ *sobre o eixo OL.* Representando por $\boldsymbol{\lambda}$ o vetor unitário ao longo de *OL* e retomando as Seções 3.9 e 3.6, respectivamente, as expressões (3.36) è (3.11) obtidas para as projeções de um vetor sobre um dado eixo e para o momento $\mathbf{M}_O$ de uma força $\mathbf{F}$, temos:

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.42}$$

que mostra que o momento M_{OL} de $\mathbf{F}$ em relação ao eixo *OL* é o escalar obtido desenvolvendo-se o produto triplo misto de $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$. Expressando M_{OL} na forma de um determinante, temos:

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.43}$$

onde λ_x, λ_y, λ_z = cossenos diretores do eixo *OL*
x, y, z = coordenadas do ponto de aplicação de $\mathbf{F}$
F_x, F_y, F_z = componentes da força $\mathbf{F}$

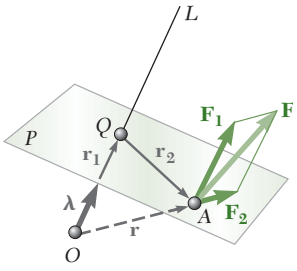


Figura 3.28

O significado físico do momento M_{OL} de uma força $\mathbf{F}$ em relação a um eixo fixo *OL* torna-se mais evidente se decompusermos $\mathbf{F}$ em dois componentes retangulares $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, com $\mathbf{F}_1$ paralelo a *OL* e $\mathbf{F}_2$ situado em um plano *P* perpendicular a *OL* (Fig. 3.28). Decompondo $\mathbf{r}$ de modo semelhante em dois componentes $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ e substituindo $\mathbf{F}$ e $\mathbf{r}$ na Eq. (3.42), temos:

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Ao notar que todos os produtos triplos mistos, exceto o último, são nulos, pois envolvem vetores que são coplanares quando traçados a partir de uma origem comum (Seção 3.10), temos:

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r_2} \times \mathbf{F_2}) \tag{3.44}$$

O produto vetorial $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ é perpendicular ao plano *P* e representa o momento do componente $\mathbf{F}_2$ de $\mathbf{F}$ em relação ao ponto *Q*, em que *OL* intercepta *P*. Logo, o escalar M_{OL}, que será positivo se $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ e *OL* tiverem o mesmo sentido e sentido negativo em caso contrário, mede a tendência de $\mathbf{F}_2$ a fazer o corpo rígido girar em torno do eixo fixo *OL*. Como o outro componente $\mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}$ não tende a fazer o corpo girar em tomo de *OL*, concluímos que *o momento* M_{OL} *de* $\mathbf{F}$ *em relação a OL mede a tendência da força* $\mathbf{F}$ *a imprimir ao corpo rígido um movimento de rotação em torno do eixo fixo OL.*

Segue-se da definição do momento de uma força em relação a um eixo que o momento de $\mathbf{F}$ em relação a um eixo de coordenadas é igual ao componente de $\mathbf{M}_O$ ao longo desse eixo. Dispondo sucessivamente cada um dos vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ no lugar de $\boldsymbol{\lambda}$ em (3.42), verificamos

que as expressões obtidas para os *momentos de* **F** *em relação aos eixos de coordenadas* são, respectivamente, iguais às expressões obtidas na Seção 3.8 para os componentes do momento $\mathbf{M}_O$ de **F** em relação a *O*.

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

Observamos que, assim como os componentes F_x, F_y e F_z de uma força **F** que atua sobre um corpo rígido medem, respectivamente, a tendência de **F** a mover o corpo rígido nas direções *x*, *y* e *z*, os momentos M_x, M_y e M_z de **F** em relação aos eixos de coordenadas medem a tendência de **F** a imprimir ao corpo rígido um movimento de rotação em torno dos eixos *x*, *y* e *z*, respectivamente.

De modo mais geral, o momento de uma força **F** aplicada no ponto *A* em relação a um eixo que não passa pela origem é obtido escolhendo-se um ponto arbitrário *B* sobre o eixo (Fig. 3.29) e determinando-se a projeção sobre o eixo *BL* do momento $\mathbf{M}_B$ de **F** em relação a *B*. Escrevemos

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \tag{3.45}$$

onde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa o vetor traçado de *B* até *A*. Expressando M_{BL} na forma de um determinante, temos

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

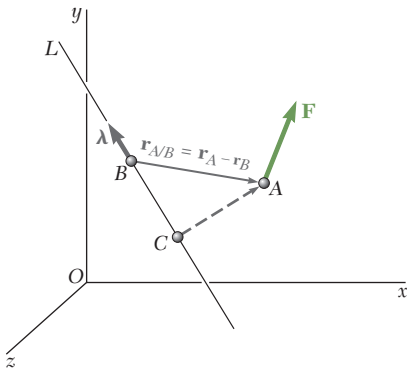


Figura 3.29

onde λ_x, λ_y, λ_z = cossenos diretores do eixo *BL*

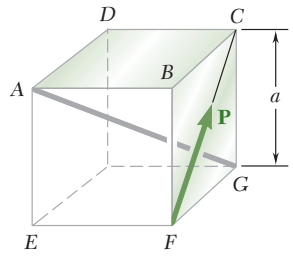
$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$

F_x, F_y, F_z = componentes da força **F**

Deve-se notar que o resultado obtido é independente da escolha do ponto *B* sobre o eixo dado. Com efeito, representando por M_{CL}, o resultado obtido com um ponto *C* diferente, temos

$$\begin{aligned} M_{CL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

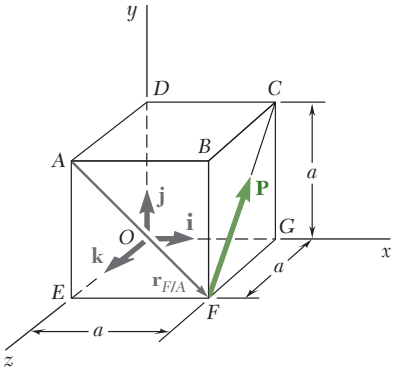
Mas, como os vetores $\boldsymbol{\lambda}$ e $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ estão sobre a mesma linha, o volume do paralelepípedo tendo por lados os vetores $\boldsymbol{\lambda}$ e $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ e **F** nulo, bem como o produto triplo misto desses três vetores (Seção 3.10). A expressão obtida para M_{CL} reduz-se, portanto, ao seu primeiro termo, que é a expressão usada anteriormente para definir M_{BL}. Além disso, segue-se da Seção 3.6 que, ao se calcular o momento de **F** em relação ao eixo dado, *A* pode ser qualquer ponto sobre a linha de ação de **F**.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.5

Um cubo de lado a sofre a ação de uma força **P**, como mostra a figura. Determine o momento de **P** (*a*) em relação a *A*, (*b*) em relação à aresta *AB*, (*c*) em relação a diagonal *AG* do cubo. (*d*) Usando o resultado da parte *c*, determine a distância perpendicular entre *AG* e *FG*.

SOLUÇÃO



a. Momento em relação a *A*. Escolhendo os eixos *x*, *y* e *z* como mostra a figura decompomos em componentes retangulares a força **P** e o vetor $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$ traçado de *A* até o ponto de aplicação *F* de **P**.

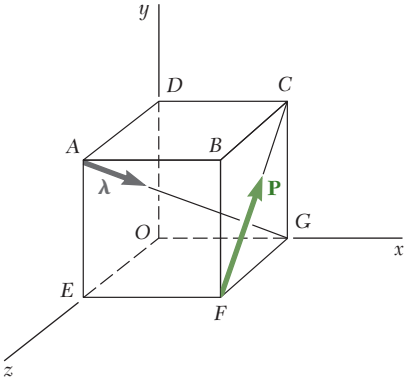
$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$
$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

O momento de **P** em relação a *A* é

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$
$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \blacktriangleleft$$

b. Momento em relação a *AB*. Projetando $\mathbf{M}_A$ sobre *AB*, escrevemos:

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$



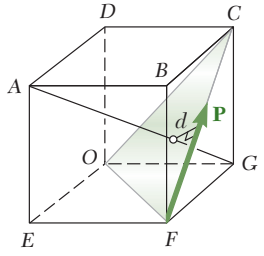
Verificamos que, como *AB* é paralelo ao eixo *x*, M_{AB} também é o componente *x* do momento $\mathbf{M}_A$.

c. Momento em relação à diagonal *AG*. O momento **P** em relação a *AG* é obtido projetando-se $\mathbf{M}_A$ sobre *AG*. Representando por $\boldsymbol{\lambda}$ o vetor unitário ao longo de *AG*, temos:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$
$$M_{AG} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \qquad M_{AG} = -aP/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$

Método alternativo. O momento **P** em relação a *AG* pode também ser expresso em forma de um determinante:

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$



d. Distância perpendicular entre *AG* e *FC*. Primeiro, observamos que **P** é perpendicular à diagonal *AG*. Pode-se conferir isso efetuando-se o produto escalar $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ e verificando-se que é este é nulo:

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

O momento M_{AG} pode, então, ser expresso como $-Pd$, onde *d* é a distância perpendicular de *AG* até *FC*. (O sinal negativo é usado porque a rotação imprimida ao cubo **P** é vista no sentido horário por um observador em *G*.) Retomando o valor encontrado para M_{AG} na parte *c*,

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \qquad d = a/\sqrt{6}$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas desta seção, você vai aplicar o *produto escalar* de dois vetores para determinar o *ângulo formado por dois vetores dados* e *a projeção de uma força sobre um dado eixo.* Você também usará o *produto triplo misto* de três vetores para encontrar o *momento de uma força em relação a um dado eixo* e a *distância perpendicular entre duas linhas.*

1. Cálculo do ângulo formado por dois vetores dados. Primeiro, expresse os vetores em termos de seus componentes e determine as intensidades dos dois vetores. O cosseno do ângulo desejado é obtido, então, dividindo-se o produto escalar dos dois vetores pelo produto de suas intensidades [Eq. (3.32)].

2. Cálculo da projeção de um vetor P sobre um dado eixo *OL*. Em geral, comece expressando **P** e o vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$, que define a direção e o sentido do eixo em forma de componentes. Tome cuidado com o sentido correto de $\boldsymbol{\lambda}$ (ou seja, $\boldsymbol{\lambda}$ deve ser dirigido de *O* para *L*). Assim, a projeção necessária é igual ao produto escalar $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$. Todavia, se você conhece o ângulo θ entre **P** e $\boldsymbol{\lambda}$, a projeção também é dada por $P \cos \theta$.

3. Determinação do momento M_{OL} de uma força em relação a um dado eixo *OL*. Definimos M_{OL} como

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.42}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor unitário ao longo de *OL* e **r** é um vetor posição *de qualquer ponto* sobre a linha *OL até qualquer ponto* sobre a linha de ação de **F.** Tal como no caso do momento de uma força em relação a um ponto, a escolha do vetor posição mais conveniente vai simplificar seus cálculos. Lembre-se também do aviso da seção anterior: os vetores **r** e **F** devem ter o sentido correto e devem ser colocados na ordem apropriada. O procedimento que você deve seguir ao calcular o momento de uma força em relação a um eixo está ilustrado na parte *c* do Problema Resolvido 3.5. Os dois passos essenciais desse procedimento são, em primeiro lugar, expressar $\boldsymbol{\lambda}$, **r** e **F** em termos de seus componentes retangulares e, em seguida, efetuar o produto triplo misto $\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ para determinar o momento em relação ao eixo. Na maioria dos problemas tridimensionais, o modo mais conveniente de se calcular o produto triplo misto é usar um determinante.

Como observamos no texto, quando $\boldsymbol{\lambda}$ estiver direcionado ao longo de um eixo de coordenadas, M_{OL} será igual ao componente escalar de $\mathbf{M}_O$ ao longo desse eixo.

(continua)

4. Determinação da distância perpendicular entre duas linhas. Você deve se lembrar de que é o componente perpendicular $\mathbf{F}_2$ da força $\mathbf{F}$ que tende a fazer o corpo girar em tomo de um dado eixo OL (Fig. 3.28). Resulta, então, que

$$M_{OL}=F_2d$$

onde M_{OL} é o momento de $\mathbf{F}$ em relação ao eixo OL e d é a distância perpendicular entre OL e a linha de ação de $\mathbf{F}$. Esta última equação nos fornece uma técnica simples para determinarmos d. Primeiro, suponha que a força $\mathbf{F}$ de intensidade conhecida F esteja ao longo de uma das linhas dadas e que o vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ esteja ao longo da outra linha. Em seguida, calcule o momento M_{OL} da força $\mathbf{F}$ em relação à segunda linha aplicando o método discutido anteriormente. A intensidade do componente paralelo de F_1 de $\mathbf{F}$ é obtida usando-se o produto escalar:

$$F_1 = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

O valor de F_2 é determinado, então, como:

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

Finalmente, substitua os valores de M_{OL} e F_2 na equação $M_{OL} = F_2d$ e resolva para d.

Você deve agora compreender que o cálculo da distância perpendicular na parte d do Problema Resolvido 3.5 ficou simplificado pelo fato de $\mathbf{P}$ ser perpendicular à diagonal AG. Em geral, as duas linhas dadas não serão perpendiculares, de modo que a técnica que acabamos de delinear terá de ser usada na determinação da distância perpendicular entre elas.

PROBLEMAS

3.35 Dados os vetores $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, calcule os produtos escalares $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$ e $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}$.

3.36 Desenvolva os produtos escalares $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ e $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}$, onde $B = B'$, e use os resultados obtidos para demonstrar a identidade

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha - \beta)$$

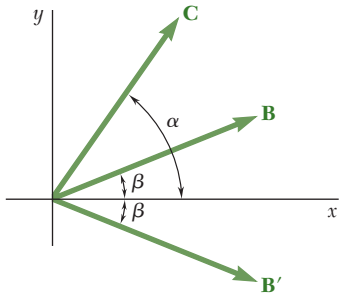


Figura P3.36

3.37 A seção *AB* de uma tubulação está no plano *yz* e forma um ângulo de 37° com o eixo *z*. Os ramais *CD* e *EF* são ligados a *AB* como mostrado na figura. Determine o ângulo das linhas *AB* e *CD*.

3.38 A seção *AB* de uma tubulação está no plano *yz* e forma um ângulo de 37° com o eixo *z*. Os ramais *CD* e *EF* são ligados a *AB* como mostrado na figura. Determine o ângulo das linhas *AB* e *EF*.

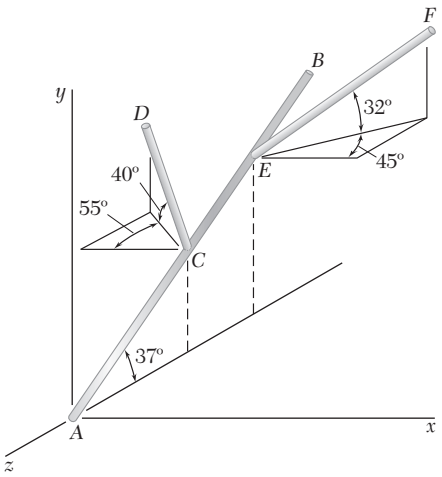


Figura P3.37 e P3.38

3.39 Considere a rede de voleibol mostrada na figura. Determine o ângulo formado pelos cabos de sustentação *AB* e *AC*.

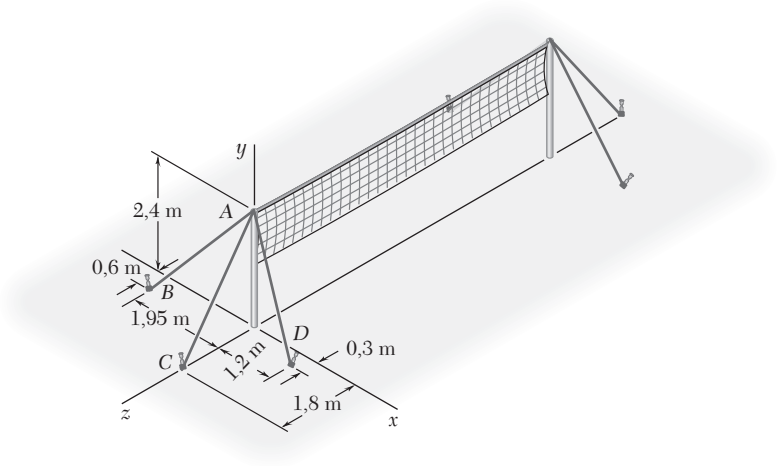


Figura P3.39 e P3.40

3.40 Considere a rede de voleibol mostrada na figura. Determine o ângulo formado pelos cabos de sustentação *AC* e *AD*.

3.41 Sabendo que a tensão no cabo *AC* é 1.260 N, determine *(a)* o ângulo entre o cabo *AC* e a barra *AB*, *(b)* a projeção em *AB* da força exercida pelo cabo *AC* no ponto *A*.

3.42 Sabendo que a tensão no cabo *AD* é de 405 N, determine *(a)* o ângulo entre o cabo *AD* e a barra *AB*, *(b)* a projeção em *AB* da força exercida pelo cabo *AD* no ponto *A*.

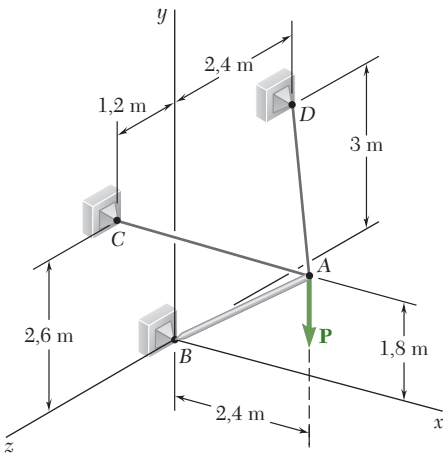


Figura P3.41 e P3.42

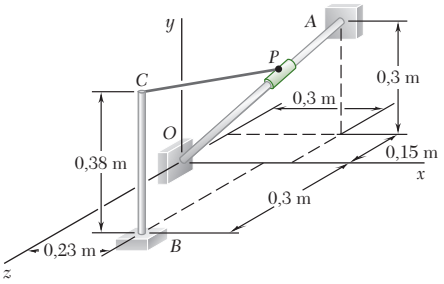


Figura P3.43 e P3.44

3.43 O cursor *P* pode mover-se ao longo da barra *OA*. Uma corda elástica *PC* é ligada ao cursor e ao elemento vertical *BC*. Sabendo que a distância de *O* até *P* é 0,15 m e que a tração na corda é 13 N, determine *(a)* o ângulo entre a corda elástica e a barra *OA*, *(b)* a projeção sobre *OA* da força exercida pela corda *PC* no ponto *P*.

3.44 O cursor *P* pode mover-se ao longo da barra *OA*. Uma corda elástica *PC* é ligada ao cursor e ao elemento vertical *BC*. Determine a distância de *O* até *P* para a qual a corda *PC* e a barra *OA* são perpendiculares.

3.45 Determine o volume do paralelepípedo da Fig.3.25 quando *(a)* $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e *(b)* $\mathbf{P} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

3.46 Dados os vetores $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = S_x\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, determine o valor de S_x para o qual os três vetores são coplanares.

3.47 A tampa *ABCD* de uma caixa de armazenagem, de 0,61 m × 1,0 m, é articulada ao longo do lado *AB* e mantida aberta com uma corda *DEC* laçada sem atrito a um gancho em *E*. Sabendo-se que a tração na corda é 66 N, determine o momento em relação a cada um dos eixos de coordenadas da força exercida pela corda em *D*.

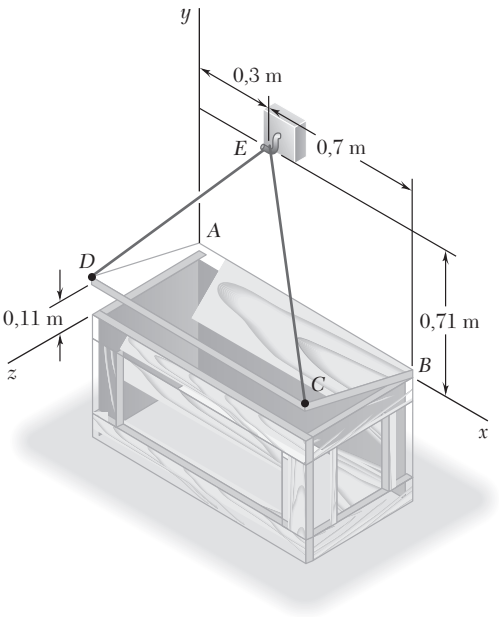


Figura P3.47 e P3.48

3.48 A tampa *ABCD* de uma caixa de armazenagem, de 0,61 m × 1,0 m, é articulada ao longo do lado *AB* e mantida aberta com uma corda *DEC* laçada sem atrito a um gancho em *E*. Sabendo-se que a tração na corda é de 66 N, determine o momento em relação a cada um dos eixos de coordenadas da força exercida pela corda em *C*.

3.49 Para erguer um caixote pesado, um homem utiliza uma talha presa embaixo de uma viga *I* pelo gancho *B*. Sabendo que os momentos em relação aos eixos *y* e *z* da força exercida em *B* pela porção *AB* da corda são, respectivamente, 120 N · m e −460 N · m, determine a distância *a*.

3.50 Para erguer um caixote pesado, um homem utiliza uma talha presa embaixo de uma viga *I* pelo gancho *B*. Sabendo que o homem aplica uma força de 195 N à extremidade A da corda e que o momento dessa força em relação ao eixo *y* é 132 N · m, determine a distância *a*.

3.51 Um pequeno barco é suportado por dois guindastes, um dos quais é mostrado na figura. Sabendo que o momento sobre o eixo *z* da resultante $\mathbf{R}_A$ exercida no guindaste em *A* não deve exceder 378 N · m em valores absolutos. Determine a maior tensão admissível na linha *ABAD* quando $x = 1{,}8$ m.

3.52 Para o guindaste do Problema 3.51, determine a maior distância admissível *x* quando a tensão na linha *ABAD* é 267 N.

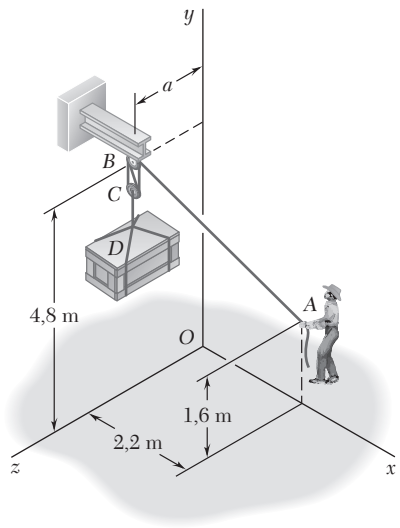


Figura P3.49 e P3.50

3.53 Para afrouxar uma válvula congelada, um a força **F** de intensidade 300 N é aplicada na alavanca da válvula. Sabendo que $\theta = 25°$, $M_x = -83$ N · m, e $M_z = -58$ N · m, determine ϕ e *d*.

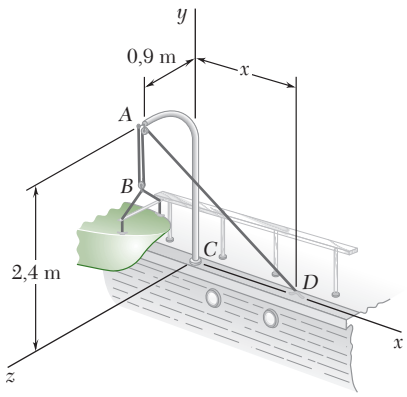


Figura P3.51 e P3.52

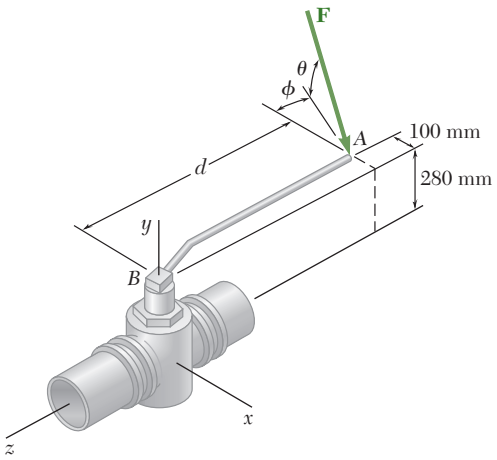


Figura P3.53 e P3.54

3.54 Durante a aplicação da força **F** na alavanca da válvula mostrada na figura, os seus momentos sobre os eixos *x* e *z* são, respectivamente, $M_x = -104$ N · m e $M_z = -109$ N · m. Para $d = 0{,}7$ m, determine o momento M_y de **F** sobre o eixo *y*.

3.55 Uma armação *ACD* é articulado em *A* e *B* e sustentada pelo cabo que passa através de um anel em *B* e fixada por ganchos em *G* e *H*. Sabendo que a tensão no cabo é 450 N, determine o momento sobre a diagonal *AD* exercida pela força na armação pela porção *BH* do cabo.

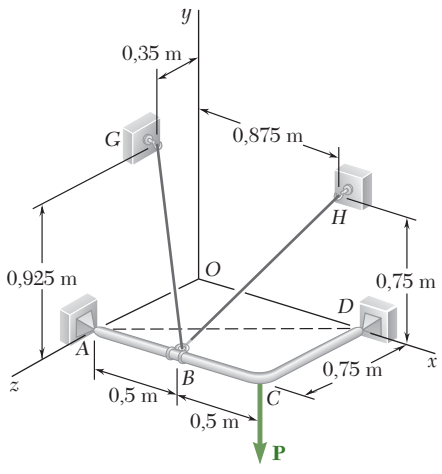


Figura P3.55

3.56 No Problema 3.55, determine o momento sobre a diagonal *AD* exercida pela força na armação pela porção *BG* do cabo.

3.57 A placa triangular *ABC* é sustentada por juntas rotuladas em *B* e *D* e mantida na posição mostrada pelos cabos *AE* e *CF*. Se a força exercida pelo cabo *AE* em *A* é de 55 N, determine o momento dessa força em relação à linha que une os pontos *D* e *B*.

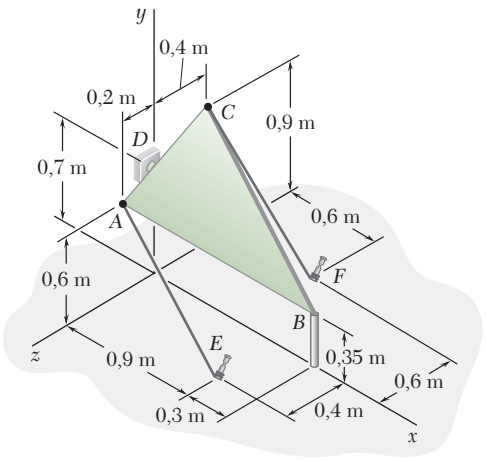


Figura P3.57 e P3.58

3.58 A placa triangular *ABC* é sustentada por juntas rotuladas em *B* e *D* e mantida na posição mostrada pelos cabos *AE* e *CF*. Se a força exercida pelo cabo *CF* em *C* é 33 N, determine o momento dessa força em relação à linha que une os pontos *D* e *B*.

3.59 Um tetraedro regular tem seis arestas de comprimento *a*. Uma força **P** é dirigida ao longo da aresta *BC*, como mostrado na figura. Determine o momento de **P** em relação à aresta *OA*.

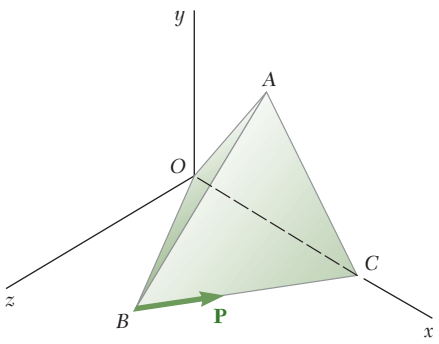


Figura P3.59 e *P3.60*

3.60 Um tetraedro regular tem seis arestas de comprimento *a*. *(a)* Mostre que duas arestas opostas, tais como *OA* e *BC*, são perpendiculares entre si. *(b)* Use essa propriedade e o resultado obtido no Problema 3.59 para determinar a distância perpendicular entre as arestas *OA* e *BC*.

3.61 Uma placa de sinalização é erguida em um terreno desnivelado e ancorada pelos cabos *EF* e *EG*. Se a força exercida pelo cabo *EF* em *E* é 205 N, determine o momento desta força sobre a linha que une os pontos *A* e *D*.

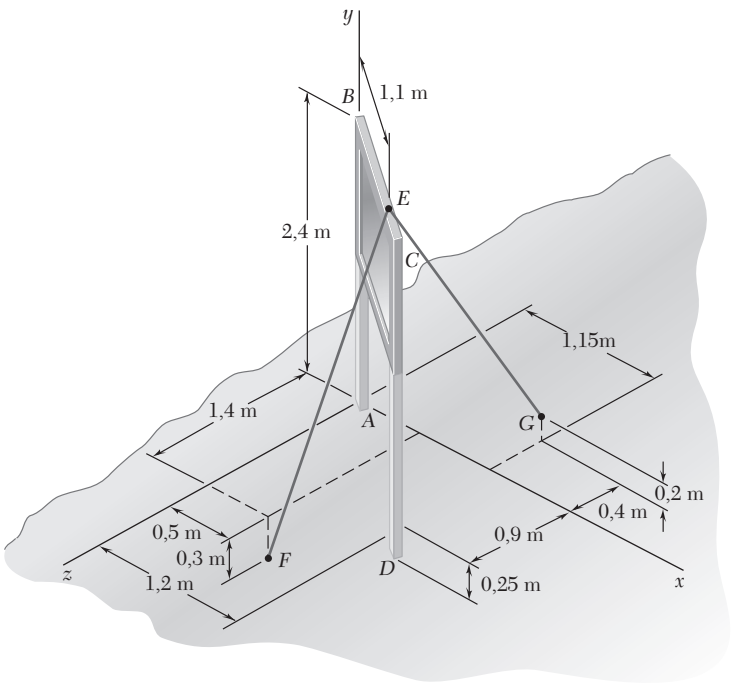


Figura P3.61 e *P3.62*

3.62 Uma placa de sinalização é erguida em um terreno desnivelado e é fixada pelos cabos *EF* e *EG*. Se a força exercida pelo cabo *EG* em *E* é 240 N, determine o momento desta força sobre a linha que une os pontos *A* e *D*.

3.63 Duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ no espaço têm a mesma intensidade *F*. Demonstre que o momento de $\mathbf{F}_1$ em relação à linha de ação de $\mathbf{F}_2$ é igual ao momento de $\mathbf{F}_2$ em relação à linha de ação de $\mathbf{F}_1$.

***3.64** No Problema 3.55, determine a distância perpendicular entre a porção *BH* do cabo e a diagonal *AD*.

***3.65** No Problema 3.56, determine a distância perpendicular entre a porção *BG* do cabo e a diagonal *AD*.

***3.66** No Problema 3.57, determine a distância perpendicular entre o cabo *AE* e a linha que une os pontos *D* e *B*.

***3.67** No Problema 3.58, determine a distância perpendicular entre o cabo *CF* e a linha que une os pontos *D* e *B*.

***3.68** No Problema 3.61, determine a distância perpendicular entre o cabo *EF* e a linha que une os pontos *A* e *D*.

***3.69** No Problema 3.62, determine a distância perpendicular entre o cabo *EG* e a linha que une os pontos *A* e *D*.

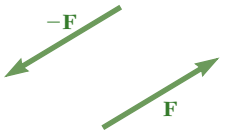


Figura 3.30

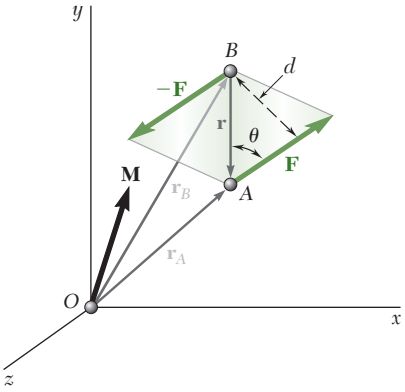


Figura 3.31

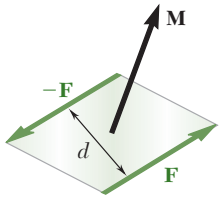


Figura 3.32

Foto 3.1 As forças paralelas para cima e para baixo de igual intensidade exercidas sobre os braços de uma chave de roda são um exemplo de binário.

3.12 Momento de um binário

Duas forças **F** *e* −**F** *de intensidade igual, linhas de ação paralelas e sentidos opostos formam um binário* (Fig. 3.30). É claro que a soma dos componentes das duas forças em qualquer direção é zero. A soma dos momentos das duas forças em relação a um dado ponto, porém, não é zero. As duas forças não irão transpor o corpo sobre o qual atuam, mas tenderão a fazê-lo girar.

Representando por $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$, respectivamente, os vetores posição dos pontos de aplicação de **F** e −**F** (Fig. 3.31), encontramos que a soma dos momentos das duas forças em relação a *O* é

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

Fazendo $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, onde **r** é o vetor que une os pontos de aplicação das duas forças, concluímos que a soma dos momentos de **F** e −**F** em relação a *O* é representada pelo vetor:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.47}$$

O vetor **M** é denominado *momento do binário;* é um vetor perpendicular ao plano que contém as duas forças e sua intensidade é

$$M = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.48}$$

onde *d* é a distância perpendicular entre as linhas de ação de **F** e −**F**. O sentido de **M** é definido pela regra da mão direita.

Como o vetor **r** em (3.47) é independente da escolha da origem *O* dos eixos de coordenadas, observamos que o mesmo resultado teria sido obtido se os momentos de **F** e −**F** tivessem sido calculados em relação a um ponto diferente *O′*. Logo, o momento **M** de um binário é um *vetor livre* (Seção 2.3) que pode ser aplicado a qualquer ponto (Fig. 3.32).

Da definição do momento de um binário, conclui-se também que dois binários, um formado das forças $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_1$ e outro, das forças $\mathbf{F}_2$ e $-\mathbf{F}_2$ (Fig. 3.33), terão momentos iguais se

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \tag{3.49}$$

e se os dois binários estiverem em planos paralelos (ou no mesmo plano) e tiverem igual sentido.

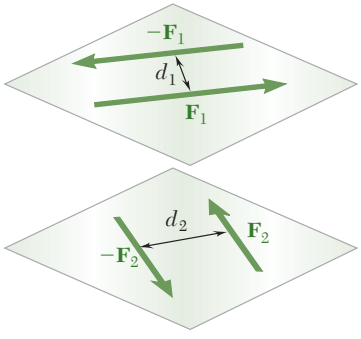


Figura 3.33

3.13 Binários equivalentes

A Fig. 3.34 mostra três binários que atuam sucessivamente sobre a mesma caixa retangular. Como foi visto na seção anterior, o único movimento que um binário pode imprimir a um corpo rígido é uma rotação. Como cada um dos três binários mostrados tem o mesmo momento **M** (igual direção, igual sentido e igual intensidade $M = 1.350\ \text{N} \cdot \text{cm}$), podemos esperar que os três binários tenham efeito igual sobre a caixa

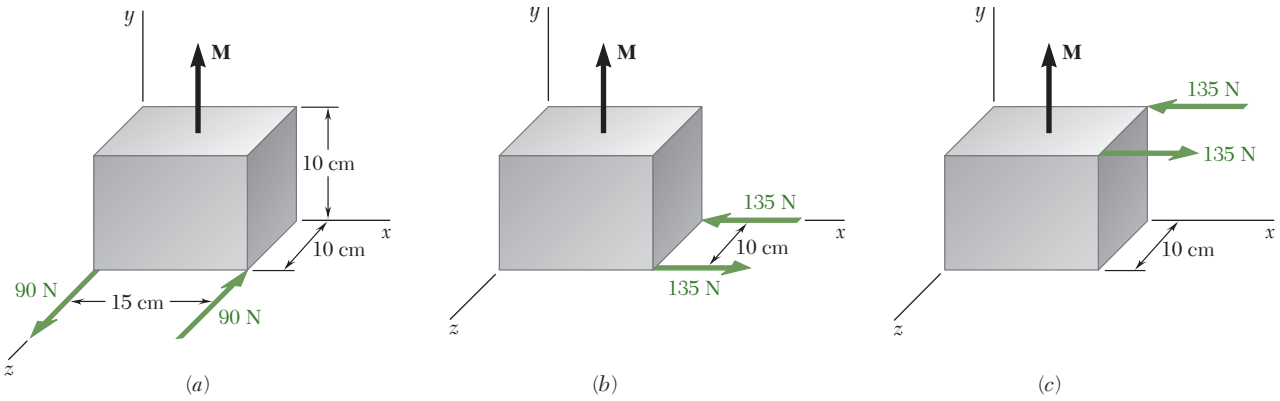


Figura 3.34

Por mais razoável que essa conclusão pareça, não devemos aceitá-la. Embora a intuição seja de grande auxílio no estudo de mecânica, não deve ser aceita como um substituto do raciocínio lógico. Antes de estabelecer que dois sistemas (ou grupos) de forças têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido, devemos demonstrar esse fato com base na evidência experimental apresentada até aqui. Essa evidência consiste na lei do paralelogramo para a adição de duas forças (Seção 2.2) e no princípio da transmissibilidade (Seção 3.3). Portanto, vamos estabelecer que *dois sistemas de forças são equivalentes* (ou seja, têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido) *se pudermos transformar um deles no outro por meio de uma ou várias das seguintes operações:* (1) substituição de duas forças que atuam sobre a mesma partícula pela sua resultante; (2) decomposição de uma força em dois componentes; (3) cancelamento de duas forças iguais e opostas que atuam sobre a mesma partícula; (4) aplicação sobre a mesma partícula de duas forças iguais e opostas; (5) deslocamento de uma força ao longo da sua linha de ação. Cada uma dessas operações é facilmente justificada com base na lei do paralelogramo ou no princípio da transmissibilidade.

Vamos agora demonstrar que *dois binários que têm o mesmo momento* **M** *são equivalentes*. Primeiro, considere dois binários contidos no mesmo plano e suponha que esse plano coincida com o plano da figura (Fig. 3.35). O primeiro binário consiste nas forças $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_1$ de intensidade F_1, localizadas a uma distância d_1 uma da outra (Fig. 3.35*a*), e o segundo binário consiste nas forças $\mathbf{F}_2$ e $-\mathbf{F}_2$ de intensidade F_2, localizadas a uma distância d_2 uma da outra (Fig. 3.35*d*). Como os dois binários têm o mesmo momento **M**, que é perpendicular ao plano da figura, devem ter o mesmo sentido (considerado aqui como sendo o anti-horário), e a relação

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \tag{3.49}$$

deve ser satisfeita. Para comprovar que eles são equivalentes, devemos mostrar que o primeiro binário pode ser transformado no segundo por meio das operações listadas anteriormente.

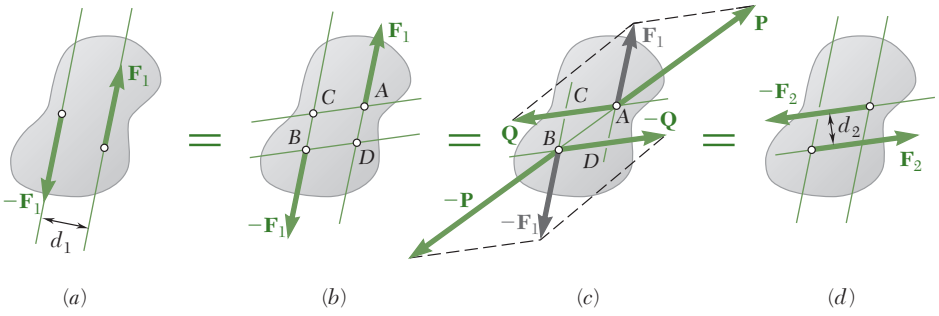


Figura 3.35

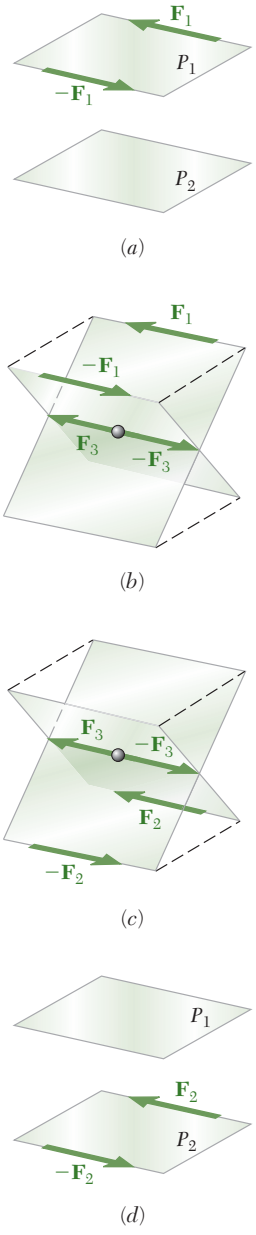


Figura 3.36

Representando por A, B, C, D os pontos de interseção das linhas de ação dos dois binários, primeiro deslizamos as forças $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_1$ até que fiquem aplicadas, respectivamente, nos pontos A e B, como mostra a Fig. 3.35*b*. Em seguida, a força $\mathbf{F}_1$ é decomposta em um componente $\mathbf{P}$ ao longo da linha AB e um componente $\mathbf{Q}$ ao longo de AC (Fig. 3.35*c*); de modo semelhante, a força $-\mathbf{F}_1$ é decomposta em $-\mathbf{P}$ ao longo de AB e $-\mathbf{Q}$ ao longo de BD. As forças $\mathbf{P}$ e $-\mathbf{P}$ têm a mesma intensidade, a mesma linha de ação e sentidos opostos; podem ser deslocadas ao longo da sua linha de ação comum até ficarem aplicadas no mesmo ponto e, então, podem ser canceladas. Logo, o binário formado por $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_1$ reduz-se ao.binário que consiste em $\mathbf{Q}$ e $-\mathbf{Q}$.

Vamos mostrar agora que as forças $\mathbf{Q}$ e $-\mathbf{Q}$ são respectivamente iguais às forças $-\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_2$. O momento do binário formado por $\mathbf{Q}$ e $-\mathbf{Q}$ pode ser obtido calculando-se o momento de $\mathbf{Q}$ em relação AB; de modo semelhante, o momento do binário formado por $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_1$ é o momento de $\mathbf{F}_1$ em relação a B. Mas, pelo teorema de Varignon, o momento de $\mathbf{F}_1$ é igual à soma dos momentos de seus componentes $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$. Como o momento de $\mathbf{P}$ em relação a B é nulo, o momento do binário formado por $\mathbf{Q}$ e $-\mathbf{Q}$ deve ser igual ao momento do binário formado por $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_1$. Retomando (3.49), temos:

$$Qd_2 = F_1d_1 = F_2d_2 \qquad \text{e} \qquad Q = F_2$$

Logo, as forças $\mathbf{Q}$ e $-\mathbf{Q}$ são respectivamente iguais às forças $-\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_2$, e o binário da Fig. 3.35*a* é equivalente ao binário da Fig. 3.35*d*.

Considere agora dois binários contidos em planos paralelos P_1 e P_2. Vamos demonstrar que eles são equivalentes se tiverem o mesmo momento. Em virtude da discussão anterior, podemos admitir que os binários consistem em forças de mesma intensidade F que atuam ao longo de linhas paralelas (Fig. 3.36*a* e *d*). Propomos mostrar que o binário contido no plano P_1 pode ser transformado no binário contido no plano P_2 por meio das operações padrões listadas anteriormente.

Vamos considerar os dois planos definidos respectivamente pelas linhas de ação de $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_2$ e pelas linhas de ação de $-\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ (Fig. 3.36*b*). Em um ponto na sua linha de interseção, aplicamos duas forças $\mathbf{F}_3$ e $-\mathbf{F}_3$, respectivamente iguais a $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_1$. O binário formado por $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_3$ pode ser substituído por um binário que consiste em $\mathbf{F}_3$ e $-\mathbf{F}_2$ (Fig. 3.36*c*), pois é claro que ambos os binários têm o mesmo momento e estão contidos no mesmo plano. De modo semelhante, o binário formado por $-\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_3$ pode ser substituído por um binário que consiste em $-\mathbf{F}_3$ e $\mathbf{F}_2$. Cancelando as duas forças iguais e opostas $\mathbf{F}_3$ e $-\mathbf{F}_3$, obtemos o binário deseja-

do no plano P_2 (Fig. 3.36*d*), Logo, concluímos que dois binários que têm o mesmo momento **M** são equivalentes, se estiverem contidos no mesmo plano ou em planos paralelos.

A propriedade que acabamos de estabelecer é muito importante para a correta compreensão da mecânica dos corpos rígidos. Ela indica que, quando um binário atua sobre um corpo rígido, não importa onde as duas forças que formam o binário atuam ou qual a intensidade e a direção que elas têm. A única coisa que importa é o *momento* do binário (intensidade, direção e sentido). Binários com o mesmo momento terão o mesmo efeito sobre o corpo rígido.

3.14 Adição de binários

Considere dois planos que se interceptam P_1 e P_2 e dois binários que atuam respectivamente em P_1 e P_2. Sem perda do caráter genérico, podemos admitir que o binário em P_1 consiste em duas forças $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_1$ perpendiculares à linha de interseção dos dois planos e atuando respectivamente em A e B (Fig. 3.37*a*). Analogamente, admitimos que o binário em P_2 consiste em duas forças $\mathbf{F}_2$ e $-\mathbf{F}_2$ perpendiculares a AB e que atuam respectivamente em A e B. É claro que a resultante **R** de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ e a resultante $-\mathbf{R}$ de $-\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_2$ formam um binário. Representando por **r** o vetor que liga B a A e lembrando-se da definição do momento de um binário (Seção 3.12), expressamos o momento **M** do binário resultante da seguinte maneira:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

e, pelo teorema de Varignon,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

Mas o primeiro termo da expressão obtida representa o momento $\mathbf{M}_1$ do binário em P_1 e o segundo termo, o momento $\mathbf{M}_2$ do binário em P_2. Temos

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \tag{3.50}$$

e concluímos que a soma de dois binários de momentos $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ é um binário de momento **M** igual à soma vetorial de $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ (Fig. 3.37*b*).

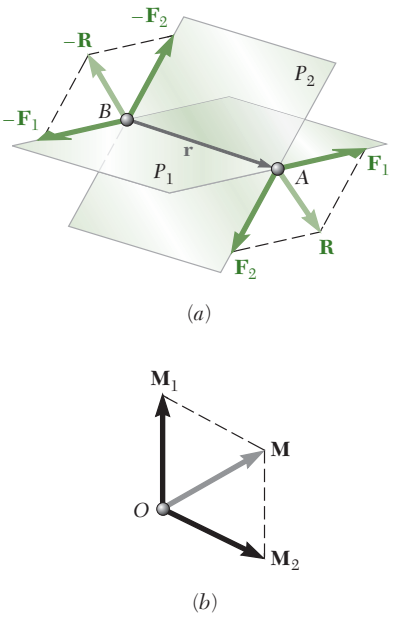


Figura 3.37

3.15 Binários podem ser representados por vetores

Como vimos na Seção 3.13, binários que têm o mesmo momento, atuando no mesmo plano ou em planos paralelos, são equivalentes. Logo, não há necessidade de desenharmos as forças reais que formam um dado binário a fim de definir seu efeito sobre um corpo rígido (Fig. 3.38*a*). Basta desenhar uma seta igual em intensidade, direção e sentido ao momento **M** do binário (Fig. 3.38*b*). Por outro lado, vimos na Seção 3.14 que a soma de dois binários é também um binário e que o momento **M** do binário resultante pode ser obtido efetuando-se a soma vetorial dos momentos $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ dos binários dados. Logo, binários obedecem à lei de adição de vetores, e a seta usada na Fig. 3.38*b* para representar o binário definido na Fig. 3.38*a* pode realmente ser considerada um vetor.

O vetor que representa um binário é denominado *vetor binário.* Observe que, na Fig. 3.38, para evitar confusão com vetores que representam forças e criar distinção entre *vetor binário* e *momento do binário,* foi acrescentado o símbolo ↰ à seta do vetor binário. O *momento do binário* foi representado apenas por uma seta cheia (sem o símbolo ↰*) em figuras anteriores. Um vetor binário, assim como o momento de um binário, é um vetor livre. Seu ponto da aplicação, portanto, pode ser escolhido na origem do sistema de coordenadas (Fig. 3.38*c*). Além disso, o vetor binário **M** pode ser decomposto nos vetores componentes $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ e $\mathbf{M}_z$, que são dirigidos ao longo dos eixos coordenados (Fig. 3.38*d*). Esses vetores componentes representam binários que atuam, respectivamente, nos planos *yz*, *zx* e *xy*.

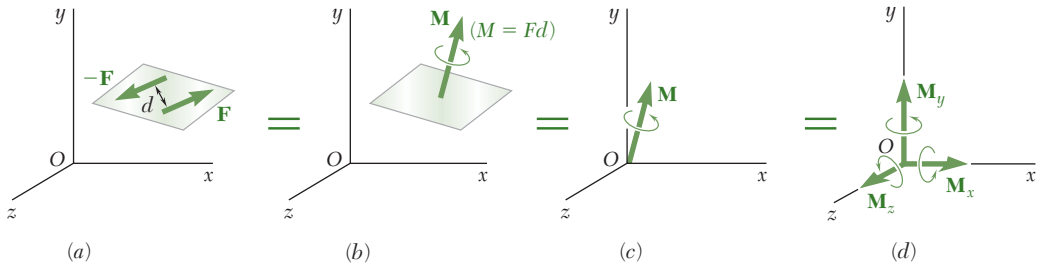


Figura 3.38

3.16 Substituição de uma dada força por uma força em O e um binário

Considere uma força **F** que atue sobre um corpo rígido em um ponto *A* definido pelo vetor posição **r** (Fig. 3.39*a*). Suponha que, por alguma razão, queiramos ter a força atuando no ponto *O*. Podemos mover **F** ao longo da sua linha de ação (princípio de transmissibilidade), mas não para um ponto *O* que não esteja sobre a linha de ação original sem modificar a ação de **F** sobre o corpo rígido.

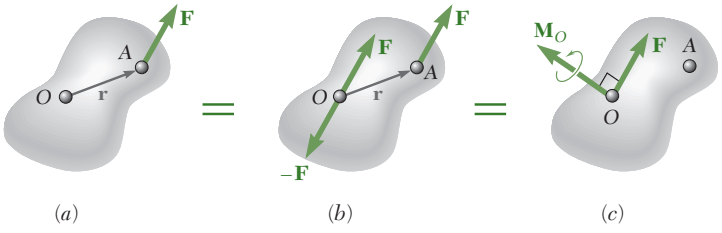


Figura 3.39

Podemos, no entanto, aplicar duas forças no ponto *O*, uma igual a **F** e a outra igual a −**F**, sem modificar a ação da força original sobre o corpo rígido (Fig. 3.39*b*). Como resultado dessa transformação, uma força **F** está agora aplicada em *O;* as outras duas forças formam um binário de

* Os autores citam as palavras setas vermelhas e setas verdes que não foram mantidas no texto traduzido, desde a edição anterior, sem prejuízo do entendimento do texto.

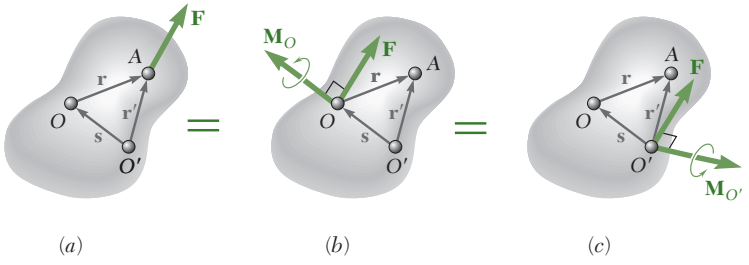
momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Logo, *qualquer força* **F** que atue sobre *um corpo rígido pode ser movida para um ponto arbitrário O, desde que se adicione um binário cujo momento é igual ao momento de* **F** *em relação a O.* O binário tende a imprimir ao corpo rígido o mesmo movimento rotacional em *O*, que a força **F** tendia a produzir antes de ser transferida para *O*. O binário é representado por um vetor binário $\mathbf{M}_O$ perpendicular ao plano que contém **r** e **F**. Por ser um vetor livre, $\mathbf{M}_O$ pode ser aplicado em qualquer lugar; por conveniência, no entanto, o vetor binário é geralmente ligado a *O*, juntamente com **F**, e a combinação obtida é conhecida como *sistema força-binário* (3.39*c*).

Se a força **F** tivesse sido movida de *A* para um ponto diferente *O′* (Fig. 3.40*a* e *c*), o momento $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$ de **F** em relação a *O′* deveria ter sido calculado e um novo sistema força-binário, consistindo em F e no vetor binário $\mathbf{M}_{O'}$, teria sido aplicado a *O′*. A relação existente entre os momentos de **F** em relação a *O* e *O′* é obtida da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \tag{3.51}$$

onde **s** é o vetor que liga *O′* a *O*. Logo, o momento $\mathbf{M}_O$ de **F** em relação a *O′* é obtido adicionando-se ao momento $\mathbf{M}_O$ de **F** em relação a *O* o produto vetorial $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$, que representa o momento em relação a *O′* da força **F** aplicada em *O*.



(*a*) (*b*) (*c*)

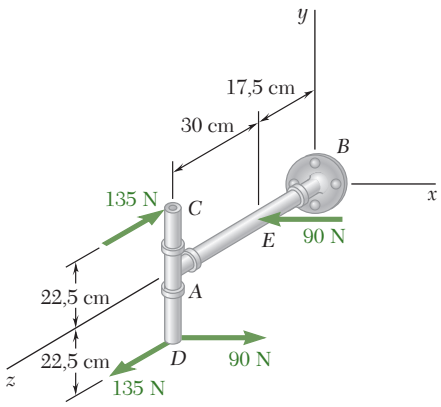
Figura 3.40

Também se poderia ter estabelecido esse resultado observando-se que, a fim de transferir para *O′* o sistema força-binário ligado a *O* (Fig. 3.40*b* e *c*), se pode mover livremente o vetor binário $\mathbf{M}_O$ para *O′*; todavia, para mover a força **F** de *O* para *O′*, é necessário adicionar a **F** um vetor binário cujo momento é igual ao momento em relação a *O′* da força **F** aplicada em *O*. Logo, o vetor binário $\mathbf{M}_o$ deve ser a soma de $\mathbf{M}_O$ ao vetor $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$.

Como observamos anteriormente, o sistema força-binário obtido pela transferência de uma força **F** de um ponto *A* para um ponto *O* consiste em **F** e em um vetor binário $\mathbf{M}_O$ perpendicular a **F**. De modo inverso, qualquer sistema força-binário que consista em uma força **F** e um vetor binário $\mathbf{M}_O$, que sejam *perpendiculares* pode ser substituído por uma única força equivalente. Isso é feito movendo-se a força **F** no plano perpendicular a $\mathbf{M}_O$ até que seu momento em relação a *O* fique igual ao momento do binário a ser eliminado.

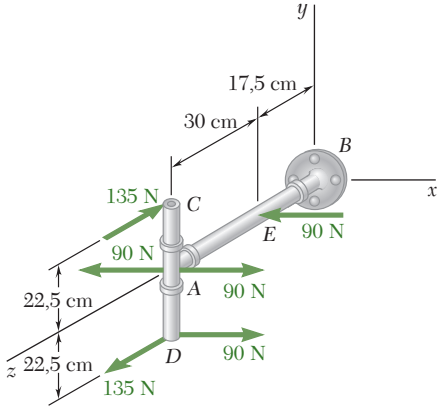
Foto 3.2 A força exercida por cada uma das mãos sobre a chave poderia ser substituída por um sistema força-binário equivalente que atua sobre a porca.

PROBLEMA RESOLVIDO 3.6



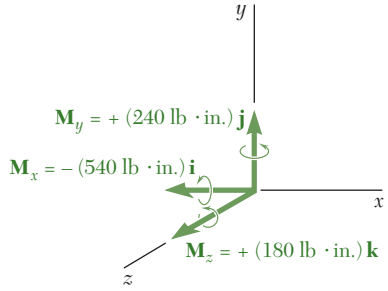
Determine os componentes do binário único equivalente aos dois binários mostrados.

SOLUÇÃO



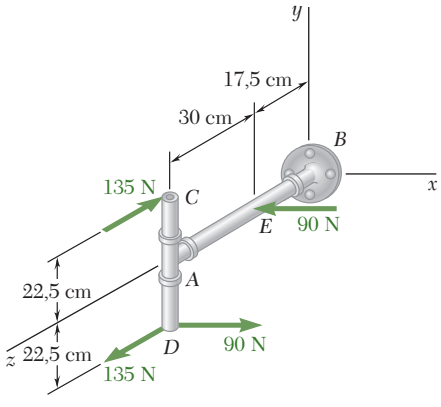
Nossos cálculos serão simplificados se ligarmos ao ponto A duas forças de 90 N iguais e opostas. Isso nos possibilitará substituir o binário original de força 90 N por dois novos binários de força de 90 N, um deles no plano zx e o outro em plano paralelo ao xy. Os três binários mostrados no esquema ao lado podem ser representados por três vetores binários $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ e $\mathbf{M}_z$, direcionados ao longo dos eixos de coordenadas. Os momentos correspondentes são:

$$\begin{aligned} M_x &= -(135\text{ N})(0{,}45\text{ m}) = -60{,}75\text{ N}\cdot\text{m} \\ M_y &= +(90\text{ N})(0{,}30\text{ m}) = +27\text{ N}\cdot\text{m} \\ M_z &= +(90\text{ N})(0{,}225\text{ m}) = +20{,}25\text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$



Esses três momentos representam os componentes do binário **M** equivalentes aos dois binários dados:

$$\mathbf{M} = -(60{,}75\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (270\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (20{,}25\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

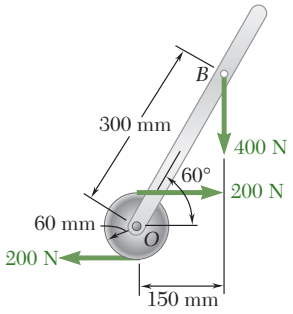


Solução alternativa. Os componentes do binário único **M** equivalente podem também ser obtidos calculando-se a soma dos momentos das quatro forças dadas em relação a um ponto arbitrário. Escolhendo o ponto D,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (0{,}45\text{ m})\mathbf{j} \times (-135\text{ N})\mathbf{k} + [(0{,}225\text{ N})\mathbf{j} - (0{,}30)\mathbf{k}] \times (-90\text{ N})\mathbf{i}$$

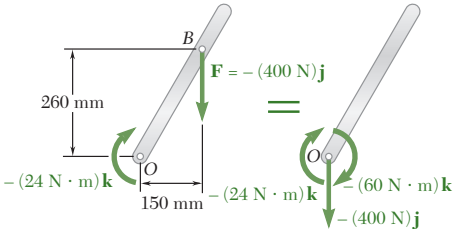
e após calcular os vários produtos vetoriais,

$$\mathbf{M} = -(60{,}75\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (27\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (20{,}25\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 3.7

Substitua o binário e a força mostrados na figura por uma força única equivalente aplicada à alavanca. Determine a distância do eixo ao ponto de aplicação dessa força equivalente.

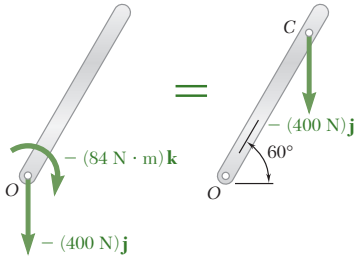


SOLUÇÃO

Primeiro, a força dada e o binário são subtituídos por um sistema força-binário equivalente no ponto O. Movemos a força $\mathbf{F} = -(400\text{ N})\mathbf{j}$ para O e, ao mesmo tempo, adcionamos um binário de momento $\mathbf{M}_O$ igual ao momento em relação a O da força em sua posição original.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F} &= [(0{,}150\,\text{m})\mathbf{i} + (0{,}260\,\text{m})\mathbf{j}] \times (-400\,\text{N})\mathbf{j} \\ &= -(60\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Esse binário é adcionado ao binário de momento $-(24\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ formado pelas duas froças de 200 N, obtindo-se um binário de momento $-(84\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. Esse último binário pode ser eliminado aplicando-se $\mathbf{F}$ a um ponto C, escolhido de modo que

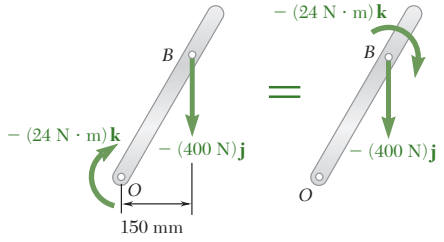


$$\begin{aligned}-(84\,\text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k} &= \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F} \\ &= [(OC)\cos 60°\mathbf{i} + (OC)\,\text{sen}\,60°\mathbf{j}] \times (-400\,\text{N})\mathbf{j} \\ &= -(OC)\cos 60°(400\,\text{N})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Concluímos que

$$(OC)\cos 60° = 0{,}210\text{ m} = 210\text{ mm} \qquad OC = 420\text{ mm} \blacktriangleleft$$

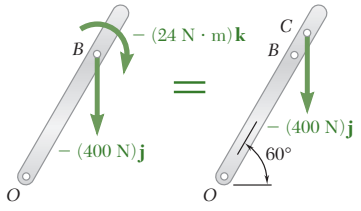
Solução alternativa. Como o efeito de um binário não depende da sua localização, o binário de momento $-(24\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ pode ser movido para B; obtemos então um sistema força-binário em B. O binário pode agora ser eliminado aplicando-se $\mathbf{F}$ a um ponto C escolhido de modo que



$$\begin{aligned}-(24\,\text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k} &= \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F} \\ &= -(BC)\cos 60°(400\,\text{N})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Concluímos que

$$(BC)\cos 60° = 0{,}060\text{ m} = 60\text{ mm} \qquad BC = 120\text{ mm}$$
$$OC = OB + BC = 300\text{ mm} + 120\text{ mm} \qquad OC = 420\text{ mm} \blacktriangleleft$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, discutimos as propriedades dos *binários.* Para resolver os próximos problemas, você deverá lembrar que o efeito líquido de um binário é produzir um momento **M**. Como esse momento é independente do ponto em relação ao qual ele é calculado, **M** é um *vetor livre* e, portanto, permanece inalterado ao ser movido de um ponto para outro. Além disso, dois binários são *equivalentes* (ou seja, têm o mesmo efeito sobre um dado corpo rígido) se produzirem o mesmo momento.

Ao se determinar o momento de um binário, todas as técnicas anteriores para cálculo de momentos se aplicam. Além disso, como o momento de um binário é um vetor livre, ele deve ser calculado em relação ao ponto mais conveniente.

Como o único efeito de um binário é produzir um momento, é possível representar um binário por um vetor, o *vetor binário,* que é igual ao momento do binário. O vetor binário é um vetor livre e será representado por um símbolo especial, ↺, para distingui-lo de vetores de força.

Ao resolver os problemas desta seção, seremos levados a efetuar as seguintes operações:

1. Adição de dois ou mais binários. Isso resulta em um novo binário, cujo momento é obtido pela adição vetorial dos momentos dos binários dados [Problema Resolvido 3.6].

2. Substituição de uma força por um sistema força-binário equivalente em um ponto especificado. Conforme explicamos na Seção 3.16, a força do sistema força-binário é igual à força original, ao passo que o vetor binário necessário é igual ao momento da força original em relação ao ponto dado. Além disso, é importante observar que a força e o vetor binário são perpendiculares entre si. De modo inverso, segue-se que um sistema força-binário poderá ser reduzido a uma única força somente se a força e o vetor binário forem perpendiculares (veja o próximo parágrafo).

3. Substituição de um sistema força-binário (com F perpendicular a M) por uma força única equivalente. Observe que o requisito de que **F** e **M** sejam mutuamente perpendiculares será satisfeito em todos os problemas bidimensionais. A força única equivalente é igual a **F** e é aplicada de tal modo que seu momento em relação ao ponto original de aplicação seja igual a **M** [Problema Resolvido 3.7].

PROBLEMAS

3.70 Duas forças paralelas de 60 N são aplicadas a uma alavanca como mostrado na figura. Determine o momento do binário formado pelas duas forças *(a)* resolvendo para cada componente horizontal e vertical e adicionando os momentos dos dois binários resultantes, *(b)* usando a distância perpendicular entre as duas forças, *(c)* somando os momentos das duas forças em relação ao ponto *A*.

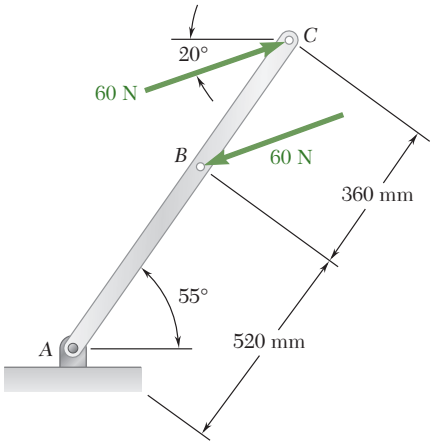


Figura P3.70

3.71 Uma placa em forma de paralelogramo sofre a ação de dois binários. Determine *(a)* o momento do binário formado pelas duas forças de 93 N, *(b)* a distância perpendicular entre as forças de 53 N se a resultante dos dois binários for nula, (c) o valor de α se o binário resultante for de 8,1 N · m, no sentido horário, e se *d* for 1,06 m.

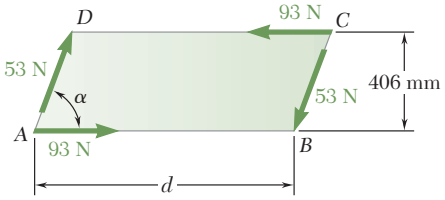


Figura P3.71

3.72 Um binário **M** de intensidade 18 N · m é aplicado no cabo de uma chave de fenda para apertar um parafuso em um bloco de madeira. Determine as intensidades das duas menores forças horizontais que são equivalentes a **M** se estas forem aplicadas *(a)* nos cantos *A* e *D*, *(b)* nos cantos *B* e *C*, *(c)* em qualquer lugar do bloco.

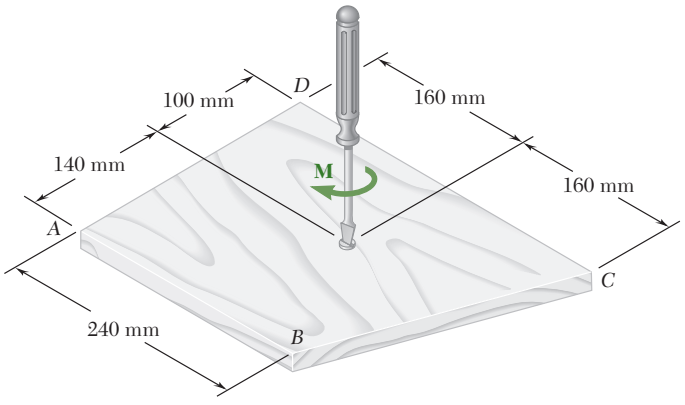


Figura P3.72

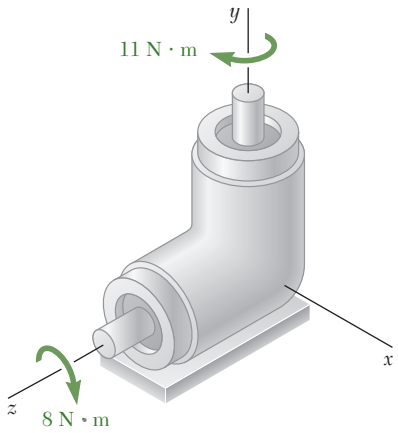


Figura P3.75

3.73 Quatro cavilhas de 25 mm de diâmetro são montadas sobre uma placa como mostrado na figura. Duas cordas são passadas em volta das cavilhas e puxadas pelas forças indicadas. *(a)* Determine o momento binário resultante atuante na placa. *(b)* Se apenas uma corda for usada, em quais cavilhas deveria ser passada e em qual direção deveria ser puxada para criar o mesmo binário com o mínimo de tensão na corda? *(c)* Qual é o valor desta tensão mínima?

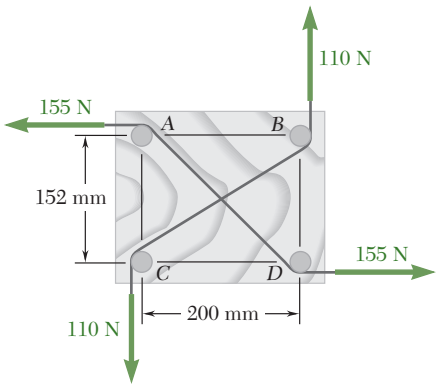


Figura *P3.73* e *P3.74*

3.74 Quatro cavilhas de mesmo de diâmetro são montadas sobre uma placa como mostrado na figura. Duas cordas são passadas em volta das cavilhas e puxadas pelas forças indicadas. Determine o diâmetro das cavilhas sabendo que o binário resultante aplicado na placa é de 55 N · m, no sentido anti-horário.

3.75 Os eixos de uma transmissão angular sofrem a ação dos dois binários mostrados na figura. Substitua os dois binários por um binário único equivalente, especificando sua intensidade e a direção do seu eixo.

3.76 e 3.77 Sabendo que $P = 0$, substitua os dois binários restantes por um binário único equivalente, especificando sua intensidade e a direção do seu eixo.

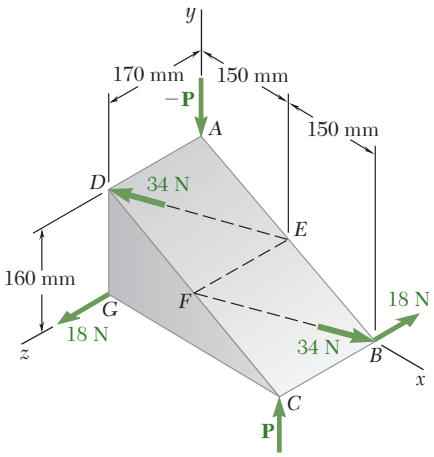


Figura P3.76 e P3.79

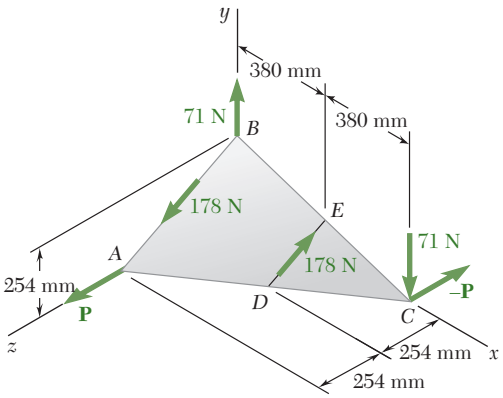


Figura P3.77 e P3.78

3.78 Se que $P = 88$ N, substitua os dois binários restantes por um binário único equivalente, especificando sua intensidade e a direção do seu eixo.

3.79 Se que $P = 20$ N, substitua os dois binários restantes por um binário único equivalente, especificando sua intensidade e a direção do seu eixo.

3.80 Os eixos A e B são ligados à caixa de engrenagem do conjunto de rodas de um trator, e o eixo C se liga ao motor. Os eixos A e B estão no plano vertical yz, enquanto o eixo C está posicionado ao longo do eixo x. Substitua os binários aplicados aos eixos pelo binário equivalente, especificando sua intensidade e a direção de seu eixo.

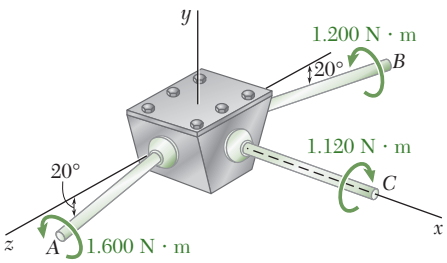


Figura P3.80

3.81 A tração no cabo preso à extremidade C de uma lança ajustável ABC é 2.490 N. Substitua a força exercida pelo cabo em C por um sistema força-binário equivalente *(a)* em A e *(b)* em B.

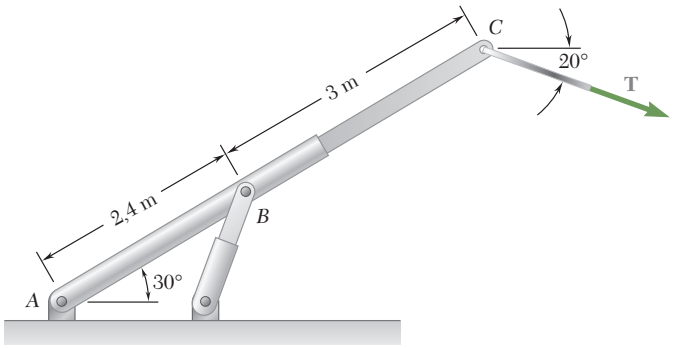


Figura P3.81

3.82 Uma força **P** de 700 N é aplicada no ponto A de um elemento estrutural. Substitua **P** por *(a)* um sistema força-binário equivalente em C, e *(b)* um sistema equivalente que consista em uma força vertical em B e uma segunda força em D.

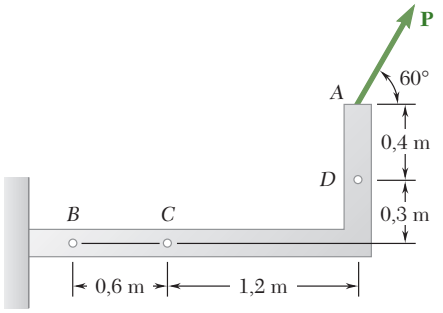


Figura P3.82

3.83 Uma força horizontal **P** de 80 N atua sobre uma alavanca em ângulo como mostrado na figura. *(a)* Substitua **P** por um sistema força-binário equivalente em B, *(b)* Encontre as duas forças verticais em C e D que sejam equivalentes ao binário encontrado na parte *a*.

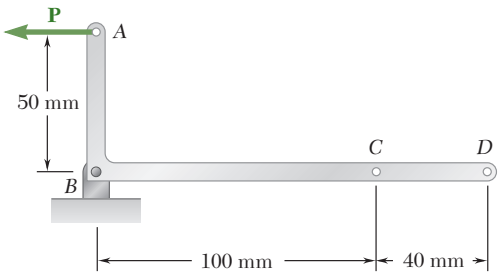


Figura P3.83

3.84 Um dirigível é preso ao solo por um cabo amarrado à sua cabine em B. Se a tração no cabo é 1.040 N, substitua a força exercida pelo cabo em B por um sistema equivalente formado por duas forças paralelas aplicadas em A e C.

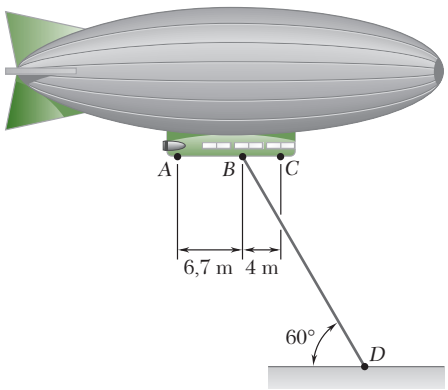


Figura P3.84

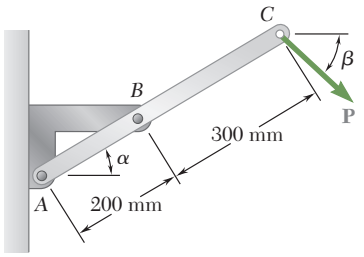


Figura P3.85

3.85 A força **P** tem a intensidade de 250 N e é aplicada na extremidade *C* de uma barra *AC* de 500 mm, fixada em um suporte em *A* e *B*. Considerando $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$, substitua **P** por *(a)* um sistema força - binário equivalente em *B*, *(b)* uma sistema força - binário equivalente formado por duas forças paralelas aplicadas em *A* e *B*.

3.86 Resolva o Problema 3.85, considerando $\alpha = \beta = 25^\circ$.

3.87 Uma força e um binário são aplicados na extremidade de uma viga em balanço. *(a)* Substitua esse sistema por uma única força **F** aplicada no ponto *C* e determine a distância *d* de *C* até a linha traçada pelos pontos *D* e *E*. *(b)* Resolva a parte *a* se as direções das duas forças de 360 N forem invertidas.

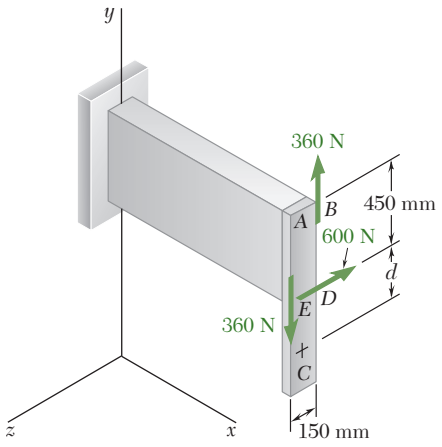


Figura P3.87

3.88 As forças de cisalhamento atuantes na seção transversal do perfil de aço podem ser representadas por uma força vertical de 900 N e duas forças horizontais de 250 N como mostrado na figura. Substitua essas forças e o binário por uma única força **F** aplicada em *C* e determine a distância *x* de *C* até a linha *BD*. (O ponto *C* é definido como *centro de cisalhamento* da seção.)

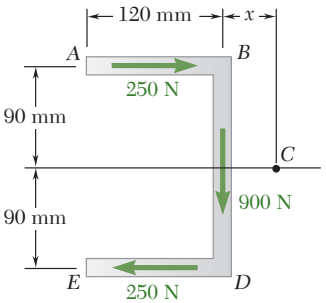


Figura P3.88

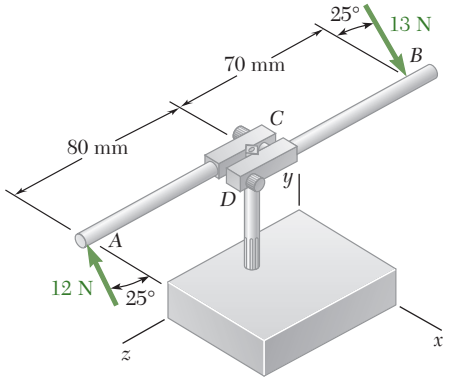


Figura P3.89

3.89 Ao abrir uma rosca em um furo, um mecânico aplica as forças horizontais mostradas sobre a alavanca de uma tarraxa. Mostre que essas forças são equivalentes a uma força única e especifique, se possível, o ponto de aplicação da força única sobre a alavanca.

3.90 Três barras de controle são fixadas a uma alavanca *ABC* e exercem forças sobre ela como mostrado na figura. *(a)* Substitua as três forças por um sistema força-binário em *B*. *(b)* Determine uma única força que equivale ao sistema força-binário obtido na parte *a* e especifique seu ponto de aplicação na alavanca.

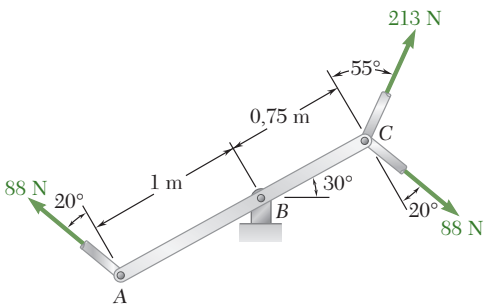


Figura P3.90

3.91 Uma placa hexagonal sofre a ação da força **P** e do binário mostrados na figura. Determine a intensidade e a direção da menor força **P** para a qual o sistema pode ser substituído por uma força única em *E*.

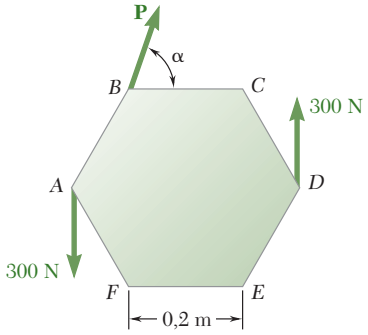


Figura P3.91

3.92 Uma placa retangular sofre a ação da força e do binário mostrados na figura. Esse sistema deve ser substituído por uma força única equivalente. *(a)* Para $\alpha = 40°$, especifique a intensidade e a linha de ação da força equivalente. *(b)* Especifique o valor de α sabendo que a linha de ação da força equivalente intercepta a linha *CD* 300 mm à direita de *D*.

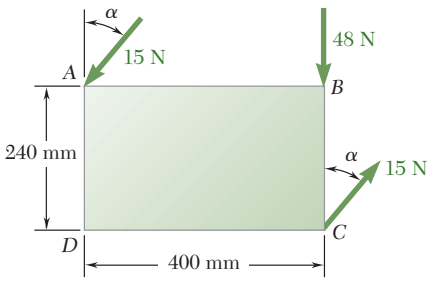


Figura P3.92

3.93 Uma força **P** de compressão excêntrica de 1.220 N é aplicada na extremidade da viga em balanço. Substitua **P** por um sistema força-binário equivalente em *G*.

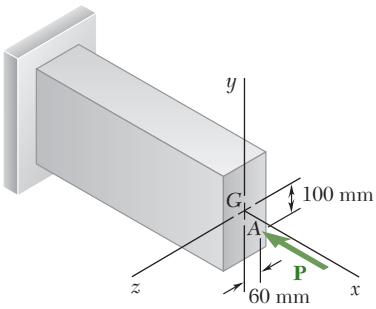


Figura P3.93

3.94 Para manter uma porta fechada, é colocada uma ripa entre o piso e a maçaneta. A ripa exerce em *B* uma força de 175 N dirigida ao longo de *AB*. Substitua essa força por um sistema força-binário equivalente em *C*.

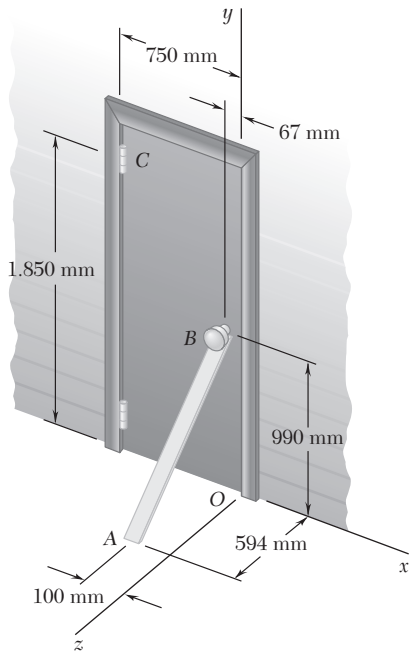


Figura P3.94

3.95 Uma antena é ancorada por três cabos como mostrado na figura. Sabendo que a tensão no cabo *AB* é 1.280 N, substitua a força exercida em *A* pelo cabo *AB* por um sistema força-binário equivalente, com centro em *O* na base da antena.

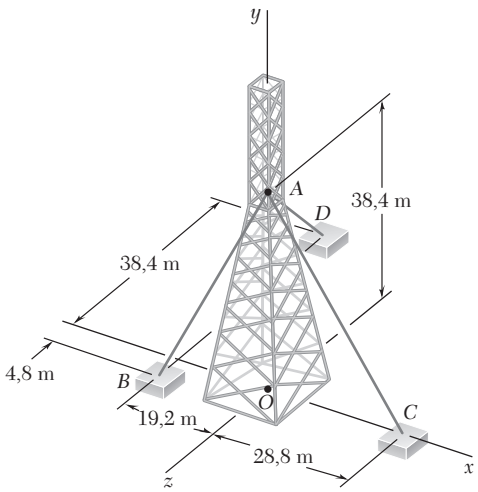


Figura P3.96 e P3.97

3.96 Uma antena é ancorada por três cabos como mostrado na figura. Sabendo que a tensão no cabo *AD* é 1.200 N, substitua a força exercida pelo cabo *AD* por um sistema força-binário equivalente, com centro em *O* na base da antena.

3.97 Substitua a força de 150 N pelo sistema força-binário equivalente em *A*.

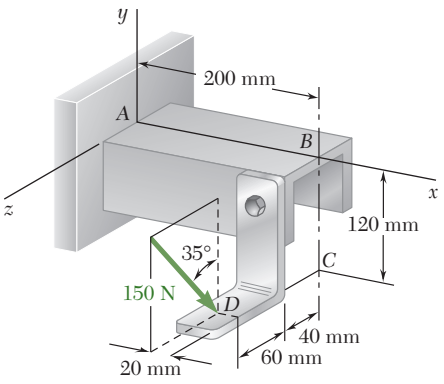


Figura P3.97

3.98 Uma força $\mathbf{F}_1$ de 77 N e um binário $\mathbf{M}_1$ de 54 N · m são aplicados no canto *E* da chapa dobrada mostrada na figura. Se $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{M}_1$ tiverem de ser substituídos por um sistema força-binário equivalente ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{M}_2$) no canto *B*, e se $(M_2)_z = 0$, determine *(a)* a distância *d*, *(b)* $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{M}_2$.

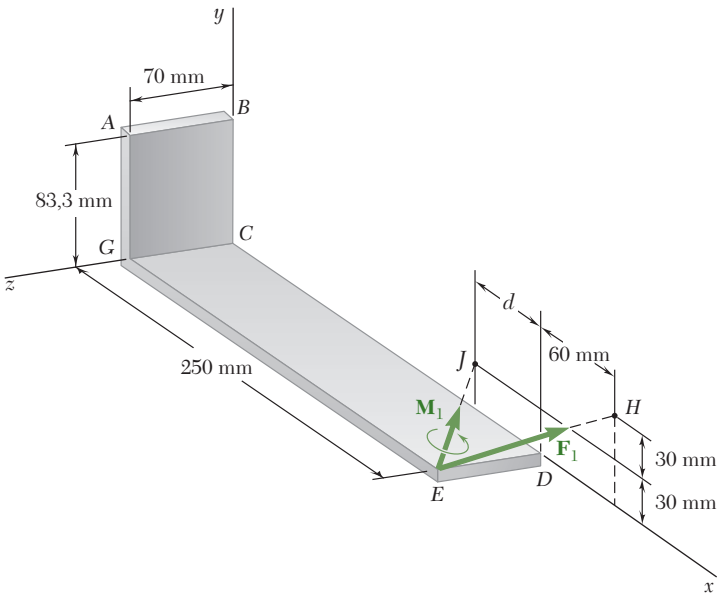


Figura P3.98

3.99 Uma força **F** de 250 N e um binário **M** de 240 N · m são aplicados no canto *A* do bloco mostrado na figura. Substitua o sistema força-binário dado por um sistema força-binário equivalente no canto *H*.

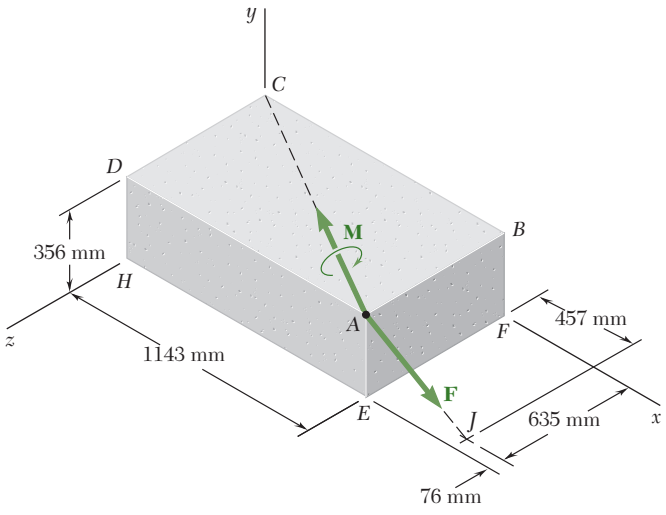


Figura P3.99

3.100 O manipulador de uma esmeriladora industrial em miniatura pesa 2,7 N e seu centro de gravidade está sobre o eixo *y*. O cabeçote do manipulador fica recuado no plano *xz* de modo que a linha *BC* forma um ângulo de 25° com a direção *x*. Mostre que o peso do manipulador e os dois binários $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ podem ser substituídos por uma força única equivalente. Além disso, considerando que $M_1 = 0{,}076$ N · m e $M_2 = 0{,}073$ N · m, determine *(a)* a intensidade e a direção da força equivalente, *(b)* o ponto em que sua linha de ação intercepta o plano *xz*.

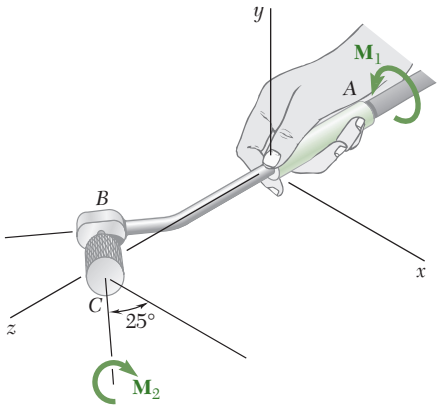


Figura P3.100

3.17 Redução de um sistema de forças a uma força e um binário

Considere um sistema de forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... atuando sobre um corpo rígido nos pontos A_1, A_2, A_3 ..., *definidos pelos vetores de posição* $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, *etc.* (Fig. 3.41*a*). Como foi visto na seção anterior, $\mathbf{F}_1$ pode ser movida de A_1 para um dado ponto *O* se um binário de momento $\mathbf{M}_1$, igual ao mo-

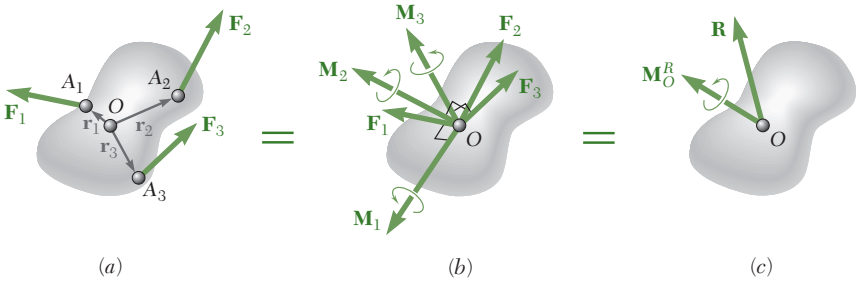


Figura 3.41

mento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}_1$ em relação a O, for adicionado ao sistema original de forças. Repetindo esse procedimento com $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ ..., obtemos o sistema mostrado na Fig. 3.41*b*, que consiste nas forças originais, atuando agora no ponto O, e nos vetores binários adicionados. Como as forças são agora concorrentes, elas podem ser somadas vetorialmente e substituídas pela sua resultante $\mathbf{R}$. De modo análogo, os vetores binários $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, ... podem ser somados vetorialmente e substituídos por um vetor binário único $\mathbf{M}_O^R$. Portanto, qualquer sistema de forças, por complexo que seja, pode ser reduzido a um *sistema força-binário equivalente atuando em um dado ponto O* (Fig. 3.41*c*). Devemos observar que cada um dos vetores binários $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, ..., na Fig. 3.41*b*, é perpendicular à sua força correspondente, mas a força resultante $\mathbf{R}$ e o vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ na Fig. 3.41*c* não serão, em geral, perpendiculares entre si.

O sistema força-binário equivalente é definido pelas equações

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.52}$$

que expressam que a força $\mathbf{R}$ é obtida pela soma de todas as forças do sistema, enquanto que o momento do vetor binário resultante $\mathbf{M}_O^R$, denominado *momento resultante* do sistema, é obtido pela soma dos momentos em relação a O de todas as forças do sistema.

Uma vez que um dado sistema de forças tenha sido reduzido a uma força e a um binário em um ponto O, pode ser facilmente reduzido a uma força e a um binário em outro ponto O'. A força resultante $\mathbf{R}$ permanecerá inalterada, mas o novo momento resultante $\mathbf{M}_{O'}^R$ será igual à soma de $\mathbf{M}_O^R$ e do momento em relação a O' da força $\mathbf{R}$ ligada a O (Fig. 3.42). Temos:

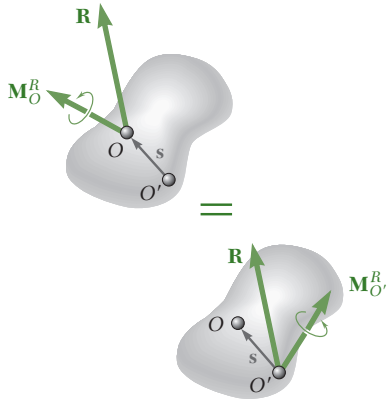


Figura 3.42

$$\mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{R} \tag{3.53}$$

Na prática, a redução de um dado sistema de forças a uma força única $\mathbf{R}$ em O e um vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ será efetuada em termos de componentes. Decompondo cada vetor posição $\mathbf{r}$ e cada força $\mathbf{F}$ do sistema em componentes retangulares, temos:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.54}$$
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{3.55}$$

Substituindo essas expressões por $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$ em (3.52) e fatorando os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, obtemos $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O^R$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_O^R = \mathbf{M}_x^R\mathbf{i} + \mathbf{M}_y^R\mathbf{j} + \mathbf{M}_z^R\mathbf{k} \tag{3.56}$$

Os componentes $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$, $\mathbf{R}_z$ representam, respectivamente, as somas dos componentes x, y e z das forças dadas e medem a tendência do sistema a imprimir ao corpo rígido um movimento de translação nas direções x, y e z. De maneira análoga, os componentes $\mathbf{M}_x^R$, $\mathbf{M}_y^R$, $\mathbf{M}_z^R$ representam, respectivamente, as somas dos momentos das forças dadas em relação aos eixos x, y e z e medem a tendência do sistema a imprimir ao corpo rígido um movimento de rotação em torno dos eixos x, y e z.

Se a intensidade e a direção da força $\mathbf{R}$ são desejadas, elas poderão ser obtidas a partir dos componentes R_x, R_y, R_z por meio das relações (2.18) e (2.19) da Seção 2.12; cálculos semelhantes irão fornecer a intensidade e a direção do vetor binário $\mathbf{M}_O^R$.

3.18 Sistemas equivalentes de forças

Vimos na seção anterior que qualquer sistema de forças que atua sobre um corpo rígido pode ser reduzido a um sistema força-binário em um dado ponto O. Esse sistema força-binário equivalente determina o efeito de um dado sistema de forças sobre o corpo rígido. *Logo, dois sistemas de forças são equivalentes se puderem ser reduzidos ao mesmo sistema força-binário em um dado ponto O.* Lembrando que o sistema força – binário em O é definido pelas relações (3.52), estabelecemos que *dois sistemas de forças,* $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots$, e $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \ldots$, *que atuam sobre o mesmo corpo rígido, são equivalentes se, e somente se, as somas das forças e as somas dos momentos em relação a um dado ponto O das forças dos dois sistemas forem, respectivamente, iguais.* Expressas matematicamente, as condições necessárias e suficientes para que os dois sistemas de forças sejam equivalentes são:

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \qquad \mathbf{e} \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{M}'_O \tag{3.57}$$

Observe que, para provar que dois sistemas de forças são equivalentes, a segunda das relações (3.57) deve ser estabelecida com respeito a *apenas um ponto O.* Contudo, ela valerá com respeito a *qualquer ponto* se os dois sistemas forem equivalentes.

Decompondo as forças e os momentos em (3.57) em seus componentes retangulares, podemos expressar da seguinte maneira as condições necessárias e suficientes para a equivalência de dois sistemas de forças que atuam sobre um corpo rígido:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \Sigma F'_x \qquad \Sigma F_y = \Sigma F'_y \qquad \Sigma F_z = \Sigma F'_z \\ \Sigma M_x &= \Sigma M'_x \qquad \Sigma M_y = \Sigma M'_y \qquad \Sigma M_z = \Sigma M'_z \end{aligned} \tag{3.58}$$

Essas equações têm um significado físico simples. Elas expressam que dois sistemas de forças são equivalentes se tenderem a imprimir ao corpo rígido (1) a mesma translação nas direções x, y e z, respectivamente, e (2) a mesma rotação em torno dos eixos, x, y e z, respectivamente.

Foto 3.3 As forças exercidas pelas crianças sobre o carrinho podem ser substituídas por um sistema força-binário equivalente ao se analisar o movimento do carrinho.

3.19 Sistemas equipolentes de vetores

Geralmente, quando dois sistemas de vetores satisfazem as Eqs. (3.57) ou (3.58), ou seja, quando suas resultantes e seus momentos resultantes em relação a um ponto arbitrário O são respectivamente iguais, diz-se que os dois sistemas são *equipolentes.* O resultado estabelecido na seção anterior pode então ser escrito do seguinte modo: *Se dois sistemas de forças que atuam sobre um corpo rígido forem equipolentes, então eles serão também equivalentes.*

É importante observar que esse enunciado não se aplica a *qualquer* sistema de vetores. Considere, por exemplo, o sistema de forças que atua sobre um conjunto de partículas independentes que *não* forma um corpo rígido. Pode acontecer de um sistema de forças diferente que atua sobre as mesmas partículas ser equipolente ao primeiro; ou seja, ele pode ter a mesma resultante e o mesmo momento resultante. Todavia, como forças diferentes irão agora atuar sobre as várias partículas, seus efeitos sobre elas serão diferentes; os dois sistemas, embora equipolentes, *não são equivalentes.*

3.20 Casos particulares de redução de um sistema de forças

Vimos na Seção 3.17 que qualquer sistema de forças que atuam sobre um corpo rígido pode ser reduzido a um sistema força-binário equivalente em O, consistido em uma força $\mathbf{R}$ igual à soma das forças do sistema e um vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ de momento igual ao momento resultante do sistema.

Quando $\mathbf{R} = 0$, o sistema força-binário reduz-se ao vetor binário $\mathbf{M}_O^R$. O sistema de forças dado pode, então, ser reduzido a um binário único, denominado *binário resultante* do sistema.

Vamos investigar as condições em que um dado sistema de forças pode ser reduzido a uma força única. Segue-se da Seção 3.16 que o sistema força-binário em O pode ser substituído por uma força única $\mathbf{R}$ que atua ao longo de uma nova linha de ação se $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O^R$ forem mutuamente perpendiculares. Logo, os sistemas de forças que podem ser reduzidos a uma força única, ou resultante, são os sistemas para os quais a força $\mathbf{R}$ e o vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ são mutuamente perpendiculares. Essa condição não é geralmente satisfeita por sistemas de forças no espaço, mas será satisfeita por sistemas que consistem em (1) forças concorrentes, (2) forças coplanares ou (3) forças paralelas. Esses três casos serão discutidos em separado.

1. *Forças concorrentes* são aplicadas ao mesmo ponto e, portanto, podem ser somadas diretamente para se obter sua resultante $\mathbf{R}$. Logo, elas sempre sé reduzem a uma força única. Forças concorrentes foram tratadas em detalhe no Cap. 2.
2. *Forças coplanares* atuam no mesmo plano, que pode ser considerado como sendo o plano da figura (Fig. 3.43*a*). A soma $\mathbf{R}$ das forças do sistema também ficará no plano da figura, ao passo que o momento de cada força em relação a O e, portanto, o momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ será perpendicular a esse plano. Logo, o sistema força-binário em O consiste em uma força $\mathbf{R}$ e um vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ que são mutuamente perpendiculares (Fig. 3.43*b*).* Pode-se reduzi-los a uma força única $\mathbf{R}$ movendo-se $\mathbf{R}$ no plano da figura até que seu momento em relação a O tome-se igual a $\mathbf{M}_O^R$. A distância de O até a linha de ação de $\mathbf{R}$ é $d = M_O^R/R$ (Fig. 3.43*c*).

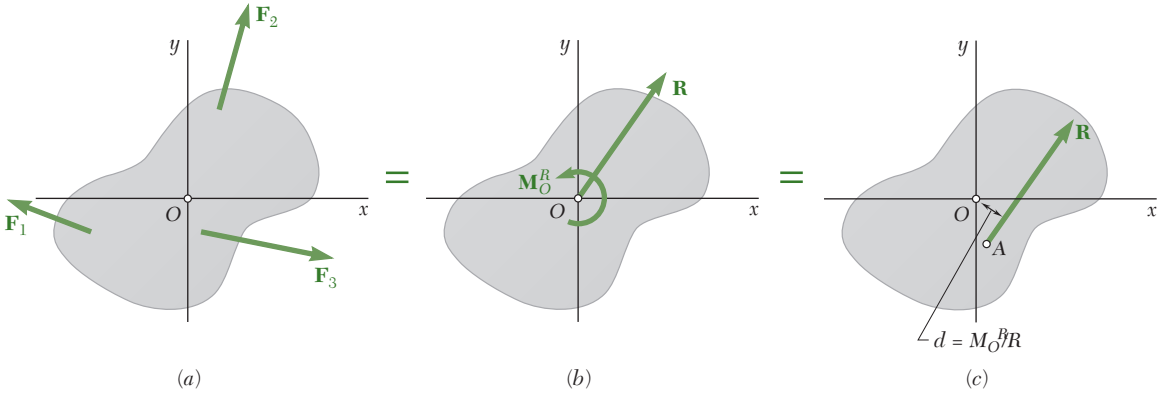
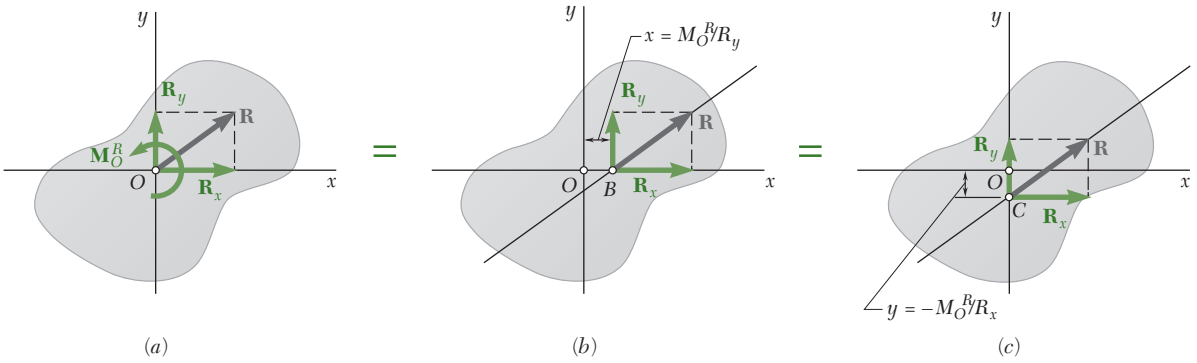


Figura 3.43

* Por ser perpendicular ao plano da figura, o vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ é representado pelo símbolo ↰. Um binário anti-horário ↰ representa um vetor apontando para fora do papel, e um binário horário ↲ representa um vetor apontando para dentro do papel.

Conforme observamos na Seção 3.17, a redução de um sistema de forças é significativamente simplificado se as forças forem decompostas em componentes retangulares. O sistema força-binário em O é caracterizado então pelos componentes (Fig. 3.44*a*).

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad M^R_Z = M^R_O = \Sigma M_O \tag{3.59}$$



(*a*) (*b*) (*c*)

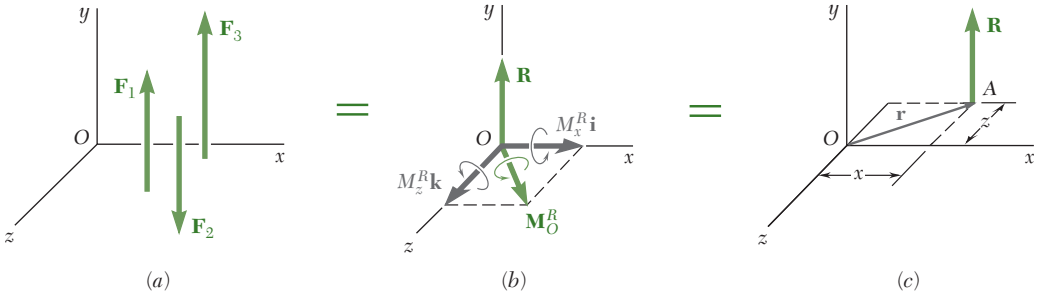
Figura 3.44

Para reduzir o sistema a uma força única **R**, fazemos com que o momento de **R** em relação a O tenha de ser igual a $\mathbf{M}^R_O$. Representando por x e y as coordenadas do ponto de aplicação da resultante e retomando a fórmula (3.22) da Seção 3.8, temos:

$$xR_y - yR_x = \mathbf{M}^R_O$$

que representa a equação da linha de ação de **R**. Podemos também determinar diretamente as interseções x e y da linha de ação da resultante observando que $\mathbf{M}^R_O$ deve ser igual ao momento em relação a O do componente y de **R** quando **R** é ligado a B (Fig. 3.44*b*) e ao momento de seu componente x, quando **R** é ligado a C (Fig. 3.44*c*).

3. *Forças paralelas* têm linhas de ação paralelas, podendo ter ou não o mesmo sentido. Admitindo aqui que as forças são paralelas ao eixo y (Fig. 3.45*a*), notamos que sua soma **R** também será paralela ao eixo y. Por outro lado, como o momento de uma dada força deve ser perpendicular a ela, o momento em relação a O de cada força do sistema e, portanto, o momento resultante $\mathbf{M}^R_O$ ficarão no plano zx. Logo, o sistema força-binário em O consiste em uma força **R** e um vetor bi-



(*a*) (*b*) (*c*)

Figura 3.45

Foto 3.4 As forças paralelas do vento atuando sobre as placas de sinalização de uma rodovia podem ser reduzidas a uma força única equivalente. A determinação dessa força pode simplificar o cálculo das forças que atuam sobre os apoios da estrutura em que as placas estão fixadas.

nário $\mathbf{M}_O^R$ que são mutuamente perpendiculares (Fig. 3.45*b*). Eles podem ser reduzidos a uma força única $\mathbf{R}$ (Fig. 3.45*c*) ou, se $\mathbf{R} = 0$, a um binário único de momento $\mathbf{M}_O^R$.

Na prática, o sistema força-binário em O será caracterizado pelos componentes:

$$R_y = \Sigma F_y \qquad M^R{}_x = \Sigma M_x \qquad M^R{}_z = \Sigma M_x \tag{3.60}$$

A redução do sistema a uma força única pode ser efetuada movendo-se $\mathbf{R}$ para um novo ponto de aplicação $A(x, 0, z)$ escolhido de modo que o momento de $\mathbf{R}$ em relação a O fique igual a $\mathbf{M}_O^R$.

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$
$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times R_y\mathbf{j} = M_x^R\mathbf{i} + M_z^R\mathbf{k}$$

Calculando os produtos vetoriais e igualando os coeficientes dos vetores unitários correspondentes em ambos os membros da equação, obtemos duas equações escalares que definem as coordenadas de A:

$$-zR_y = M_x^R \qquad xR_y = M_z^R$$

Essas equações expressam que os momentos de $\mathbf{R}$ em relação aos eixos x e z devem ser iguais a M_x^R e M_z^R, respectivamente.

*3.21 Redução de um sistema de forças a um torsor

No caso geral de forças no espaço, o sistema força-binário equivalente em O consiste em uma força $\mathbf{R}$ e um vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ que não são perpendiculares e nenhum deles é nulo (Fig. 3.46*a*). Logo, o sistema de forças *não* pode ser reduzido a uma força única ou a um binário único. O vetor binário, porém, pode ser substituído por dois outros vetores binários obtidos ao decompor $\mathbf{M}_O^R$ em um componente $\mathbf{M}_1$ ao longo de $\mathbf{R}$ e um componente $\mathbf{M}_2$ em um plano perpendicular a $\mathbf{R}$ (Fig. 3.46*b*). O vetor binário $\mathbf{M}_2$ e a força $\mathbf{R}$ podem, assim, ser substituídos por uma força única $\mathbf{R}$ que atua ao longo de uma nova linha de ação. Logo, o sistema de forças original reduz-se a $\mathbf{R}$ e ao vetor binário $\mathbf{M}_1$ (Fig. 3.46*c*), ou seja, a $\mathbf{R}$ e a um binário que atua no plano perpendicular á $\mathbf{R}$. Esse sistema força-binário particular é denominado *torsor* e essa combinação resultante de empurrar e torcer é encontrada em operações de rosqueamento de parafusos. A linha de ação de $\mathbf{R}$ é conhecida como *eixo do torsor* e a razão $p = M_1/R$

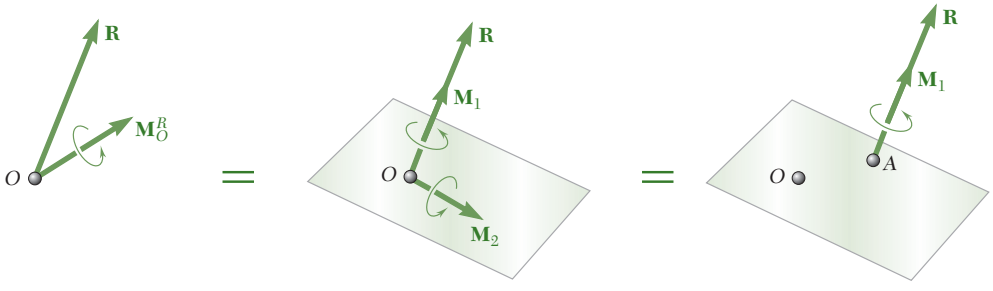


Figura 3.46

é denominada *passo* do torsor. Logo, um torsor consiste em dois vetores colineares, a saber, uma força **R** e um vetor binário:

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} \tag{3.61}$$

Retomando a expressão (3.35) obtida na Seção 3.9 para a projeção de um vetor sobre a linha de ação de um outro vetor, observamos que a projeção de $\mathbf{M}_O^R$ sobre a uma de ação de **R** é:

$$M_1 = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R}$$

Logo, o passo do torsor pode ser expresso como:*

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \tag{3.62}$$

Para definir o eixo do torsor, podemos escrever uma relação que envolva o vetor posição **r** de um ponto arbitrário *P* localizado sobre esse eixo. Ligando a força resultante **R** e o vetor binário $\mathbf{M}_1$ ao ponto *P* (Fig. 3.47) e expressando que o momento em relação a *O* desse sistema força-binário é igual ao momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ do sistema de forças original, escrevemos

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.63}$$

ou, retomando a Eq. (3.61)

$$p\mathbf{R} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.64}$$

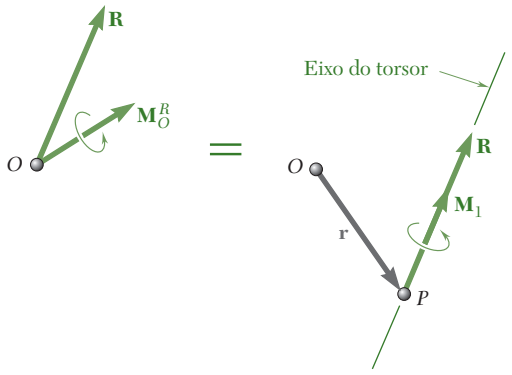


Figura 3.47

Foto 3.5 A ação de empurrar e girar associada ao aperto de um parafuso ilustra as linhas de ação colineares da força e do vetor binário que constituem um torsor.

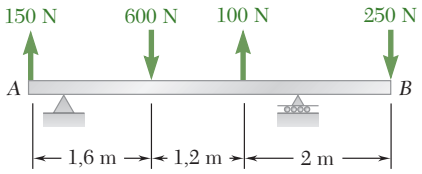
* As expressões obtidas para a projeção do vetor binário sobre a linha de ação de **R** e para o passo do torsor são independentes da escolha do ponto *O*. Usando a relação (3.53) da Seção 3.17, observamos que, se um ponto diferente *O'* tivesse sido usado, o numerador em (3.62) seria

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$$

Como o produto triplo misto $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$ é identicamente nulo, temos.

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$$

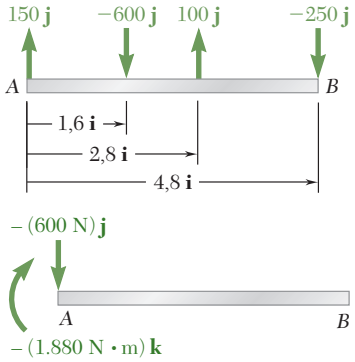
Logo, o produto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$ independe da escolha do ponto *O*.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.8

Uma viga de 4,80 m de comprimento está sujeita às três forças mostradas na figura. Reduza o sistema de forças dado a (*a*) um sistema força-binário equivalente em *A*, (*b*) um sistema força-binário equivalente em *B*, (*c*) a uma força única ou resultante.

Observação: como as relações de apoio não estão incluídas no sistema de forças dado, esse sistema não manterá a viga em equilíbrio.



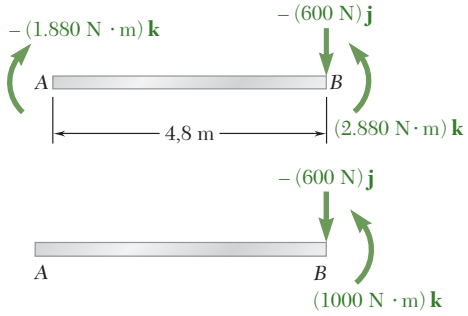
SOLUÇÃO

a. Sistema força-binário em A. O sistema força-binário em *A* equivalente ao sistema de forças dado consiste na força **R** e no binário $\mathbf{M}_A^R$ definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F}\\ &= (150\text{ N})\mathbf{j} - (600\text{ N})\mathbf{j} + (100\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{j} = -(600\text{ N})\mathbf{j}\\ \mathbf{M}_A^R &= \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})\\ &= (1{,}6\mathbf{i})\times(-600\mathbf{j}) + (2{,}8\mathbf{i})\times(100\mathbf{j}) + (4{,}8\mathbf{i})\times(-250\mathbf{j})\\ &= -(1.880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Logo, o sistema de força-binário equivalente em *A* é:

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_A^R = 1.880\text{ N}\cdot\text{m}\,\circlearrowright \quad \blacktriangleleft$$



b. Sistema força-binário em B. Sugerimos encontrar um sistema força-binário em *B* equivalente ao sistema de força-binário em *A*, determinado no trecho *a*. A força **R** fica inalterada; porém, deve-se determinar um novo binário $\mathbf{M}_B^R$ cujo momento é igual ao momento em relação a *B* do sistema força-binário determinado no trecho *a*. Assim, temos:

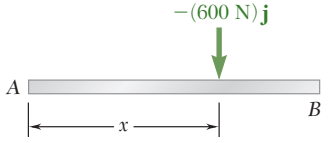
$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B^R &= \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA}\times\mathbf{R}\\ &= -(1.880\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (-4{,}8\,\text{m})\mathbf{i}\times(-600\,\text{N})\mathbf{j}\\ &= -(1.880\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (2.880\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} = +(1.000\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Logo, o sistema força-binário equivalente em *B* é:

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_B^R = 1.000\text{ N}\cdot\text{m}\,\circlearrowright \quad \blacktriangleleft$$

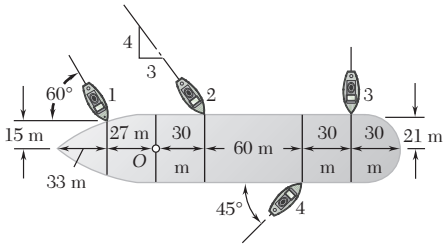
c. Força única ou resultante. A resultante do sistema de forças dado é igual a **R**, e seu ponto de aplicação deve ser tal que o momento de **R** em relação a *A* é igual a $\mathbf{M}_A^R$. Temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\times\mathbf{R} &= \mathbf{M}_A^R\\ x\mathbf{i}\times(-600\text{ N})\mathbf{j} &= -(1.880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\\ -x(600\text{ N})\mathbf{k} &= -(1.880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$



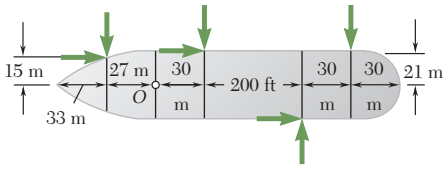
e concluímos que $x = 3{,}13$ m. Logo, a força única equivalente ao sistema dado é definida como:

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad x = 3{,}13\text{ m} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 3.9

Quatro rebocadores são usados para trazer um transatlântico ao cais. Cada rebocador exerce em força de 22.500 N na direção mostrada na figura. Determine (*a*) o sistema força-binário equivalente no mastro de proa *O*, (*b*) o ponto sobre o casco no qual um rebocador único, mais potente, deva empurrar para produzir o mesmo efeito dos quatro rebocadores originais.



SOLUÇÃO

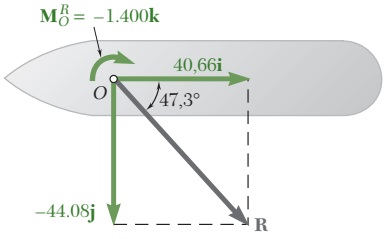
a. Sistema força-binário em *O*. Cada uma das forças dadas é decomposta nos componentes no diagrama apresentado (a unidade das forças são em kN). O sistema força-binário em *O* equivalente ao sistema de forças dado consiste em uma força $\mathbf{R}$ e um binário $\mathbf{M}_O^R$ definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F}\\ &= (11{,}25\mathbf{i} - 19{,}49\mathbf{j}) + (13{,}5\mathbf{i} - 18\mathbf{j}) + (22{,}5\mathbf{j}) + (15{,}91\mathbf{i} + 15{,}91\mathbf{j})\\ &= 40{,}66\mathbf{i} - 44{,}08\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O^R &= \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})\\ &= (-27\mathbf{i} + 15\mathbf{j}) \times (11{,}25\mathbf{i} - 19{,}49\mathbf{j})\\ &\quad + (30\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (13{,}5\mathbf{i} - 18\mathbf{j})\\ &\quad + (120\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (-22{,}5\mathbf{j})\\ &\quad + (90\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (15{,}91\mathbf{i} + 15{,}91\mathbf{j})\\ &= (526{,}23 - 168{,}75 - 540 - 283{,}5 - 2.700 + 1.431{,}9 + 334{,}11)\mathbf{k}\\ &= -1.400\mathbf{k}\end{aligned}$$

Logo, o sistema força-binário equivalente em *O* é:

$$\mathbf{R} = (40{,}66\text{ kN})\mathbf{i} - (44{,}08\text{ kN})\mathbf{j} \qquad \mathbf{M}_O^R = -(1.400\text{ kN} \cdot \text{m})k$$

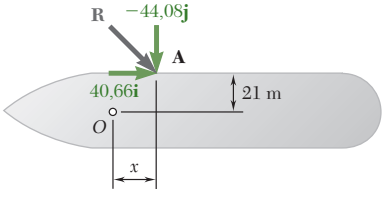


ou $\mathbf{R} = 59{,}97\text{ kN} \searrow 47{,}3° \qquad \mathbf{M}_O^R = 1.400\text{ kN} \cdot \text{m} \circlearrowleft$ ◀

Observação: como todas as forças estão contidas no plano da figura, poderíamos esperar que a soma de seus momentos fosse perpendicular a esse plano. Observe que o momento de cada componente de força poderia ser obtido diretamente do diagrama efetuando-se primeiro o produto da sua intensidade e da distância perpendicular até *O* e, em seguida, atribuindo-se a esse produto um sinal positivo ou negativo, dependendo do sentido do momento.

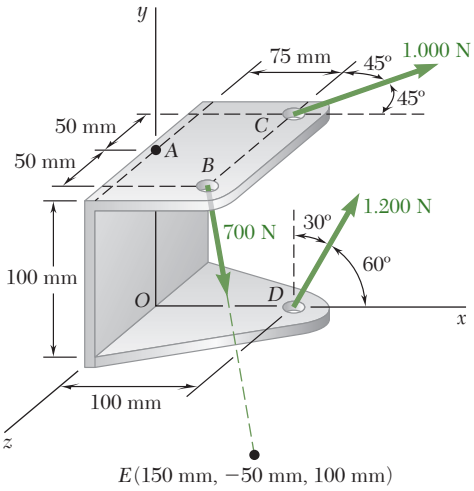
b. Rebocador único. A força exercida por um rebocador único deve ser igual a $\mathbf{R}$ e seu ponto de aplicação *A* deve ser tal que o momento de $\mathbf{R}$ em relação a *O* seja igual a $\mathbf{M}_O^R$. Observando que a posição do ponto *A* é:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$$



temos

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R\\ (x\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (40{,}66\mathbf{i} - 44{,}08\mathbf{j}) &= -1.400\mathbf{k}\\ -x(44{,}08)\mathbf{k} - 853{,}66\mathbf{k} &= -1.400\mathbf{k} \qquad x = 12{,}39\text{m}\end{aligned}$$ ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 3.10

Três cabos estão presos ao suporte, como mostra a figura. Substitua as forças exercidas pelos cabos por um sistema força-binário equivalente em *A*.

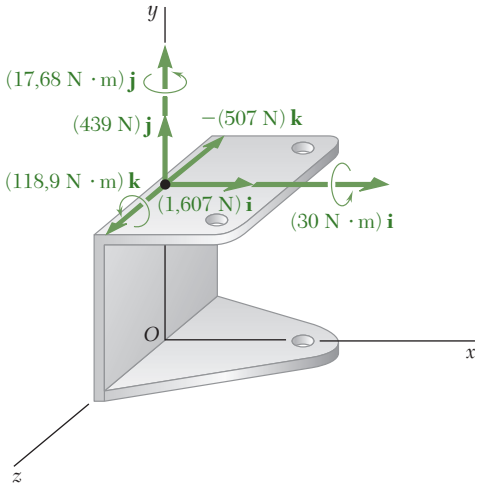
SOLUÇÃO

Primeiro determinamos os vetores posição relativos traçados do ponto *A* até os pontos de aplicação das várias forças e decompomos as forças em componentes retangulares. Sendo $\mathbf{F}_B = (700\text{ N})\boldsymbol{\lambda}_{BE}$, onde

$$\boldsymbol{\lambda}_{BE} = \frac{\overrightarrow{BE}}{BE} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$$

temos, usando metros e newtons:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{B/A} &= \overrightarrow{AB} = 0{,}075\mathbf{i} + 0{,}050\mathbf{k} & \mathbf{F}_B &= 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\\
\mathbf{r}_{C/A} &= \overrightarrow{AC} = 0{,}075\mathbf{i} - 0{,}050\mathbf{k} & \mathbf{F}_C &= 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k}\\
\mathbf{r}_{D/A} &= \overrightarrow{AD} = 0{,}100\mathbf{i} - 0{,}100\mathbf{j} & \mathbf{F}_D &= 600\mathbf{i} + 1.039\mathbf{j}
\end{aligned}$$



O sistema força-binário em *A* equivalente ao sistema de forças dado consiste em uma força $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ e um binário $\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. A força $\mathbf{R}$ é obtida somando-se respectivamente os componentes *x*, *y* e *z* das forças:

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = (1.607\text{ N})\mathbf{i} + (439\text{ N})\mathbf{j} - (507\text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

O cálculo de $\mathbf{M}_A^R$ ficará facilitado se expressamos o momento das forças em forma de determinantes (Seção 3.8):

$$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0{,}075 & 0 & 0{,}050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} - 45\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0{,}075 & 0 & -0{,}050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17{,}68\mathbf{j}$$

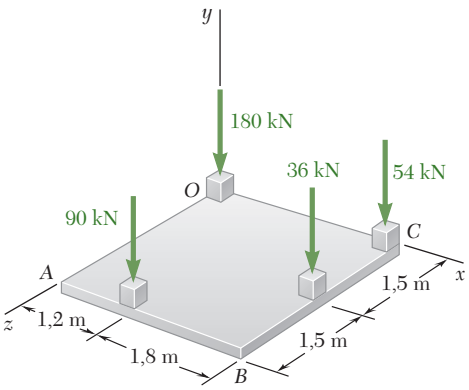
$$\mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0{,}100 & -0{,}100 & 0 \\ 600 & 1{,}039 & 0 \end{vmatrix} = 163{,}9\mathbf{k}$$

Somando as expressões obtidas, temos

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (17{,}68\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (118{,}9\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Os componentes retangulares da força $\mathbf{R}$ e do binário $\mathbf{M}_A^R$ são mostrados no esquema ao lado.

PROBLEMA RESOLVIDO 3.11



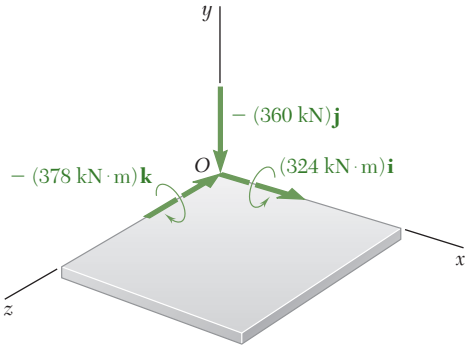
Uma laje de fundação quadrada apoia os quatro pilares como mostrado na figura. Determine a intensidade e o ponto de aplicação da resultante das quatro cargas.

SOLUÇÃO

Primeiro, reduzimos o sistema de forças a um sistema de força-binário na origem O do sistema de coordenadas. Esse sistema força-binário consiste em uma força $\mathbf{R}$ e um binário $\mathbf{M}_O^R$ definidos da seguinte maneira:

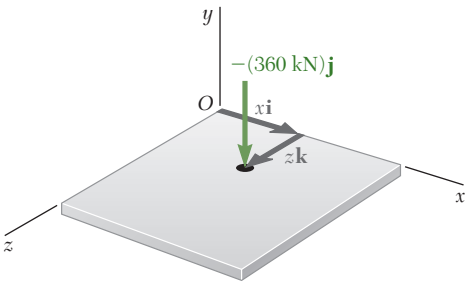
$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Os vetores posição dos pontos de aplicação das várias forças são determinados e os cálculos são distribuídos em forma de tabela:



r, m	F, kN	r × F, kN · m
0	−180**j**	0
3**i**	−54**j**	− 162**k**
3**i** + 1,5**k**	−36**j**	54**i** − 108**k**
1,2**i** + 3**k**	−90**j**	270**i** − 108**k**
	R = −360**j**	$\mathbf{M}_O^R$ = 324**i** − 378**k**

Como a força $\mathbf{R}$ e o vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ são perpendiculares entre si, o sistema força-binário obtido pode ainda ser reduzido a uma força única $\mathbf{R}$. O novo ponto de aplicação de $\mathbf{R}$ será escolhido no plano da laje de modo que o momento $\mathbf{R}$ em relação a O seja igual a $\mathbf{M}_O^R$. Dado $\mathbf{r}$ o vetor posição do ponto de aplicação desejado e x e z as suas coordenadas, podemos escrever



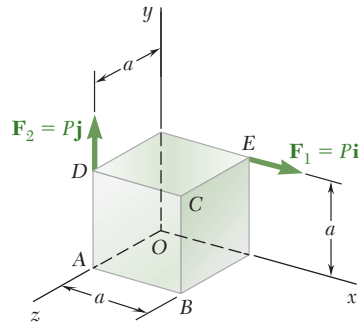
$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times (-360\mathbf{j}) &= 324\mathbf{i} - 378\mathbf{k} \\ -360x\mathbf{k} + 360z\mathbf{i} &= 324\mathbf{i} - 378\mathbf{k} \end{aligned}$$

de onde temos

$$\begin{aligned} -360x &= -378 & 360z &= 324 \\ x &= 1{,}05 \text{ m} & z &= 0{,}9 \text{ m} \end{aligned}$$

Concluímos que a resultante do sistema de forças dado é:

$$\mathbf{R} = 360 \text{ kN} \downarrow \qquad x = 1{,}5 \text{ m}, z = 0{,}9 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 3.12

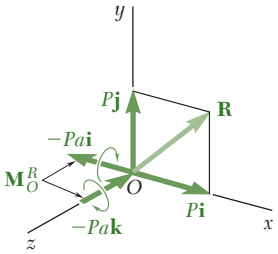
Duas forças de igual intensidade P atuam sobre um cubo de aresta a como mostra a figura. Substitua as duas forças por um torsor equivalente e determine (*a*) a intensidade e a direção da força resultante $\mathbf{R}$, (*b*) o passo do torsor, (*c*) o ponto do torsor que intercepta o plano yz.

SOLUÇÃO

Sistema força-binário equivalente em O. Primeiro, determinamos o sistema força-binário equivalente na origem O. Observamos que os vetores posição dos pontos de aplicação E e D das duas forças dadas são $\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. A resultante $\mathbf{R}$ das duas forças e o momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ delas em relação a O são:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \tag{1}$$

$$\mathbf{M}_O^R = \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j}$$
$$= -Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \tag{2}$$

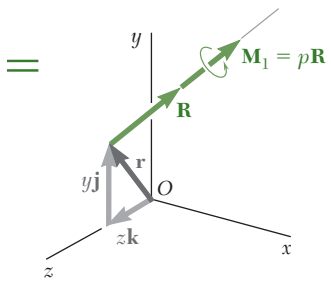


a. Força resultante R. Segue-se da Eq. (1) e do esquema ao lado que a força resultante $\mathbf{R}$ tem intensidade $R = P\sqrt{2}$, está no plano xy e forma ângulos de 45° com eixos x e y. Logo:

$$R = P\sqrt{2} \qquad \theta_x = \theta_y = 45° \qquad \theta_z = 90° \quad \blacktriangleleft$$

b. Passo do torsor. Retomando a fórmula (3.62) da Seção 3.21 e as Eqs. (1) e (2) anteriores, temos:

$$p = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} = \frac{P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-Pa)(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{(P\sqrt{2})^2} = \frac{-P^2a(1 + 0 + 0)}{2P^2} \qquad p = -\frac{a}{2} \quad \blacktriangleleft$$



c. Eixo do tersor. Segue-se dos resultados anteriores e da Eq. (3.61) que o tersor consiste na força $\mathbf{R}$ encontrada em (1) e no vetor binário:

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} = -\frac{a}{2}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \tag{3}$$

Para encontrar o ponto em que o eixo do tersor intercepta o plano yz, demonstramos que o momento do tersor em relação ao ponto O é igual ao momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ do sistema original:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

ou, observando que $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e substituindo $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_O^R$ e $\mathbf{M}_1$ das Eqs. (1), (2) e (3):

$$-\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

$$-\frac{Pa}{2}\mathbf{i} - \frac{Pa}{2}\mathbf{j} - Py\mathbf{k} + Pz\mathbf{j} - Pz\mathbf{i} = -Pa\mathbf{i} - Pa\mathbf{k}$$

Igualando os coeficientes de $\mathbf{k}$ e, em seguida, os coeficientes de $\mathbf{j}$, encontramos:

$$y = a \qquad z = a/2 \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Esta seção foi dedicada à redução e simplificação de sistemas de forças. Ao resolver os problemas a seguir, seremos chamados a efetuar as operações discutidas a seguir.

1. Redução de um sistema de forças a uma força e um binário em um dado ponto *A*. A força é a *resultante* **R** do sistema e é obtida somando-se as várias forças; o momento do binário é *o momento resultante* do sistema e é obtido somando-se os momentos em relação a *A* das várias forças. Temos:

$$\mathrm{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_A^R = \Sigma\,(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

onde o vetor posição *r* é traçado de *A* até *qualquer ponto* sobre a linha de ação de **F**.

2. Deslocamento de um sistema força-binário de um ponto *A* para um ponto *B*. Se desejamos reduzir um dado sistema de forças a um sistema força-binário no ponto *B* após tê-lo reduzido a um sistema força-binário no ponto *A*, não é preciso recalcular os momentos das forças em relação a *B*. A resultante **R** permanece inalterada e o novo momento $\mathbf{M}_B^R$ resultante pode ser obtido somando-se a $\mathbf{M}_A^R$ o momento em relação a *B* da força **R** aplicada em *A* [Problema Resolvido 3.8]. Dado **s** o vetor traçado de *B* até *A*, podemos escrever:

$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}$$

3. Verificação da equivalência de dois sistemas de forças. Primeiro, devemos reduzir cada sistema de forças a um sistema força-binário *num mesmo ponto A arbitrário* (como explicamos no primeiro parágrafo). Os dois sistemas serão equivalentes (ou seja, terão o mesmo efeito sobre o corpo rígido dado) se os dois sistemas força-binário que obtemos forem idênticos, ou seja, se

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \qquad \text{e} \qquad \Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma\mathbf{M}'_A$$

Devemos reconhecer que, se a primeira dessas equações não está satisfeita, ou seja, se os dois sistemas não têm a mesma resultante **R**, os dois sistemas não podem ser equivalentes e, portanto, não é necessário conferir se a segunda equação é, ou não, satisfeita.

4. Redução de um dado sistema de forças a uma força única. Primeiro, devemos reduzir o sistema dado a um sistema força-binário que consista na resultante **R** e no vetor binário $\mathbf{M}_A^R$ em algum ponto *A* conveniente (como explicamos no primeiro parágrafo). Foi mencionado na seção anterior que uma redução adicional a uma força única é possível *somente se a força* **R** *e o vetor binário* $\mathbf{M}_A^R$ *forem perpendiculares entre si*. Esse certamente será o caso para sistemas de forças que sejam *concorrentes, coplanares* ou *paralelas.* A força única necessária pode ser obtida movendo-se **R** até que o momento em relação ao ponto *A* seja igual a $\mathbf{M}_A^R$, como foi feito em vários problemas da seção anterior. De forma mais formal, podemos escrever que o vetor posição **r** traçado de *A* até qualquer ponto sobre a linha de ação da força única **R** deve satisfazer a equação:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$

Esse procedimento foi usado nos Problemas Resolvidos 3.8, 3.9 e 3.11.

(continua)

5. Redução de um sistema de forças dado a um torsor. Se o sistema dado consiste em forças que não são concorrentes, coplanares ou paralelas, o sistema força-binário equivalente em um ponto A consistirá em uma força $\mathbf{R}$ e um vetor binário $\mathbf{M}_A^R$ que geralmente *não são perpendiculares entre si.* (Para conferir se $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_A^R$ são perpendiculares entre si, efetuemos o produto escalar de ambos. Se esse produto for nulo, eles são perpendiculares entre si; caso contrário, não são.) Se $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_A^R$ não são mutuamente perpendiculares, o sistema força-binário (e, portanto, o sistema de forças dado) *não pode ser reduzido a uma força única.* No entanto, o sistema pode ser reduzido a um *torsor* – a combinação de uma força $\mathbf{R}$ e um vetor binário $\mathbf{M}_1$ direcionado ao longo de uma linha comum de ação denominada *eixo do torsor* (Fig. 3.47). A razão $p = M_1/R$ é denominada *passo* do torsor.

Para reduzir um dado sistema de forças a um torsor, devemos obedecer aos seguintes passos:

a. Reduzir o sistema dado a um sistema força-binário equivalente ($\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_O^R$), geralmente localizado na origem O.

b. Determinar o passo p da Eq. (3.62):

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \tag{3.62}$$

e o vetor binário como $\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R}$.

c. Expressar que o momento em relação a O do torsor é igual ao momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ do sistema força-binário em O.

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.63}$$

Essa equação nos possibilita determinar o ponto em que a linha de ação do torsor intercepta um plano especificado, pois o vetor posição $\boldsymbol{r}$ é direcionado de O para aquele ponto.

Esses passos são ilustrados no Problema Resolvido 3.12. Embora a determinação de um torsor e do ponto em que seu eixo intercepta um plano possa parecer difícil, o processo é somente a aplicação de algumas das ideias e técnicas desenvolvidas neste capítulo. Portanto, uma vez que dominamos o torsor, podemos estar seguros de que compreendemos grande parte do Cap. 3.

PROBLEMAS

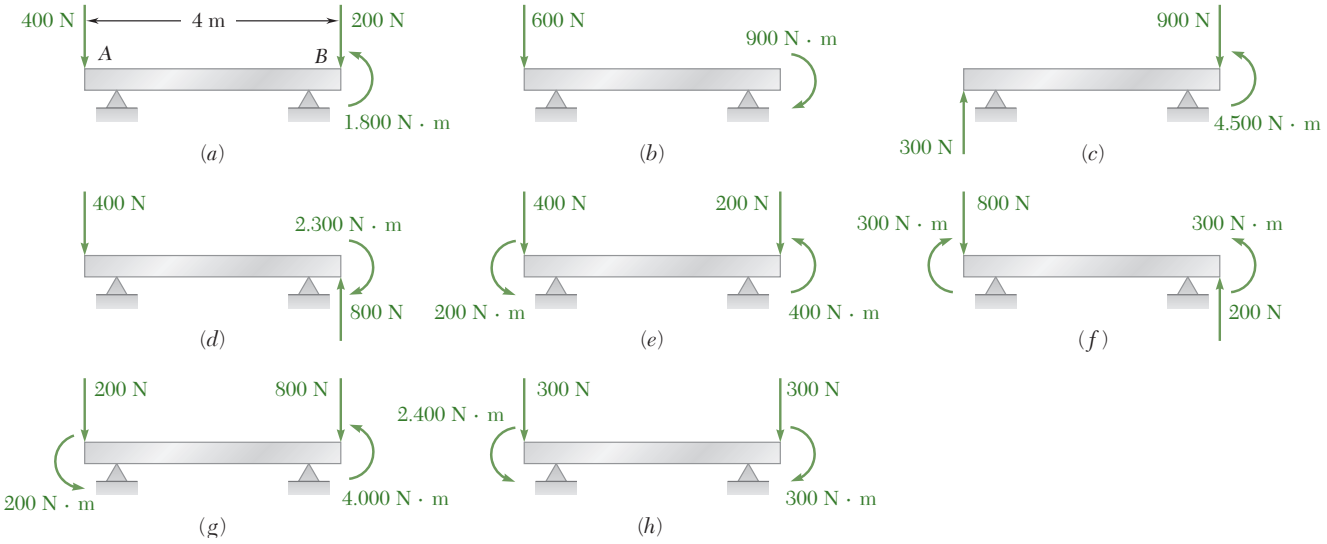


Figura P3.101

3.101 Uma viga de 4 m de comprimento está sujeita a uma variedade de cargas, *(a)* Substitua cada carga por um sistema força-binário equivalente na extremidade *A* da viga. *(b)* Quais das cargas são equivalentes?

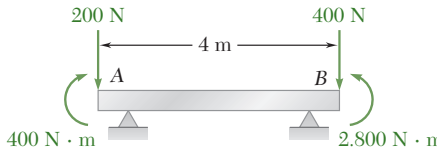


Figura P3.102

3.102 Uma viga de 4 m de comprimento está carregada como mostra a figura. Determine a carga do Problema 3.101 que é equivalente a essa carga.

3.103 Determine a força única equivalente e a distância do ponto *A* até sua linha de ação para a viga e a carga do *(a)* Problema 3.101*b*, *(b)* Problema 3.101*d*, *(c)* Problema 3.101*e*.

3.104 Cinco sistemas força-binário separados atuam nos cantos de uma peça de metal que foi dobrada no formato mostrado na figura. Determine quais desses sistemas é equivalente a uma força $\mathbf{F} = (44\text{ N})\mathbf{i}$ e um binário de momento $\mathbf{M} = (20\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (20\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ localizados na origem.

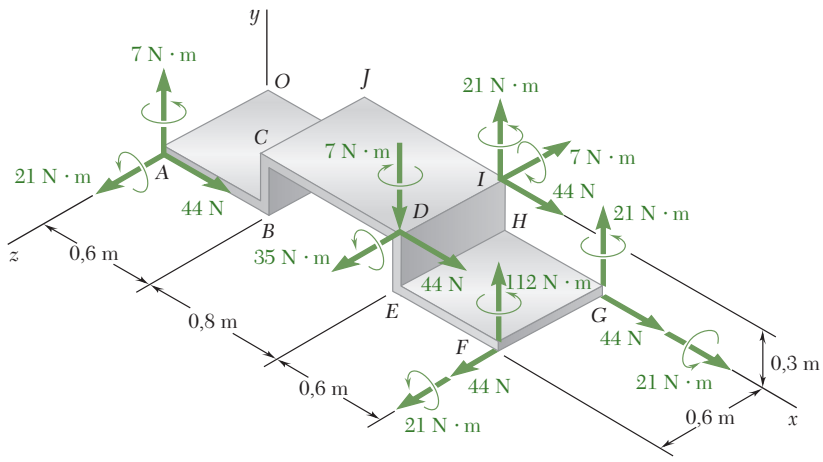


Figura P3.104

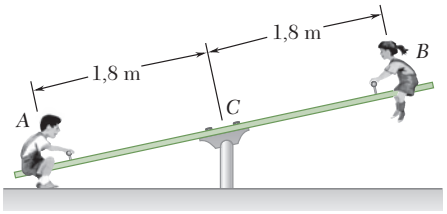


Figura P3.105

3.105 Os pesos de duas crianças sentadas nas extremidades A e B de uma gangorra são 370 N e 280 N, respectivamente. Onde deverá sentar-se uma terceira criança de modo que a resultante dos pesos das três crianças passe pelo ponto C se a criança tiver um peso de *(a)* 260 N, *(b)* 230 N.

3.106 Três refletores de palco são montados em um tubo, como mostra a figura. As luzes em A e B pesam 18 N cada uma, enquanto a outra em C pesa 15 N. *(a)* Se $d = 0{,}60$ m, determine a distância do ponto D até a linha de ação da resultante dos pesos dos três refletores. *(b)* Determine o valor de d de modo que a resultante dos pesos passe pelo ponto médio do tubo.

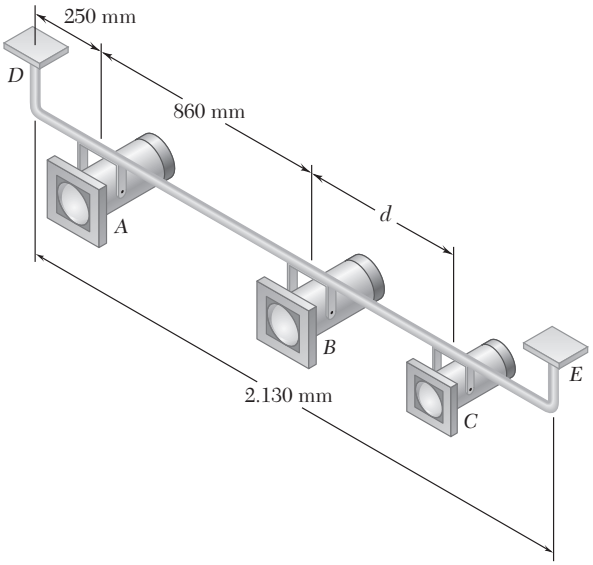


Figura P3.106

3.107 Uma viga suporta três cargas com intensidade indicada na figura e uma quarta carga cuja intensidade é função da posição. Se $b = 1{,}5$ m e as cargas forem representadas por uma única força equivalente, determine *(a)* o valor de a tal que a distância do apoio A até a linha de ação da força equivalente seja máxima, *(b)* a intensidade da força equivalente e seu ponto de aplicação na viga.

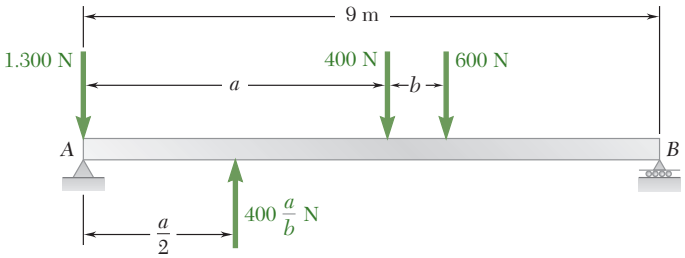


Figura P3.107

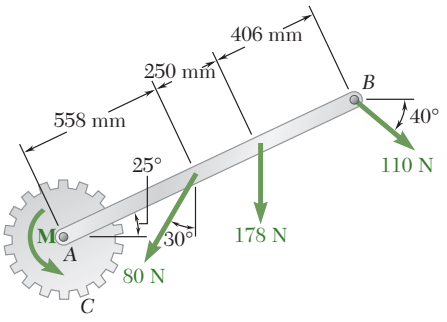


Figura P3.108

3.108 A engrenagem C está firmemente ligada ao braço AB. Se as forças e o binário mostrados na figura podem ser reduzidos a uma força única equivalente em A, determine a força equivalente e a intensidade do binário **M**.

3.109 Um binário de intensidade $M = 6$ N · m e três forças mostradas são aplicadas em um suporte angular. *(a)* Determine a resultante do sistema de forças. *(b)* Localize o ponto em que a linha de ação da resultante intercepta a linha *AB* e a linha *BC*.

3.110 Um binário de intensidade **M** e três forças mostradas são aplicadas em um suporte angular. Encontre o momento do binário se a linha de ação da resultante do sistema de força passa através do *(a)* ponto *A*, *(b)* ponto *B*, *(c)* ponto *C*.

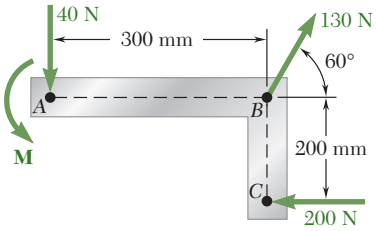


Figura P3.109 e P3.110

3.111 Quatro forças atuam numa placa de 700 × 375 mm como mostrado na figura. *(a)* Encontre a resultante dessas forças. *(b)* Localize os dois pontos onde a linha de ação da resultante intercepta a margem da placa.

3.112 Resolva o Problema 3.111, supondo que a força de 760 N é apontada para a direita.

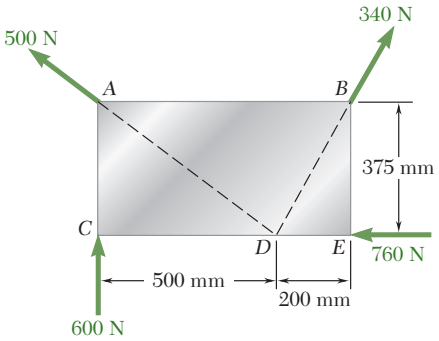


Figura P3.111

3.113 Uma treliça sustenta a carga mostrada na figura. Determine a força equivalente que atua sobre a treliça e o ponto de interseção da sua linha de ação com uma linha, que passa pelos pontos *A* e *G*.

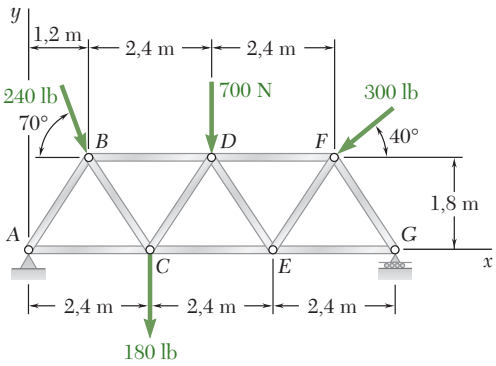


Figura P3.113

3.114 As polias *A* e *B* estão montadas sobre o suporte *CDEF*. A tração em cada lado das duas correias é mostrada na figura. Substitua as quatro forças por uma força única equivalente e determine em que ponto a sua linha de ação intercepta a parte inferior do suporte.

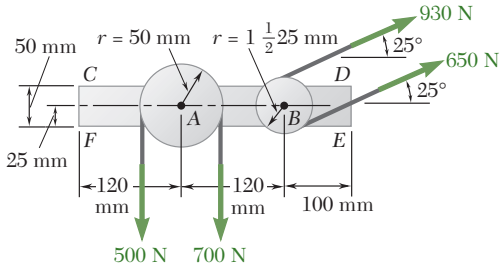


Figura *P3.114*

3.115 Um componente de máquina é sujeito a forças e binários mostrados na figura. O componente é mantido no local por um único rebite que pode resistir à força, mas não ao binário. Se $P = 0$, determine o posição do furo do rebite se for localizado *(a)* na linha *FG*, *(b)* na linha *GH*.

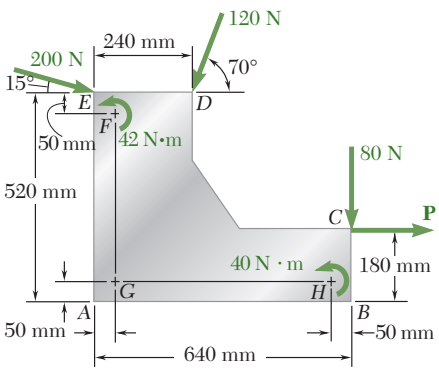


Figura P3.115

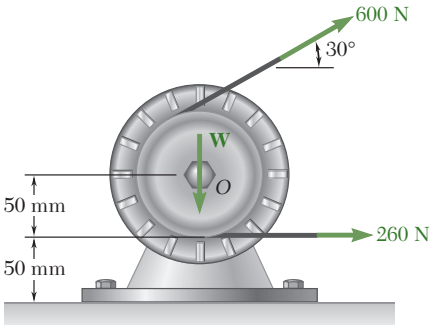


Figura P3.117

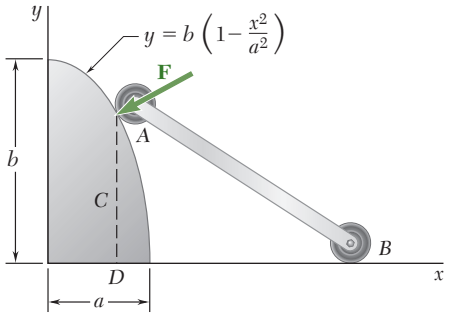


Figura P3.118

3.116 Resolva o Problema 3.115, considerando que $P = 60$ N.

3.117 Um motor de 142 N é montado em um piso. Encontre a resultante do peso e das forças exercidas sobre a correia e determine o ponto em que a linha de ação da resultante intercepta o piso.

3.118 À medida que rola ao longo da superfície do elemento C, o rolete seguidor AB exerce uma força constante $\mathbf{F}$ perpendicular à superfície. *(a)* Substitua $\mathbf{F}$ por um sistema força-binário equivalente no ponto D obtido traçando-se a perpendicular desde o ponto de contato até o eixo x. *(b)* Para $a = 1$ m e $b = 2$ m, determine o valor de x para o qual o momento do sistema força-binário equivalente em D é máximo.

3.119 Quatro forças são aplicadas no componente de máquinas $ABCDE$ como mostra na figura. Substitua essas forças por um sistema de força-binário equivalente em A.

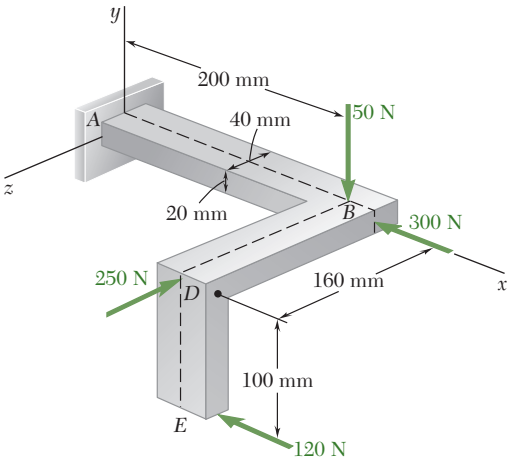


Figura P3.119

3.120 Duas polias de 150 mm de diâmetro estão montadas no eixo AD. As correias B e C ficam em planos verticais paralelos ao plano yz. Substitua as forças das correias mostradas por um sistema força-binário equivalente em A.

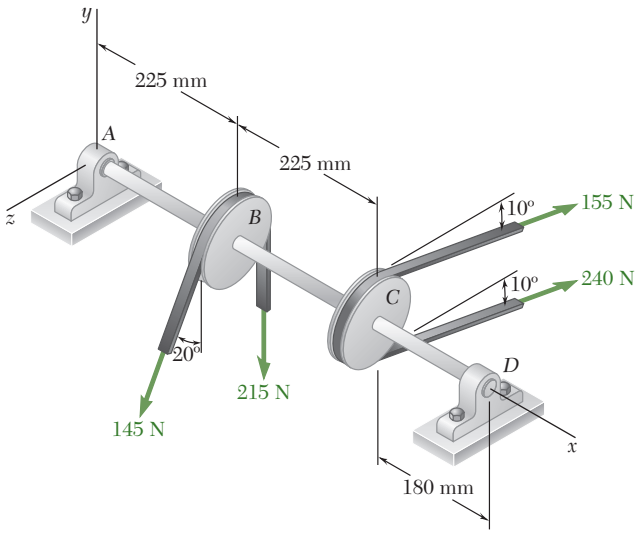


Figura P3.120

3.121 Ao utilizar um apontador de lápis, um estudante aplica as forças e o binário mostrado na figura. *(a)* Determine as forças exercidas em B e C sabendo que essas forças e o binário são equivalentes a um sistema força-binário em A constituído da força $\mathbf{R} = (12\text{ N})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} - (3\text{ N})\mathbf{k}$ e do binário $\mathbf{M}_A^R = M_x\mathbf{i} + (1{,}35\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} - (0{,}97\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$. *(b)* Encontre os valores correspondentes de R_y e M_x.

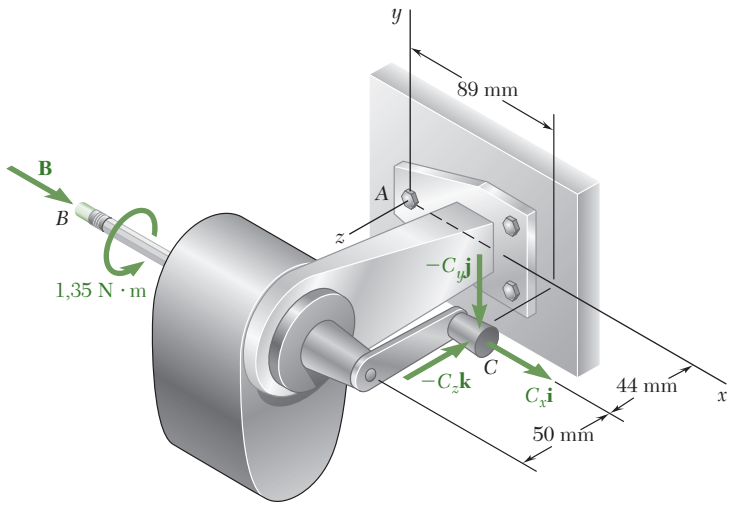


Figura P3.121

3.122 Um mecânico utiliza uma chave de boca para afrouxar um parafuso em C. O mecânico mantém o cabo da chave de boca nos pontos A e B e aplica forças nesses pontos. Sabendo que essas forças são equivalentes a um sistema força-binário em C que consiste em uma força $\mathbf{C} = -(32\text{ N})\mathbf{i} + (16\text{ N})\mathbf{k}$ e um binário $\mathbf{M}_C = (40\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i}$, determine as forças aplicadas em A e B quando $A_z = 8$ N.

3.123 Quando um suporte ajustável BC é usado para aprumar uma parede, o sistema força-binário mostrado na figura é exercido sobre a parede. Substitua esse sistema força-binário por um sistema força-binário equivalente em A, sabendo que $R = 94$ N e $M = 18\text{ N}\cdot\text{m}$.

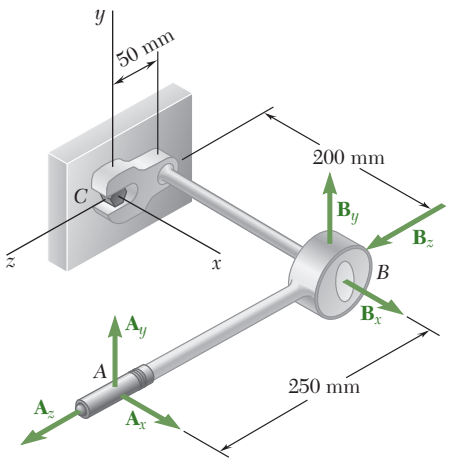


Figura P3.122

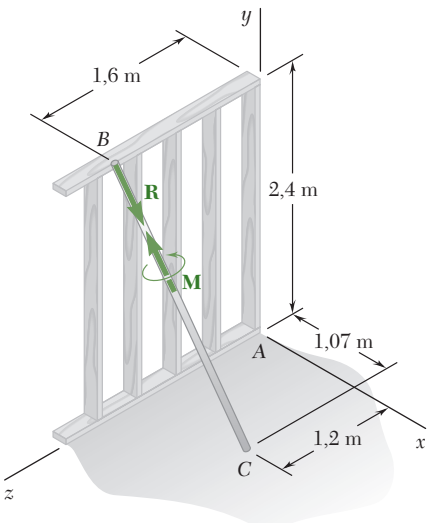


Figura *P3.123*

3.124 Um mecânico substitui um sistema de exaustão de carro travando firmemente o conversor catalítico *FG* montado nos suporte *H* e *I* e então, libera as montagens do silencioso e do cano de escape. Para posicionar o cano ejetor *AB*, ele empurra e levanta em *A* enquanto puxa para baixo em *B*. (*a*) Substitua o sistema de força dado com um sistema de força-binário em *D*. (*b*) Descubra se o tubo *CD* tende a rodar no sentido horário ou anti-horário em relação ao silencioso *DE*, como previsto pelo mecânico.

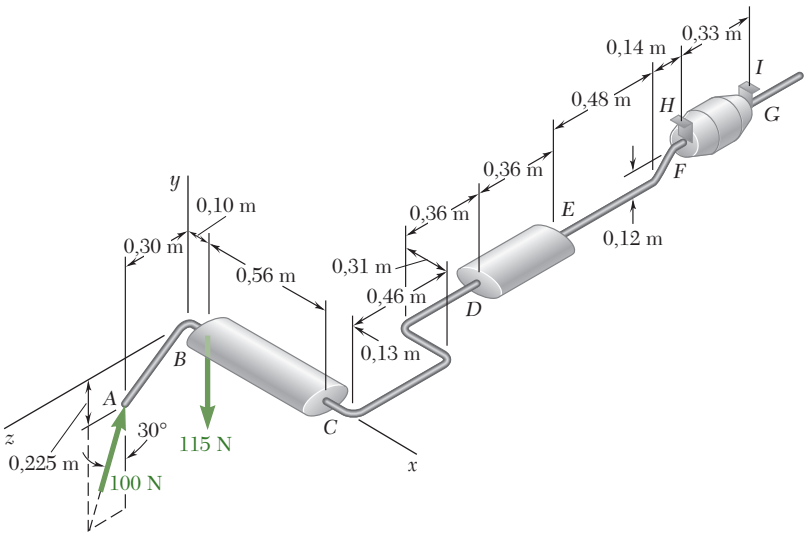


Figura P3.124

3.125 Para o sistema de exaustão do Problema 3.124, (*a*) substitua o sistema de força por um sistema força-binário equivalente em *F*, onde o cano de escape é conectado ao conversor catalítico, (*b*) determine se o tubo *EF* tende a rodar no sentido horário ou anti-horário, como previsto pelo mecânico.

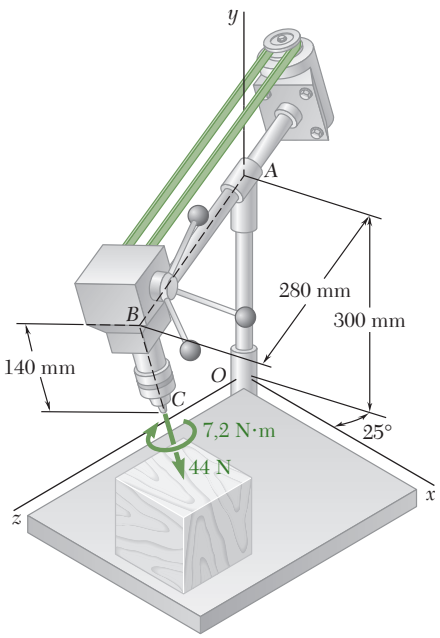


Figura P3.126

3.126 O conjunto cabeçote-motor de uma furadeira radial de coluna estava originalmente posicionado com o braço *AB* paralelo ao eixo *z* e com o eixo do mandril e da broca paralelo ao eixo *y*. O conjunto foi, então, girado 25° em torno do eixo *y* e 20° em torno da linha de centro do braço horizontal *AB*, trazendo-o para a posição mostrada na figura. O processo de furação teve início ligando-se o motor e girando-se as alavancas de ajuste para se colocar a broca em contato com a peça. Substitua a força e o binário exercido pela furadeira por um sistema força-binário equivalente ao centro *O* da base da coluna vertical.

3.127 Três crianças estão em pé sobre uma balsa de 5 × 5 m. Se os pesos das crianças nos pontos *A*, *B* e *C* são de 375 N, 260 N e 400 N, respectivamente, determine a intensidade e o ponto de aplicação da resultante dos três pesos.

3.128 Três crianças estão em pé sobre uma balsa de 5 × 5 m. Os pesos das crianças nos pontos *A*, *B* e *C* são de 375 N, 260 N e 400 N, respectivamente. Se uma quarta criança de peso 425 N subir na balsa, determine onde ela deve ficar se as outras crianças permanecerem nas posições mostradas na figura e a linha de ação da resultante dos quatro pesos passar através do centro da balsa.

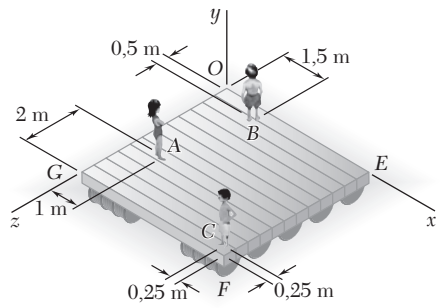


Figura P3.127 e P3.128

3.129 Quatro placas são montadas numa estrutura no vão da autoestrada, e as intensidades das forças do vento horizontal exercidas nas placas são mostradas na figura. Determine a intensidade e o ponto de aplicação da resultante das quatro forças do vento quando $a = 0{,}3$ m e $b = 3{,}7$ m.

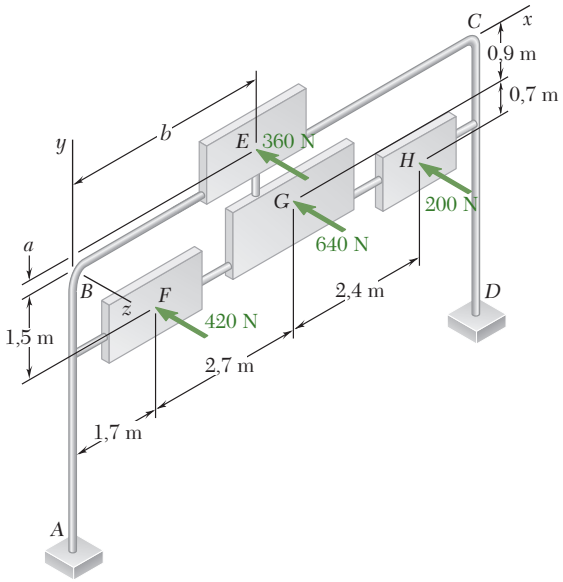


Figura P3.129 e P3.130

3.130 Quatro placas são montadas numa estrutura no vão da autoestrada, e as intensidades das forças do vento horizontal exercidas nas placas são mostradas na figura. Determine a e b tal que o ponto de aplicação da resultante das quatro forças seja em G.

***3.131** Um grupo de estudantes carrega um reboque de $2 \times 3{,}3$ m com duas caixas de $0{,}66 \times 0{,}66 \times 0{,}66$ m e uma caixa de $0{,}66 \times 0{,}66 \times 1{,}2$ m. Cada caixa está colocada na traseira do reboque e alinhada pelos seus limites traseiro e lateral. Determine a menor carga que os estudantes devem colocar em uma segunda caixa de $0{,}66 \times 0{,}66 \times 1{,}2$ m e em que lugar do reboque eles devem posicioná-la sem que nenhuma parte da caixa se projete para fora dos limites do reboque, considerando-se que cada caixa é carregada uniformemente e que a linha de ação da resultante dos pesos das quatro caixas deve passar pelo ponto de interseção da linha de centro do reboque com o eixo de rodas. (*Dica:* a caixa pode ser colocada nas laterais ou no fim do reboque.)

***3.132** Resolva o Problema 3.131 em caso dos estudantes quiserem colocar o limite de peso na quarta caixa e pelo menos um lado da caixa deva coincidir com um lado do reboque.

***3.133** Três forças de uma mesma intensidade P atuam no cubo de lado a como mostrado na figura. Substitua as três forças por um torsor equivalente e determine *(a)* a intensidade, a direção e o sentido da resultante **R**, *(b)* o passo do torsor, *(c)* o eixo do torsor.

***3.134** Uma peça de chapa metálica é dobrada no formato mostrado e sofre a ação de três forças. Se as forças tem a mesma intensidade P, substitua as três forças por um torsor equivalente e determine *(a)* a intensidade, a direção e o sentido da resultante **R**, *(b)* o passo do torsor, *(c)* o eixo do torsor.

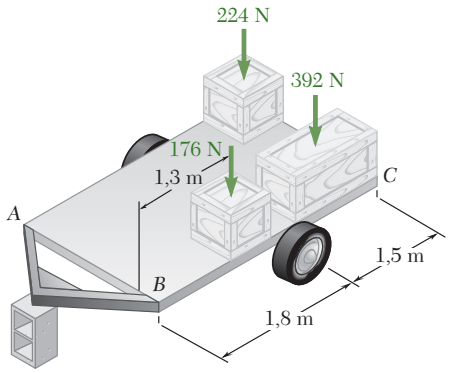


Figura P3.131

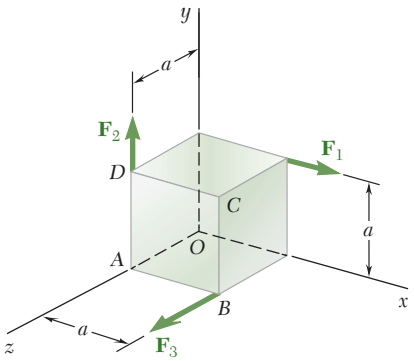


Figura P3.133

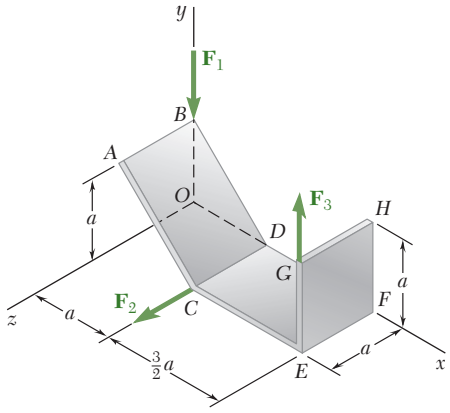


Figura P3.134

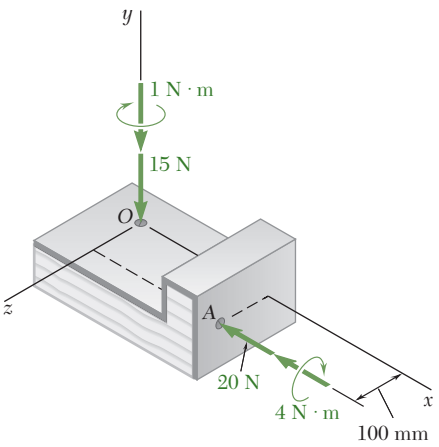


Figura *P3.135*

***3.135** e ***3.136** As forças e binários mostrados na figura são aplicados em dois parafusos à medida que uma chapa metálica é parafusada em um bloco de madeira. Reduza as forças e os binários a um torsor equivalente e determine *(a)* a força resultante **R**, *(b)* o passo do torsor, *(c)* o ponto em que o eixo do torsor intercepta o plano *xz*.

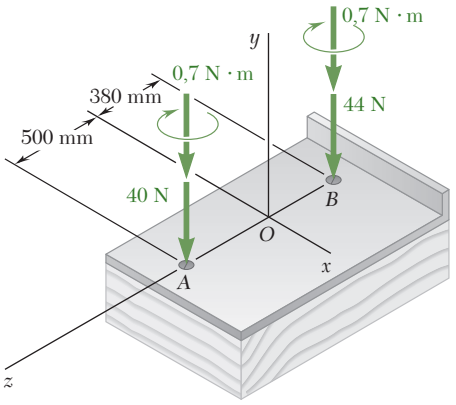


Figura P3.136

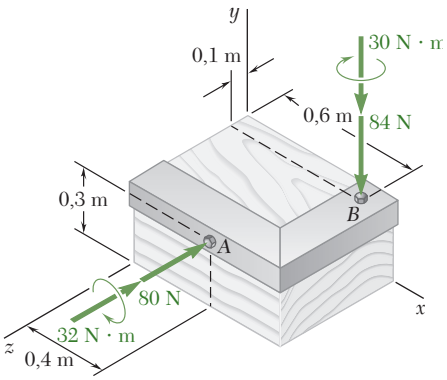


Figura P3.137

***3.137** e ***3.138** Dois parafusos *A* e *B* são apertados aplicando-se as forças e os binários mostrados na figura. Substitua os dois torsores por um torsor único equivalente e determine *(a)* a resultante **R**, *(b)* o passo do torsor único equivalente, *(c)* o ponto em que o eixo do torsor intercepta o plano *xz*.

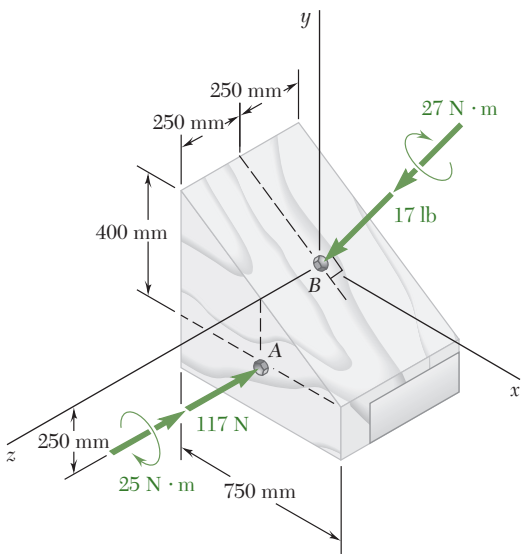


Figura *P3.138*

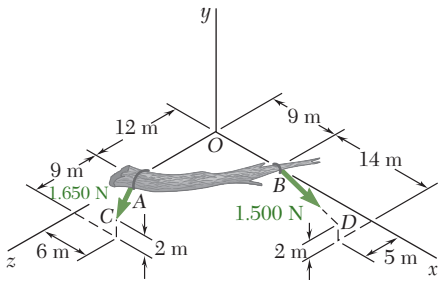


Figura *P3.139*

***3.139** Duas cordas amarradas em *A* e *B* são usadas para mover um tronco de uma árvore caída. Substitua as forças exercidas pelas cordas por um torsor equivalente e determine *(a)* a resultante **R**, *(b)* o passo do torsor equivalente, *(c)* o ponto em que o eixo do torsor intercepta o plano *yz*.

***3.140** Um mastro de bandeira é escorado por três cabos. Sabendo que as forças de tração nos cabos têm a mesma intensidade *P*, substitua as forças exercidas sobre o mastro por um torsor equivalente e determine *(a)* a força resultante **R**, *(b)* o passo do torsor, *(c)* o ponto em que o eixo do torsor intercepta o plano *xz*.

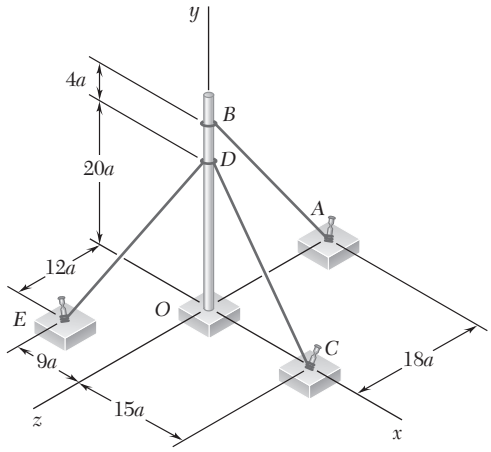


Figura P3.140

***3.141 e *3.142** Determine se o sistema de forças e binários mostrado na figura pode ser reduzido a uma força única equivalente **R**. Se for o caso, determine **R** e o ponto em que a linha de ação de **R** intercepta o plano *yz*. Caso contrário, substitua o sistema dado por um torsor equivalente e determine sua resultante, seu passo e o ponto em que seu eixo intercepta o plano *yz*.

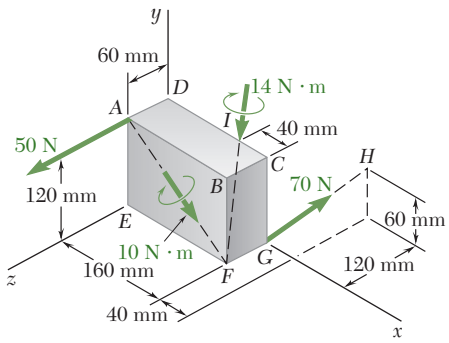


Figura P3.141

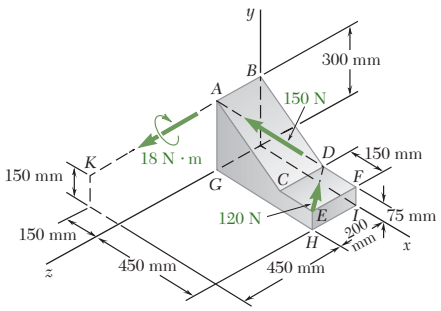


Figura P3.142

***3.143** Substitua o torsor mostrado na figura por um sistema equivalente que consista em duas forças perpendiculares ao eixo *y* exercidas, respectivamente, em *A* e *B*.

***3.144** Mostre que um torsor geralmente pode ser substituído por duas forças escolhidas de tal modo que uma força passa por um dado ponto enquanto a outra força fica em um dado plano.

***3.145** Mostre que um torsor pode ser substituído por duas forças perpendiculares, uma das quais é aplicada em um dado ponto.

***3.146** Mostre que um torsor pode ser substituído por duas forças, uma das quais tem uma linha de ação prescrita.

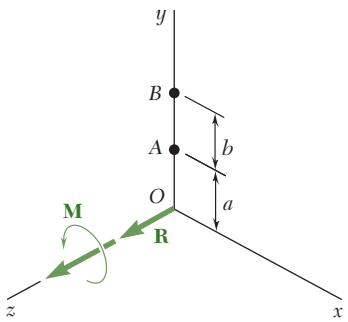


Figura P3.143

REVISÃO E RESUMO

Princípio da transmissibilidade

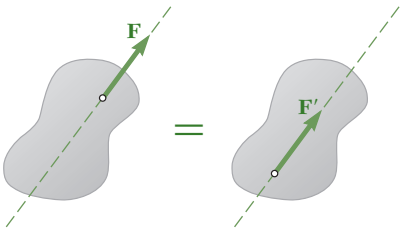


Figura 3.48

Neste capítulo estudamos o efeito das forças exercidas sobre um corpo rígido. Primeiro, aprendemos a distinguir forças *externas* e forças *internas* [Seção 3.2] e vimos que, de acordo com o *principio da transmissibilidade*, o efeito de uma força externa sobre um corpo rígido permanece inalterado se essa força for movida ao longo da sua linha de ação [Seção 3.3]. Em outras palavras, duas forças **F** e **F′** que atuem sobre um corpo rígido em dois pontos diferentes terão o mesmo efeito sobre esse corpo se tiverem a mesma intensidade, a mesma linha de ação e o mesmo sentido (Fig. 3.48). Duas forças assim são ditas *equivalentes*.

Antes de prosseguirmos com a discussão sobre *sistemas de forças equivalentes*, apresentamos o conceito de *produto vetorial de dois vetores* [Seção 3.4]. O produto vetorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{PxQ}$$

Produto vetorial de dois vetores

dos vetores **P** e **Q** foi definido como um vetor perpendicular ao plano que contém **P** e **Q**.(Fig. 3.49), de intensidade

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta \tag{3.1}$$

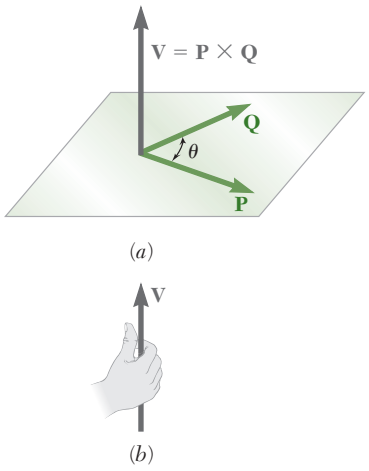


Figura 3.49

e direcionado de modo que uma pessoa localizada na ponta de **V** observará como anti-horária a rotação ao longo de θ que faz o vetor **P** ficar alinhado com o vetor **Q**. Os três vetores **P**, **Q** e **V** – tomados nessa ordem – formam uma *tríade orientada diretamente*. Segue-se que os produtos vetoriais **Q** × **P** e **P** × **Q** são representados por vetores opostos. Temos

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.4}$$

Segue-se também da definição de produto vetorial de dois vetores que os produtos vetoriais dos vetores unitários **i**, **j** e **k** são

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

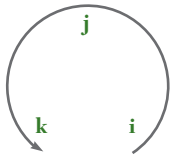


Figura 3.50

e assim por diante. O sinal do produto vetorial de dois vetores unitários pode ser obtido arranjando-se as três letras que representam os vetores unitários em um círculo, em ordem anti-horária (Fig. 3.50): o produto vetorial de dois vetores unitários será positivo se seguirem um ao outro em ordem anti-horária, e negativo se seguirem um ao outro em ordem horária.

Componentes retangulares do produto vetorial

Os *componentes retangulares do produto vetorial* **V** de dois vetores **P** e **Q** são expressos [Seção 3.5] como:

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \tag{3.9}$$

Usando um determinante, temos também:

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

Momento de uma força em relação a um ponto

O *momento de uma força* **F** *em relação a um ponto O* foi definido [Seção 3.6] como o produto vetorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

onde **r** é o *vetor posição* traçado de *O* até o ponto de aplicação *A* da força **F** (Fig. 3.51). Representando por θ o ângulo entre às linhas de ação de **r** e **F**, encontramos que a intensidade do momento de **F** em relação a *O* pode ser expressa como

$$M_o = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.12}$$

onde *d* representa a distância perpendicular do ponto *O* até a linha de ação de **F.**

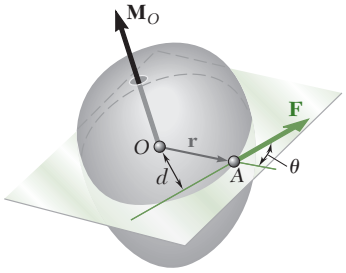


Figura 3.51

Componentes retangulares do momento

Os *componentes retangulares do momento* $\mathbf{M}_O$ *de uma força* **F** foram expressos [Seção 3.8] como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde *x*, *y* e *z* são os componentes do vetor posição **r** (Fig. 3.52). Usando uma forma de determinante, também temos:

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

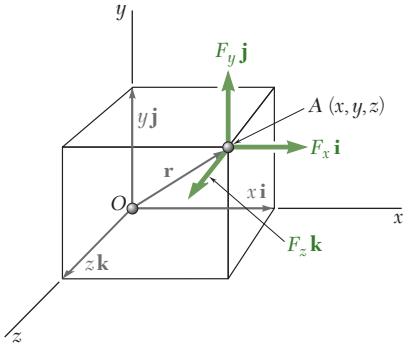


Figura 3.52

No caso mais geral do momento em relação a um ponto arbitrário *B* de uma força **F** aplicada em *A*, obtivemos:

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.21}$$

onde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ e $z_{A/B}$ representam os componentes do vetor $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

No caso de *problemas que envolvem apenas duas dimensões*, pode-se admitir que a força **F** fique no plano *xy*. Seu momento $\mathbf{M}_B$ em relação a um ponto *B* no mesmo plano é perpendicular a esse plano (Fig. 3.53) e é completamente definido pelo escalar:

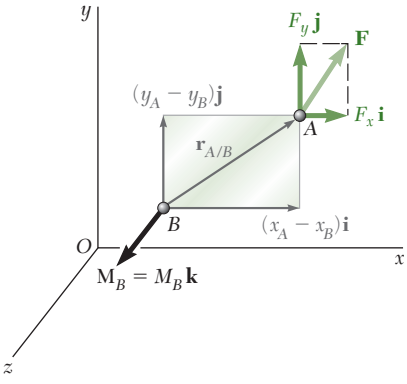


Figura 3.53

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \tag{3.23}$$

Vários métodos para o cálculo do momento de uma força em relação a um ponto foram ilustrados nos Problemas Resolvidos 3.1 a 3.4.

Produto escalar de dois vetores

O *produto escalar* de dois vetores **P** e **Q** [Seção 3.9] foi representado por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ e definido como a grandeza escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \tag{3.24}$$

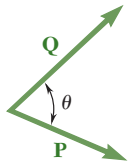


Figura 3.54

onde θ é o ângulo entre **P** e **Q** (Fig. 3.54). Expressando o produto escalar de **P** e **Q** em termos dos componentes retangulares dos dois vetores, determinamos que:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \tag{3.30}$$

Projeção de um vetor sobre um eixo

A *projeção de um vetor* **P** *sobre um eixo OL* (Fig. 3.55) pode ser obtida efetuando-se o produto escalar de **P** e do vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ ao longo de *OL*. Temos

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{3.36}$$

ou, usando componentes retangulares

$$P_{OL} = P_x \cos\theta_x + P_y \cos\theta_y + P_z \cos u_z \tag{3.37}$$

onde θ_x, θ_y e θ_z representam os ângulos que o eixo *OL* forma com os eixos de coordenadas.

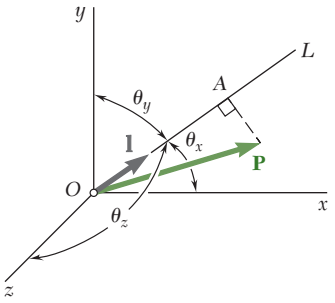


Figura 3.55

Produto triplo misto de três vetores

O *produto triplo misto* de três vetores **S**, **P** e **Q** foi definido como a expressão escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.38}$$

obtida efetuando-se o produto escalar de **S** pelo produto vetorial de **P** e **Q** [Seção 3.10]. Foi mostrado que

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

onde os elementos do determinante são os componentes retangulares dos três vetores.

Momento de uma força em relação a um eixo

O *momento de uma força* **F** *em relação a um eixo OL* [Seção 3.11] foi definido como a projeção *OC* sobre *OL* do momento $\mathbf{M}_O$ da força **F** (Fig. 3.56), ou seja, como o produto triplo misto do vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$, do vetor posição **r** e da força **F**:

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.42}$$

Usando a forma determinante para o produto triplo misto, temos

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.43}$$

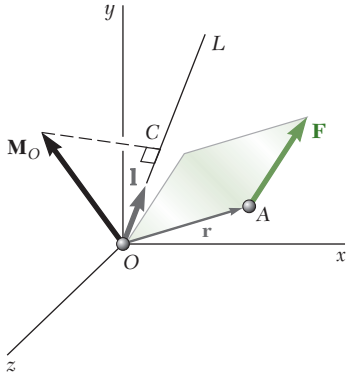


Figura 3.56

onde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cossenos diretores do eixo *OL*
x, y, z = componentes de **r**
F_x, F_y, F_z = componentes de **F**

Um exemplo de determinação do momento de uma força em relação a um eixo inclinado foi dado no Problema Resolvido 3.5.

Binários

Diz-se que duas forças **F** *e* −**F** *de igual intensidade, linhas de ação paralelas e sentidos opostos formam um binário* [Seção 3.12]. Foi mostrado que o momento de um binário é independente do ponto em relação ao que é calculado; esse momento é um vetor **M** perpendicular ao plano do binário e cuja intensidade é igual ao produto da intensidade comum *F* das forças e da distância perpendicular *d* entre suas linhas de ação (Fig. 3.57).

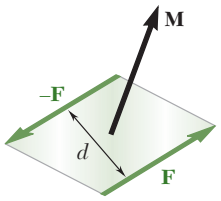


Figura 3.57

Dois binários que têm o mesmo momento **M** são *equivalentes*, ou seja, têm o mesmo efeito sobre um dado corpo rígido [Seção 3.13]. A soma de dois binários é, ela própria, um binário [Seção 3.14], e o momento **M** do binário resultante pode ser obtido somando-se vetorialmente os momentos $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ dos binários originais [Problema Resolvido 3.6]. Segue-se que um binário pode ser representado por um vetor denominado *vetor binário*, igual em intensidade, direção e sentido ao momento **M** do binário [Seção 3.15]. Um vetor binário é um *vetor livre* que pode ser ligado à origem *O*, se assim desejar, e representado por componentes (Fig. 3.58).

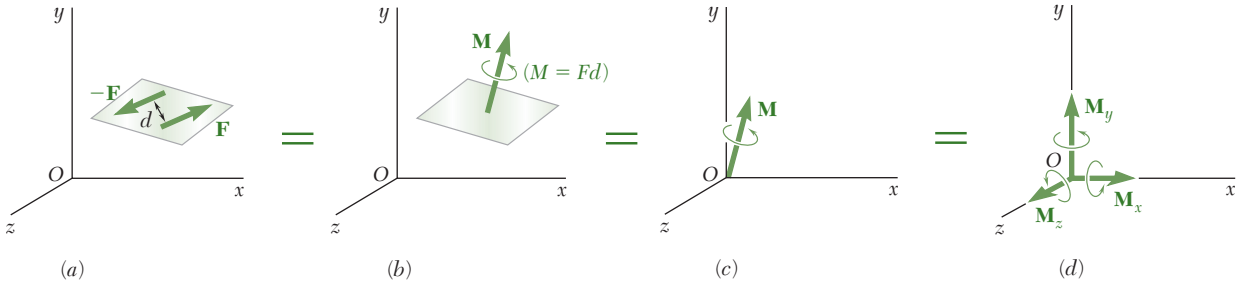


Figura 3.58

Sistema força-binário

Qualquer força **F** que atua em um ponto *A* de um corpo rígido pode ser substituída por um *sistema força-binário* em um ponto arbitrário *O*, que consiste na força **F** aplicada em *O* e um binário de momento $\mathbf{M}_O$ igual ao momento em relação a *O* da força **F** em sua posição original [Seção 3.16]; deve-se observar que a força **F** e o vetor binário $\mathbf{M}_O$ são sempre perpendiculares entre si (Fig. 3.59).

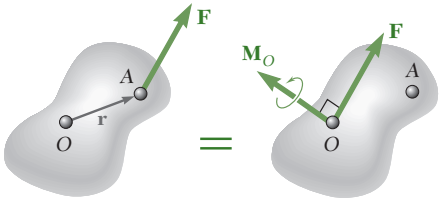


Figura 3.59

Redução de um sistema de forças a um sistema força-binário

Segue-se [Seção 3.17] que *qualquer sistema de forças pode se reduzido a um sistema força-binário em um dado ponto O* substituindo-se primeiro cada uma das forças do sistema por um sistema força-binário equivalente em *O* (Fig. 3.60) e, em seguida, somando-se todas as forças e todos os

binários determinados dessa maneira para se obter uma força resultante **R** e um vetor binário resultante $\mathbf{M}_O^R$ [Problemas Resolvidos 3.8 até 3.11]. Observe que geralmente a resultante **R** e o vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ não serão perpendiculares entre si.

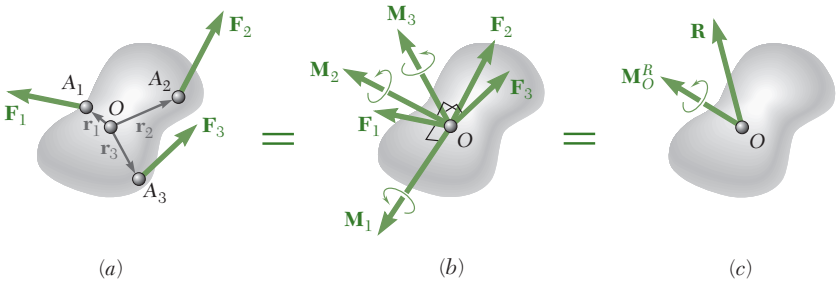


Figura 3.60

Sistemas equivalentes de forças

Concluímos do que foi exposto anteriormente [Seção 3.18] que, em se tratando de um corpo rígido, *dois sistemas de forças,* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., e $\mathbf{F}'_1$, $\mathbf{F}'_2$, $\mathbf{F}'_3$, *são equivalentes se, e somente*:

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \qquad \text{e} \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{M}'_O \tag{3.57}$$

Redução adicional de um sistema de forças

Se a força resultante **F** e o vetor binário resultante $\mathbf{M}_O^R$ são perpendiculares entre si, o sistema força-binário em *O* pode ainda ser reduzido a uma força única resultante [Seção 3.20]. Esse será o caso para sistemas constituídos de *(a)* forças concorrentes (Cap. 2), *(b)* forças coplanares [Problemas Resolvidos 3.8 e 3.9] ou *(c)* forças paralelas [Problema Resolvido 3.11]. Se a resultante **R** e o vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ *não* são perpendiculares entre si, o sistema *não* pode ser reduzido a uma força única. Todavia, pode ser reduzido a um tipo especial de sistema força-binário denominado *torsor,* que consiste na resultante **R** e em um vetor binário $\mathbf{M}_1$ dirigido ao longo de **R** [Seção 3.21 e Problema Resolvido 3.12].

PROBLEMAS DE REVISÃO

3.147 Um caixote 80 kg de massa é mantido na posição mostrada na figura. Determine *(a)* o momento produzido pelo peso **W** do caixote em relação ao ponto *E*, *(b)* a menor força aplicada em *B* que produz um momento de igual intensidade e sentido oposto em relação a *E*.

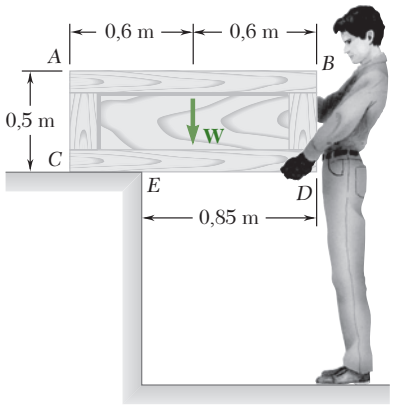


Figura P3.147

3.148 Sabe-se que conectando a biela *AB* exerce na manivela *BC* a força 1,5 kN direcionado para baixo e para a esquerda ao junto a linha central de *AB*. Determine o momento da força sobre *C*.

3.149 Uma vara de pescar de 1,8 m é estirada na areia da praia. Após o peixe morder a isca, a força resultante na linha é 25 N. Determine o momento sobre *A* da força exercida na linha em *B*.

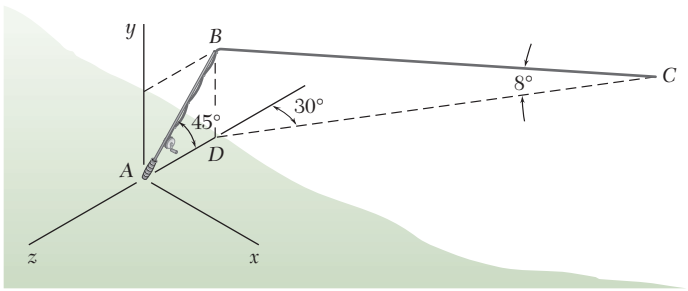


Figura P3.149

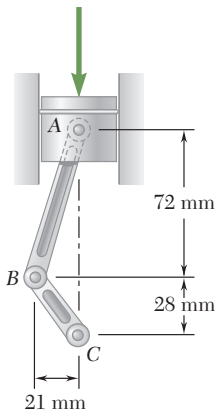


Figura P3.148

3.150 As cordas *AB* e *BC* são duas das cordas usadas para suportar uma barraca. As cordas estão fixadas a uma estaca em *B*. Se a tensão na corda *AB* é 540 N, determine *(a)* o ângulo entre a corda *AB* e a estaca, *(b)* a projeção na estaca da força exercida pela corda *AB* no ponto *B*.

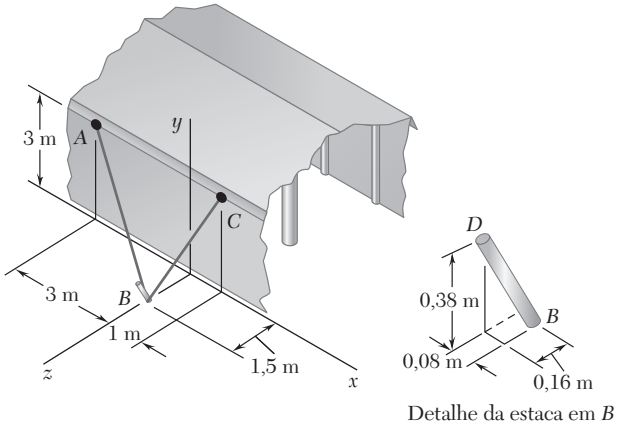


Figura P3.150

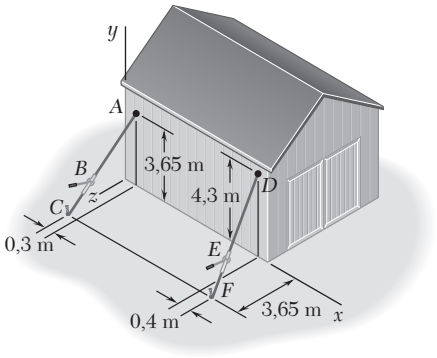


Figura P3.151

3.151 Um fazendeiro utiliza cabos e guinchos *B* e *E* para aprumar uma lateral de um pequeno celeiro. Sabendo que a soma dos momentos em relação ao eixo *x* das forças exercidas pelos cabos sobre o celeiro nos pontos A e *D* é igual a 6.400 N · m, determine a intensidade de $\mathbf{T}_{DE}$, quando $T_{AB} = 1.134$ N.

3.152 Resolva o Problema 3.151 quando a tensão no cabo *AB* é 1.360 N.

3.153 Uma cablagem é feita pela passagem de dois ou três fios em torno de cavilhas de diâmetro 50 mm montadas em uma placa de compensado de madeira. Se a força de cada fio é 12 N, determine o binário resultante exercido no compensado de madeira quando $a = 450$ mm *(a)* apenas os fios *AB* e *CD* estão no lugar, *(b)* todos três os fios estão no lugar.

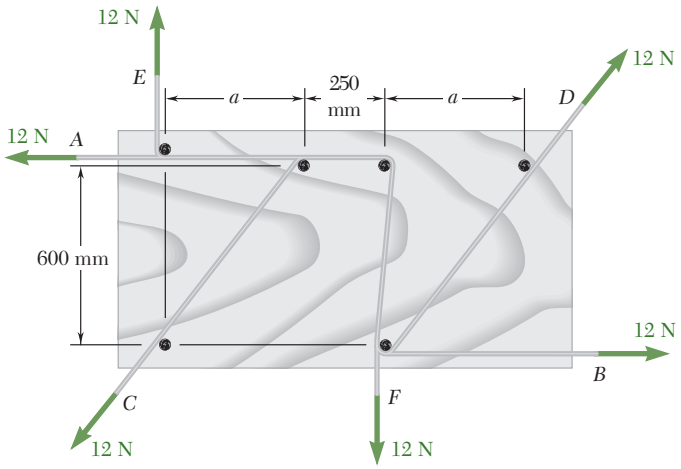


Figura P3.153

3.154 Um operário tenta mover uma pedra aplicando uma força de 360 N em uma barra de aço, como mostra a figura. *(a)* Substitua essa força por um sistema força-binário equivalente em *D*. *(b)* Dois operários experimentam mover a mesma pedra aplicando uma força vertical em *A* e uma outra força em *D*. Determine essas duas forças para que sejam equivalentes à força única da parte *a*.

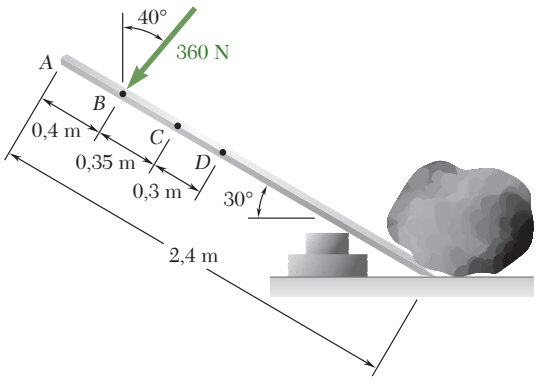


Figura P3.154

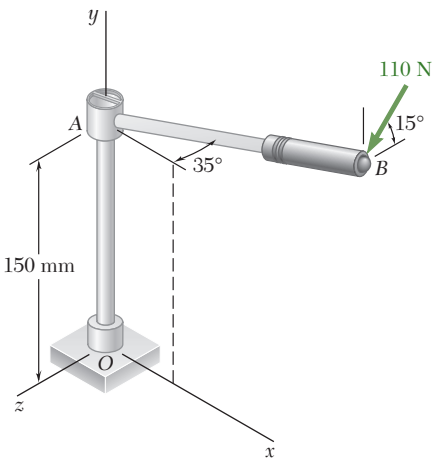


Figura P3.155

3.155 Uma força de 110 N, atuando em um plano vertical paralelo ao plano *yz*, é aplicada sobre a alavanca horizontal *AB* de 220 mm de comprimento de uma chave soquete. Substitua a força por um sistema força-binário equivalente na origem *O* do sistema de coordenadas.

3.156 Quatro cordas são fixadas em um caixote e exercem forças como mostrado na figura. Se as forças são substituídas por uma força equivalente única aplicada num ponto na linha AB, determine *(a)* a força equivalente e a distância de A ao ponto de aplicação da força quando $\alpha = 30°$, *(b)* o valor de α tal que a força equivalente única seja aplicada no ponto B.

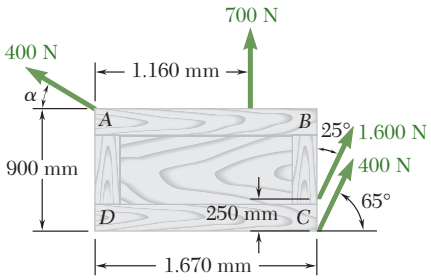


Figura P3.156

3.157 Uma lâmina fixada em um suporte é usada para enroscar um parafuso em A. *(a)* Determine as forças exercidas em B e C, sabendo que estas são equivalentes a um sistema força-binário em A representado por $\mathbf{R} = -(30\text{ N})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{M}_A^R = -(12\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i}$. *(b)* Encontre os valores correspondentes de R_y e R_z. *(c)* Qual é a orientação da fenda na cabeça do parafuso para qual a lâmina tenha menor probabilidade de escapar quando o suporte está na posição mostrada?

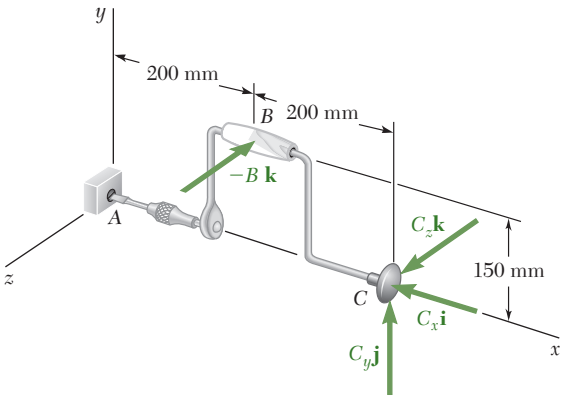


Figura P3.157

3.158 Uma base de concreto na forma de um hexágono regular de lado 3,65 m suporta quatro colunas com cargas como mostrado na figura. Determine a intensidade da carga adicional que deve ser aplicada em B e F se a resultante de todas as seis cargas passa através do centro da base.

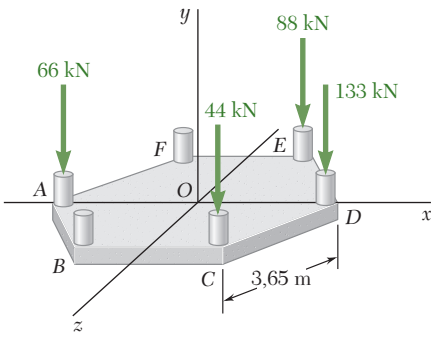


Figura *P3.158*

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

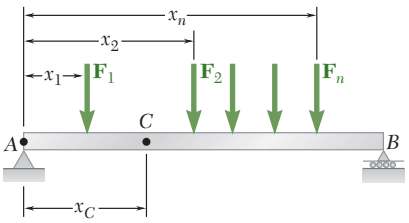


Figura P3.C1

3.C1 Uma viga *AB* está sujeita a várias forças verticais, como mostra a figura. Usando um aplicativo computacional determine a intensidade da resultante das forças e a distância x_c até o ponto *C*, o ponto em que a linha de ação da resultante intercepta *AB*. Use esse programa para resolver *(a)* o Problema Resolvido 3.8*c* *(b)* o Problema 3.106.

3.C2 Usando um aplicativo computacional determine a intensidade e o ponto de aplicação da resultante das forças verticais $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$, que atuam nos pontos $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$, que estão localizados no plano *xz*. Use esse programa para resolver *(a)* o Problema Resolvido 3.11, *(b)* o Problema 3.127, *(c)* o Problema 3.129.

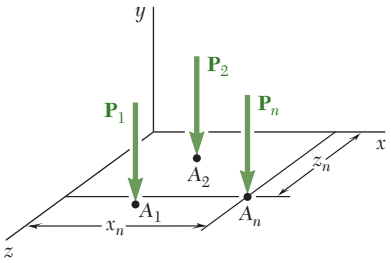


Figura P3.C2

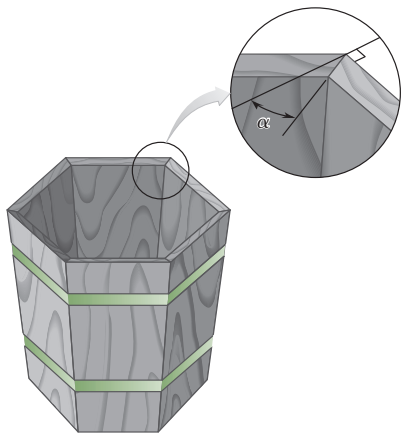


Figura P3.C3

3.C3 Um amigo lhe pede ajuda em um projeto de vasos para o plantio de flores. Os vasos devem ter 4, 5, 6 ou 8 lados, com inclinações para fora de 10°, 20° ou 30°. Usando um aplicativo computacional determine o ângulo de chanfro α para cada um dos doze projetos de vaso. (*Dica:* o ângulo de chanfro α é igual à metade do ângulo formado pelas normais internas de dois lados adjacentes.)

3.C4 Um fabricante de enrolador para mangueiras quer determinar o momento da força **F** sobre o eixo *AA′*. A intensidade da força em newtons é definida pela relação $F = 300(1 - x/L)$, onde *x* é o comprimento da mangueira dobrada num suporte de diâmetro de 0,6 m e *L* é o comprimento total da mangueira. Usando um aplicativo computacional calcule o momento requerido para uma mangueira de 30 m de comprimento e 50 mm de diâmetro. Iniciando com $x = 0$, calcule o momento após cada revolução do enrolador até que a mangueira esteja totalmente enrolada no suporte.

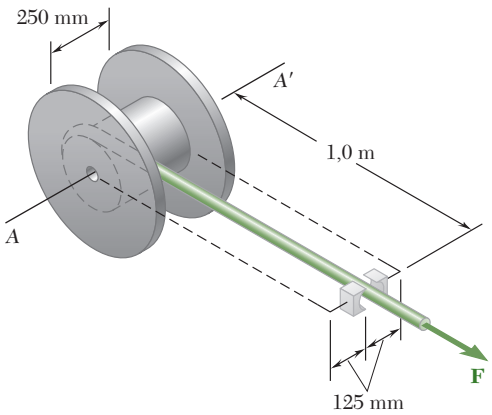


Figura P3.C4

3.C5 Sobre um corpo é aplicado um sistema de n forças. Usando um aplicativo computacional calcule o sistema força – binário equivalente na origem dos eixos coordenados e determine, se a fora equivalente e o binário equivalente são ortogonais, a intensidade e o ponto de aplicação no plano xz da resultante do sistema de força original. Use este aplicativo para resolver *(a)* Problema 3.113, *(b)* Problema 3.120, *(c)* 3.127.

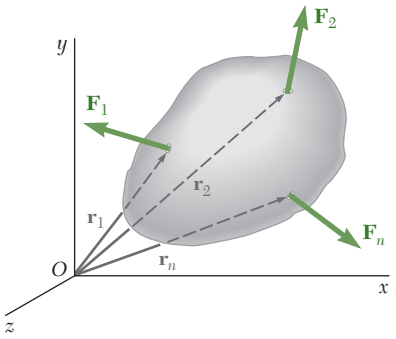


Figura P3.C5

3.C6 Dois tubos cilíndricos, AB e CD, entram num quarto através de duas paredes paralelas. As linhas de centro dos tubos são paralelas entre si, mas não perpendiculares às paredes. Os dutos são conectados por dois cotovelos flexíveis e um trecho central reto. Usando um aplicativo computacional determine os comprimentos de AB e CD que minimizam a distância entre os eixos do trecho reto e um termômetro montado na parede em E. Considere que os comprimentos dos cotovelos são ínfimos e que AB e CD têm linhas de centro definidas por $\boldsymbol{\lambda}_{AB} = (7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k})/9$ e $\boldsymbol{\lambda}_{CD} = (-7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k})/9$ e podem variar o comprimento de 228 mm a 914 mm.

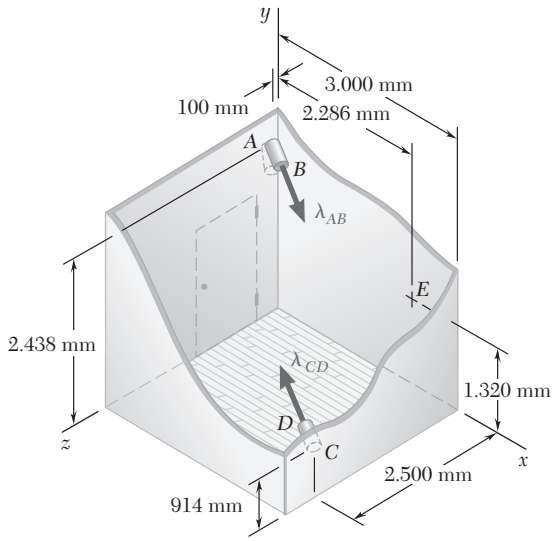
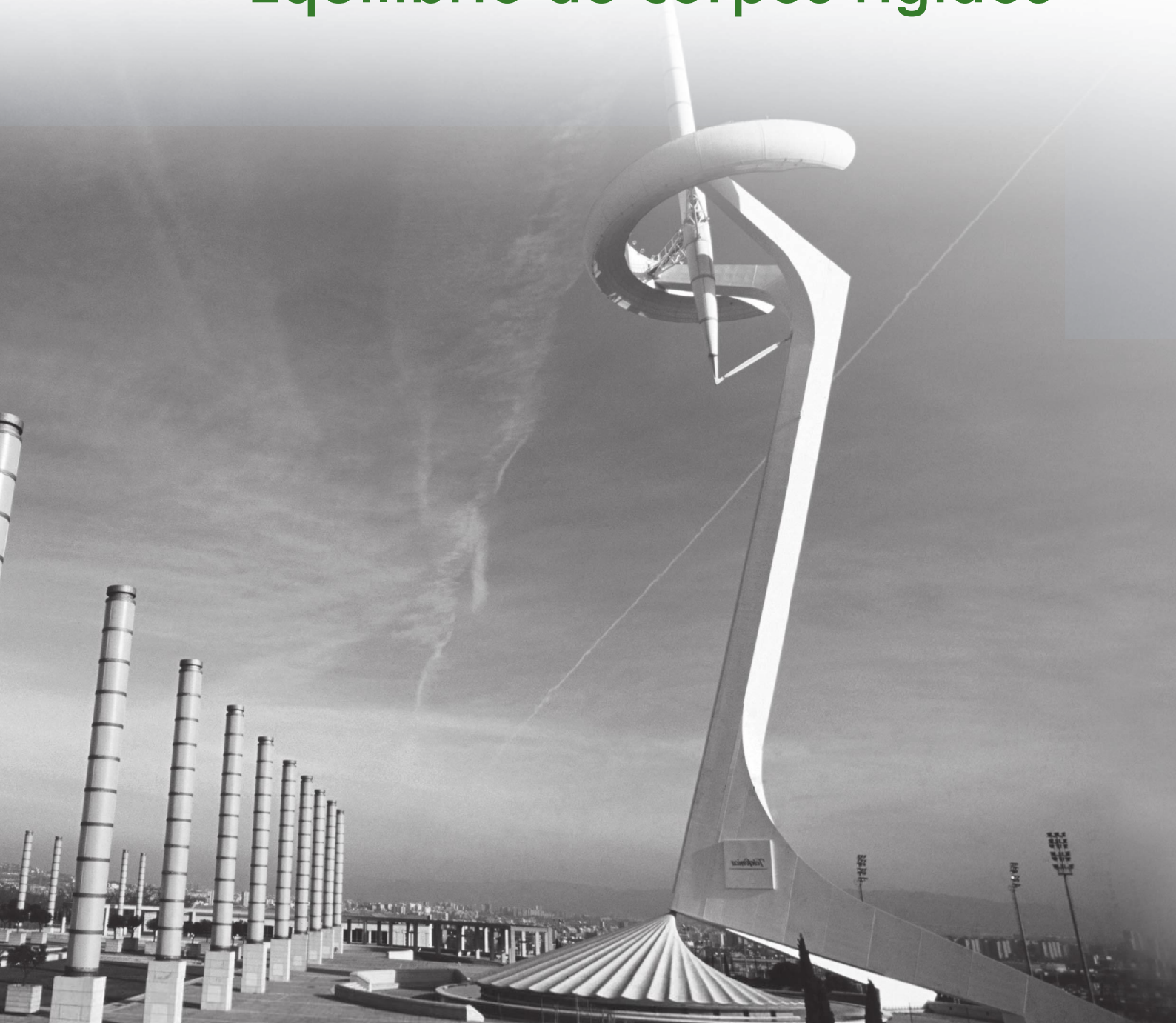


Figura P3.C6

Esta torre de telecomunicações, construída no centro do complexo olímpico de Barcelona para as transmissões dos jogos de 1992, foi projetada para permanecer em equilíbrio sob a força vertical da gravidade e as forças laterais exercidas pelo vento.

CAPÍTULO 4

Equilíbrio de corpos rígidos



4 Equilíbrio de corpos rígidos

4.1 Introdução
4.2 Diagrama de corpo livre
4.3 Reações em apoios e conexões para uma estrutura bidimensional
4.4 Equilíbrio de um corpo rígido em duas dimensões
4.5 Reações estaticamente indeterminadas e vinculações parciais
4.6 Equilíbrio de um corpo sujeito à ação de duas forças
4.7 Equilíbrio de um corpo sujeito à ação de três forças
4.8 Equilíbrio de um corpo rígido em três dimensões
4.9 Reações em apoios e conexões para uma estrutura tridimensional

4.1 Introdução

Vimos no capítulo anterior que as forças externas exercidas sobre um corpo rígido podem ser reduzidas a um sistema força-binário em algum ponto arbitrário O. Quando a força e o binário são iguais a zero, as forças externas formam um sistema equivalente a zero, e diz-se que o corpo rígido está em *equilíbrio*.

As condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido, portanto, podem ser obtidas estabelecendo-se $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O^R$ iguais a zero nas relações (3.52) da Seção 3.17:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

Decompondo cada força e cada momento em seus componentes retangulares, podemos indicar as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido com as seis equações escalares seguintes:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$
$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Podem-se utilizar as equações obtidas para determinar forças desconhecidas aplicadas ao corpo rígido ou reações desconhecidas exercidas sobre ele por seus apoios. Notamos que as Eqs. (4.2) provam o fato de que os componentes das forças externas nas direções x, y e z estão equilibradas; já as Eqs. (4.3) indicam o fato de que os momentos das forças externas em torno dos eixos x, y *e* z estão equilibrados. Portanto, para um corpo rígido em equilíbrio, o sistema de forças externas não causa qualquer movimento translacional ou rotacional ao corpo considerado.

Para escrever as equações de equilíbrio para um corpo rígido, é essencial primeiro identificar todas as forças que atuam sobre esse corpo e, então, desenhar o *diagrama de corpo livre* correspondente. Neste capítulo consideramos primeiro o equilíbrio de *estruturas bidimensionais* sujeitas a forças contidas em seus planos e aprendemos como desenhar seus diagramas de corpo livre. Além das forças *exercidas* numa estrutura, vamos estudar as *reações* exercidas sobre a estrutura por seus apoios. Uma reação específica será associada a cada tipo de apoio. Iremos aprender como determinar se a estrutura está adequadamente apoiada, de modo que possamos saber antecipadamente se as equações de equilíbrio podem ser resolvidas para forças e reações desconhecidas.

Mais adiante neste capítulo, trataremos do equilíbrio de estruturas tridimensionais, e o mesmo tipo de análise será feito para essas estruturas e seus apoios.

4.2 Diagrama de corpo livre

Para resolver um problema relativo ao equilíbrio de um corpo rígido, é essencial considerar *todas* as forças que atuam sobre o corpo; é igualmente importante excluir qualquer força que não esteja diretamente, aplicada ao corpo. Omitir ou acrescentar uma força extra acabaria com as condições de equilíbrio. Portanto, o primeiro passo na solução do problema deve ser traçar um *diagrama de corpo livre* do corpo rígido que está em análise. Diagramas de corpo livre já foram usados em muitas ocasiões no Cap. 2. Entretanto, tendo em vista a sua importância para a solução de problemas de equilíbrio, resumimos aqui os vários passos que devem ser seguidos aos esquematizar um diagrama de corpo livre.

1. Deve-se tomar uma decisão clara em relação à escolha do corpo livre a ser usado. Esse corpo é, então, separado do solo e de todos os outros corpos. Feito isso, esboça-se o contorno do corpo assim isolado.
2. Todas as forças externas devem ser indicadas no diagrama de corpo livre. Essas forças representam as ações exercidas *sobre* o corpo livre *pelo* solo e *pelos* corpos que foram destacados; devem ser aplicadas nos vários pontos em que o corpo livre estava apoiado sobre o solo ou estava conectado aos outros corpos. O *peso* do corpo livre deve ser também incluído entre as forças externas, pois representa a atração exercida pela Terra sobre as várias partículas que formam o corpo livre. Como veremos no Cap. 5, o peso deve ser aplicado no centro de gravidade do corpo. Quando o corpo livre for constituído de várias partes, as forças que as várias partes exercem umas sobre as outras *não* devem ser incluídas entre as forças externas. Essas forças são forças internas no que concerne ao corpo livre.
3. As intensidades, as direções e os sentidos das *forças externas conhecidas* devem ser claramente representados no diagrama de corpo livre. Quando se for indicar as direções dessas forças, devemos lembrar que as forças mostradas no diagrama de corpo livre devem ser aquelas que são exercidas *sobre*, e não *pelo*, corpo livre. Forças externas conhecidas geralmente incluem o *peso* do corpo livre e *as forças aplicadas* com uma dada finalidade.
4. As *forças externas desconhecidas* geralmente consistem em *reações* por meio das quais o solo e os outros corpos se opõem a um possível movimento do corpo livre. As reações limitam o corpo livre a permanecer na mesma posição e, por esse motivo, são às vezes denominadas *forças vinculares*. As reações são exercidas nos pontos em que o corpo livre é *apoiado* ou *conectado* a outros corpos e devem ser claramente indicadas. As reações são discutidas em detalhe nas Seções 4.3 e 4.8.
5. O diagrama de corpo livre deve também incluir as dimensões, pois podem ser necessárias no cálculo dos momentos das forças. Qualquer outro detalhe, no entanto, deve ser omitido.

Foto 4.1 Um diagrama de corpo livre do trator mostrado incluiria todas as forças externas exercidas sobre ele; o peso do trator, o peso da carga na pá carregadeira e as forças exercidas pelo solo sobre os pneus.

Foto 4.2 No Cap. 6 discutiremos como determinar as forças internas em estruturas feitas de várias peças conectadas, tais como as forças nos elementos que suportam a caçamba do trator da Foto 4.1.

Foto 4.3 À medida que a haste do mecanismo de abertura da janela basculante é estendida, a força que ela exerce sobre o deslizador resulta em uma força normal que está sendo aplicada na haste, o que causa a abertura da janela.

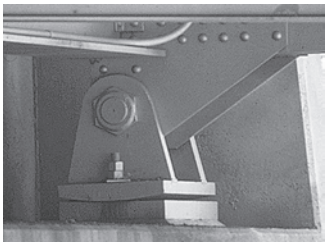


Foto 4.4 O mancal basculante mostrado, montado na estrutura, é usado para sustentar o pavimento de uma ponte.

Foto 4.5 A foto mostra o mancal de expansão basculante de uma ponte de vigas planas. A superfície convexa do suporte basculante permite que o apoio da viga se mova horizontalmente.

EQUILÍBRIO EM DUAS DIMENSÕES

4.3 Reações em apoios e conexões para uma estrutura bidimensional

Na primeira parte deste capítulo, considera-se o equilíbrio de uma estrutura bidimensional; ou seja, pressupõe-se que a estrutura que está sendo analisada e as forças a ela aplicadas estão contidas no mesmo plano. Obviamente, as reações necessárias para se manter a estrutura na mesma posição estarão também contidas nesse plano.

As reações exercidas sobre uma estrutura bidimensional podem ser divididas em três grupos, que correspondem a três tipos de *apoios*, ou *conexões*:

1. *Reações equivalentes a uma força com linha de ação conhecida.* Apoios e conexões que causam reações desse tipo incluem *roletes, suportes basculantes, superfícies sem atrito, hastes de conexão e cabos curtos, cursores em hastes sem atrito* e *pinos sem atrito em fendas.* Cada um desses apoios e conexões pode impedir o movimento em uma direção apenas. Esses apoios e conexões são mostrados na Fig. 4.1, junto com as reações que produzem. Cada uma dessas reações envolve *uma incógnita*, a saber, a intensidade da reação, que deve ser representada por uma letra apropriada. A linha de ação da reação é conhecida e deve ser indicada claramente no diagrama de corpo livre. O sentido da reação deve ser como mostra a Fig. 4.1 para os casos de uma superfície sem atrito (em direção ao corpo livre) ou um cabo (afastando-se do corpo livre). A reação pode ser dirigida em um ou outro sentido no caso de roletes de pista dupla, hastes de conexão, cursores em hastes e pinos em fendas. Roletes de pista simples e suportes basculantes são geralmente considerados reversíveis, e portanto as reações correspondentes podem também ser dirigidas em um ou outro sentido.
2. *Reações equivalentes a uma força de direção, sentido e intensidade desconhecidos.* Apoios e conexões que causam reações desse tipo incluem pinos *sem atrito ajustados em furos, articulações* e *superfícies rugosas.* Esses apoios e conexões podem impedir a translação do corpo livre em todas as direções, mas não podem impedir o corpo de girar em torno da conexão. As reações desse grupo envolvem *duas incógnitas* e são geralmente representadas por seus componentes x e y. No caso de uma superfície rugosa, o componente normal à superfície deve ser dirigido para fora da superfície e, portanto, é dirigido em direção ao corpo livre.
3. *Reações equivalentes a uma força e a um binário.* Essas reações são causadas por *engastes*, que impedem qualquer movimento do corpo livre e, portanto, o imobilizam totalmente. Os engastes, na verdade, produzem forças ao longo de toda a superfície de contato; essas forças, no entanto, formam um sistema que pode ser reduzido a uma força e a um binário. Reações desse grupo envolvem *três incógnitas*, que geralmente consistem nos dois componentes da força e no momento do binário.

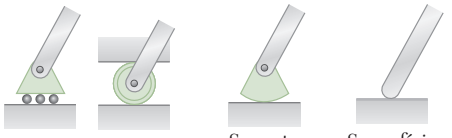
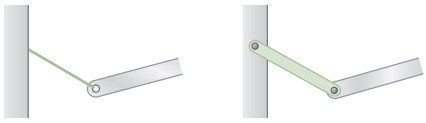
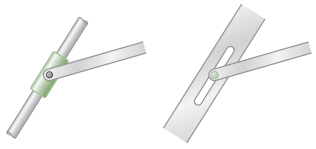
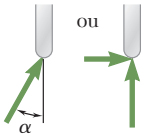
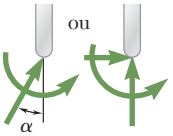
Apoio ou conexão	Reação	Número de incógnitas
 Roletes; Suporte basculante; Superfície sem atrito	Força com linha de ação conhecida	1
 Cabo curto; Haste curta	Força com linha ação conhecida	1
 Cursor sobre haste sem atrito; Pino deslizante sem atrito	Força com linha ação conhecida	1
Pino sem atrito ou articulação; Superfície rugosa	 Força de direção desconhecida	2
Engaste	 Força e binário	3

Figura 4.1 Reações de apoio e conexões.

Quando o sentido de uma força ou binário desconhecido não é facilmente previsível, não se deve fazer qualquer tentativa de determiná-lo. Em vez disso, o sentido da força ou binário deve ser escolhido de maneira arbitrária; o sinal da solução obtida indicará se a hipótese estava correta ou não.

4.4 Equilíbrio de um corpo rígido em duas dimensões

As condições estabelecidas na Seção 4.1 para o equilíbrio de um corpo rígido tornam-se consideravelmente mais simples para o caso de uma estrutura bidimensional. Escolhendo os eixos *x* e *y* no plano da estrutura, temos

$$F_z = 0 \qquad M_x = M_y = 0 \qquad M_z = M_O$$

para cada uma das forças aplicadas à estrutura. Portanto, as seis equações de equilíbrio deduzidas na Seção 4.1 se reduzem a

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_o = 0 \tag{4.4}$$

e as três identidades triviais, 0 = 0. Como $\Sigma M_O = 0$, deve ser satisfeita independentemente da escolha da origem *O*, podemos escrever as equações de equilíbrio para uma estrutura bidimensional na forma mais geral.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{4.5}$$

onde *A* é um ponto qualquer no plano da estrutura. As três equações obtidas podem ser resolvidas para no máximo *três incógnitas*.

Vimos na seção precedente que as forças desconhecidas incluem as reações e que o número de incógnitas correspondentes a uma dada reação depende do tipo de apoio ou conexão produzido por essa reação. Retomando a Seção 4.3, observamos que as equações de equilíbrio (4.5) podem ser aplicadas para se determinar as reações produzidas por dois roletes e um cabo, um engaste, ou um rolete e um pino ajustado em furo, etc.

Considere a Fig. 4.2*a*, na qual a treliça mostrada está sujeita às forças dadas **P**, **Q** e **S**. A treliça é mantida no lugar por um pino em *A* e um rolete em *B*. O pino impede o ponto *A* de se mover exercendo na treliça uma força que pode ser decomposta nos componentes $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$; o rolete impede a rotação da treliça em torno de *A* exercendo a força vertical **B**. O diagrama de corpo livre da treliça é mostrado na Fig. 4.2*b* que inclui as reações $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ e **B**, assim como as forças aplicadas **P**, **Q**, **S** e o peso **W** da treliça. Considerando que a soma dos momentos em relação a *A* de todas as forças mostradas na Fig. 4.2*b* é igual a zero, podemos escrever a equação $\Sigma M_A = 0$, que pode ser usada para se determinar a intensidade *B*, uma vez que essa equação não contém A_x ou A_y. A seguir, considerando que a soma dos componentes em *x* e a soma dos componentes em *y* das forças são iguais a zero, podemos escrever as equações $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, das quais podemos obter os componentes A_x e A_y, respectivamente.

Poderíamos obter uma equação adicional considerando que a soma dos momentos das forças externas em relação a um ponto diferente de *A* é zero, como, por exemplo, $\Sigma M_B = 0$. Tal afirmação, no entanto, não contém qualquer informação nova, pois já foi estabelecido que o sistema de forças mostrado na Fig. 4.2*b* é equivalente a zero. A equação adicional *não é independente* e não pode ser usada para se determinar

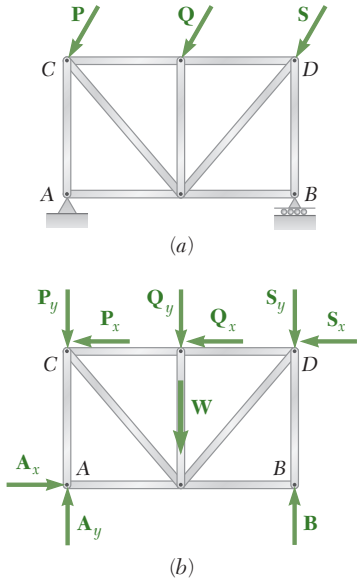


Figura 4.2

uma quarta incógnita. Porém, essa equação será útil para se conferir a solução obtida a partir das três equações de equilíbrio originais.

Embora não seja possível *adicionar* às três equações de equilíbrio equações adicionais, qualquer uma delas pode ser *substituída* por outra equação. Portanto, um sistema alternativo de equações de equilíbrio é

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \tag{4.6}$$

onde o segundo ponto, a servir de referência para a soma dos momentos, (neste caso, o ponto B) não pode estar sobre a linha paralela ao eixo y, que passa pelo ponto A (Fig. 4.2*b*). Essas equações são condições suficientes para o equilíbrio da treliça. As duas primeiras equações indicam que as forças externas devem se reduzir a uma única força vertical em A. Como a terceira equação requer que o momento dessa força seja zero em relação ao ponto B, que não está sobre sua linha de ação, a força deve ser nula e o corpo rígido estar em equilíbrio.

Um terceiro conjunto possível de equações de equilíbrio é

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \tag{4.7}$$

em que os pontos A, B e C não estão sobre uma linha reta (Fig. 4.2*b*). A primeira equação requer que as forças externas se reduzam a uma única força em A; a segunda equação requer que essa força passe por B; e a terceira equação requer que ela passe por C. Como os pontos A, B e C não estão sobre uma linha reta, a força deve ser zero e o corpo rígido estar em equilíbrio.

A equação $\Sigma M_A = 0$, que expressa que a soma dos momentos das forças sobre o pino A é zero, tem um significado físico mais bem definido do que o das duas outras equações (4.7). Essas duas equações expressam uma ideia similar de equilíbrio, mas referindo-se a pontos em relação aos quais o corpo rígido não está articulado. Elas são, no entanto, tão úteis quanto a primeira equação, e nossa escolha de equações de equilíbrio não deve ser desnecessariamente influenciada pelo significado físico de dessas equações. De fato, na prática, será desejável escolher equações de equilíbrio que contenham somente uma incógnita, já que isso elimina a necessidade de se obter as soluções de equações simultâneas. É possível obter equações que contenham somente uma incógnita somando-se os momentos em relação ao ponto de interseção das linhas de ação de duas forças desconhecidas ou, se essas forças forem paralelas, somando-se os componentes em uma direção perpendicular à sua direção comum. Por exemplo, na Fig. 4.3, na qual a treliça mostrada é sustentada por roletes em A e B e por uma haste curta de conexão em D, podem-se eliminar as reações em A e B somando-se os componentes x. As reações em A e D serão eliminadas somando-se os momentos em relação a C, e as reações em B e D, somando-se os momentos em relação a D. As equações obtidas são:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \qquad \Sigma M_D = 0$$

Cada uma dessas equações contém somente uma incógnita.

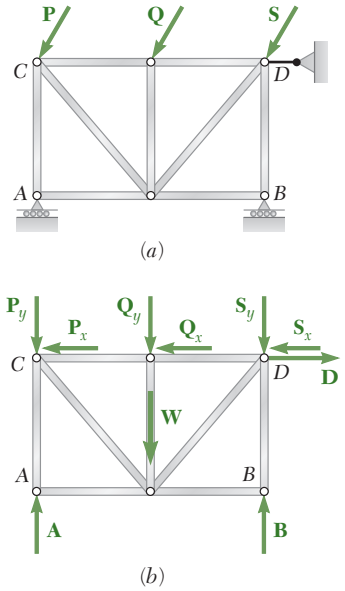


Figura 4.3

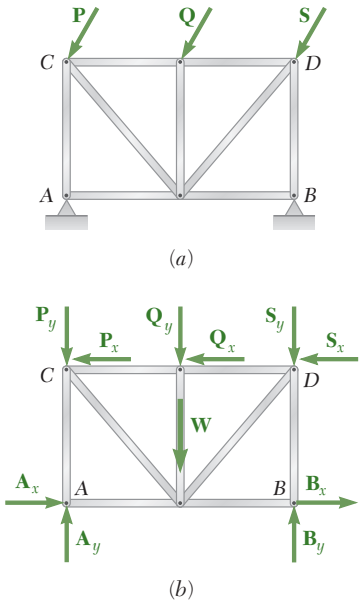


Figura 4.4 Reações estaticamente indeterminadas.

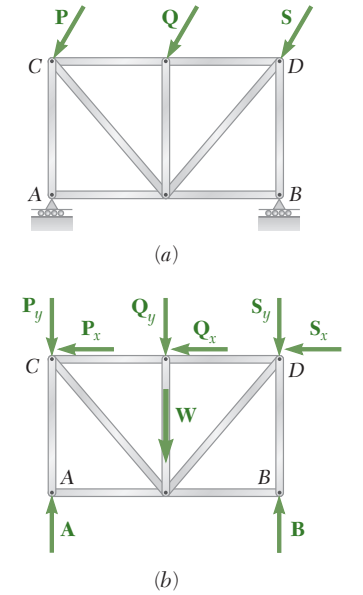


Figura 4.5 Vinculações parciais.

4.5 Reações estaticamente indeterminadas e vinculações parciais

Nos dois exemplos examinados na seção precedente (Figs. 4.2 e 4.3), os tipos de apoio usados foram tais que o corpo rígido não poderia se mover sob as cargas dadas ou sob quaisquer outras condições de carregamento. Em tais casos, diz-se que o corpo rígido está *completamente vinculado.* Recordamos também que as reações correspondentes a esses apoios envolviam *três incógnitas* e podiam ser determinadas resolvendo-se as três equações de equilíbrio. Quando tal situação ocorre, diz-se que as reações são *estaticamente determinadas.*

Considere a Fig. 4.4*a*, na qual a treliça mostrada é sustentada por pinos em *A* e *B.* Esses suportes fornecem mais vínculos do que são necessários para impedir a treliça de se mover sob as cargas aplicadas ou sob quaisquer outras condições de carregamento. Observamos também, a partir do diagrama de corpo livre da Fig. 4.4*b,* que as reações correspondentes envolvem *quatro incógnitas.* Uma vez que, conforme apresentamos na Seção 4.4, só estão disponíveis três equações de equilíbrio independentes, há *mais incógnitas que equações;* portanto, nem todas as incógnitas podem ser determinadas. Enquanto as equações $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$ fornecem os componentes B_y e A_y, respectivamente, a equação $\Sigma F_x = 0$ fornece somente a soma $A_x + B_x$ dos componentes horizontais das reações em *A* e *B.* Os componentes A_x e B_x são considerados *estaticamente indeterminados.* Podem-se determinar esses componentes considerando-se as deformações produzidas na treliça pelo carregamento dado, mas esse método está além do escopo da estática e pertence ao estudo de mecânica dos materiais.

Os apoios usados para sustentar a treliça mostrada na Fig. 4.5*a* consistem em roletes em *A* e em *B.* De forma evidente, os vínculos fornecidos por esses apoios não são suficientes para impedir o movimento da treliça. Embora qualquer movimento vertical esteja impedido, a treliça pode mover-se livremente na horizontal. Diz-se que a treliça está *parcialmente vinculada**.Voltando nossa atenção para a Fig. 4.5*b*, observamos que as reações em *A* e *B* envolvem somente *duas incógnitas.* Como três equações de equilíbrio devem ainda ser satisfeitas, *há menos incógnitas que equações,* e uma das equações de equilíbrio poderá não ser satisfeita. Embora as equações $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$ possam ser satisfeitas por meio de uma escolha apropriada das reações em *A* e *B,* a equação $\Sigma F_x = 0$ não será satisfeita a menos que se conclua que a soma dos componentes horizontais das forças aplicadas é nula. Observamos, portanto, que o equilíbrio da treliça da Fig. 4.5 não pode ser mantido em condições gerais de carregamento.

Conclui-se da discussão anterior que, para um corpo rígido estar completamente vinculado e as reações em seus apoios serem estaticamente determinadas, *deve haver tantas incógnitas quanto equações de equilíbrio.* Quando essa condição *não é* satisfeita, podemos estar certos de que o corpo rígido não está completamente vinculado ou as reações em seus apoios não são estaticamente determinadas; é também possível que o corpo rígido não esteja completamente vinculado *e* que as reações sejam estaticamente indeterminadas.

Devemos notar, no entanto, que, embora *necessária,* a condição anterior *não é suficiente.* Em outras palavras: o fato de o número de incógnitas

* Corpos parcialmente vinculados são frequentemente citados como *instáveis.* No entanto, para evitar confusão entre esse tipo de instabilidade, devida às restrições insuficientes, e o tipo de instabilidade considerada no Cap. 10, que é relativo ao comportamento de um corpo rígido quando seu equilíbrio é perturbado, vamos restringir o uso dos termos *estável* e *instável* a esse último caso.

ser igual ao número de equações não é garantia de que o corpo esteja completamente vinculado ou que as reações em seus apoios sejam estaticamente determinadas. Considere a Fig. 4.6*a*, na qual a treliça mostrada é sustentada por roletes em *A*, *B* e *E*. Embora existam três reações incógnitas, **A**, **B** e **E** (Fig. 4.6*b*), a equação $\Sigma F_x = 0$ não será satisfeita a menos que se conclua que a soma dos componentes horizontais das forças aplicadas é igual a zero. Apesar de haver um número suficiente de vínculos, esses vínculos não estão apropriadamente arranjados, e a treliça pode mover-se livremente em sentido horizontal. Diz-se que a treliça está *impropriamente vinculada.* Como restam somente duas equações de equilíbrio para determinar três incógnitas, as reações serão estaticamente indeterminadas. Deste modo, vínculos impróprios também produzem indeterminação estática.

Outro exemplo de vinculações impróprias – e de indeterminação estática – é dado pela treliça mostrada na Fig. 4.7. Essa treliça é sustentada por um pino em *A* e por roletes em *B* e *C*, o que ao todo envolve quatro incógnitas. Como só estão disponíveis três equações de equilíbrio independentes, as reações nos apoios são estaticamente indeterminadas. Por outro lado, verifica-se que a equação $\Sigma M_A = 0$ não pode ser satisfeita em condições gerais de carregamento, pois as linhas de ação das reações **B** e **C** passam por *A*. Concluímos que a treliça pode girar em torno de *A* e que ela está impropriamente vinculada.*

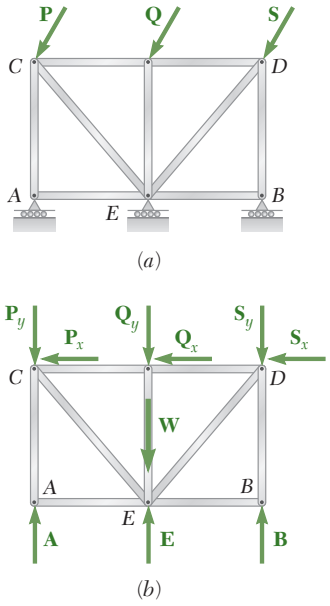


Figura 4.6 Vinculações impróprias

Os exemplos das Figs. 4.6 e 4.7 levam-nos a concluir que *um corpo rígido está impropriamente vinculado sempre que os suportes,* mesmo que forneçam um número suficiente de reações, *estiverem dispostos de tal modo que as reações sejam concorrentes em um mesmo ponto ou paralelas.***

Em suma, para se ter certeza de que um corpo rígido bidimensional está completamente vinculado e que as reações em seus apoios são estaticamente determinadas, devemos verificar se as reações envolvem três – e somente três – incógnitas e se os apoios estão dispostos de tal modo que não exijam que as reações sejam concorrentes ou paralelas.

Suportes que envolvem reações estaticamente indeterminadas devem ser usados com cuidado no *projeto* de estruturas e só com conhecimento completo dos problemas que eles podem causar. Por outro lado, a *análise* de estruturas que apresentam reações estaticamente indeterminadas pode, muitas vezes, ser parcialmente realizada por meio dos métodos da estática. No caso da treliça da Fig. 4.4, por exemplo, os componentes verticais das reações em *A* e *B* foram obtidos das equações de equilíbrio.

Por razões óbvias, os suportes que produzem vinculações parciais ou impróprias devem ser evitados no projeto de estruturas estacionárias. Porém, uma estrutura parcial ou impropriamente vinculada não irá necessariamente entrar em colapso; em certas condições de carregamento, o equilíbrio poderá ser mantido. Por exemplo, as treliças das Figs. 4.5 e 4.6 estarão em equilíbrio se as forças aplicadas **P**, **Q** e **S** forem verticais. Além disso, estruturas que são projetadas para se mover *devem* ser apenas parcialmente vinculadas. Um vagão de trem, por exemplo, seria pouco útil se fosse completamente vinculado por meio da aplicação permanente de seus freios.

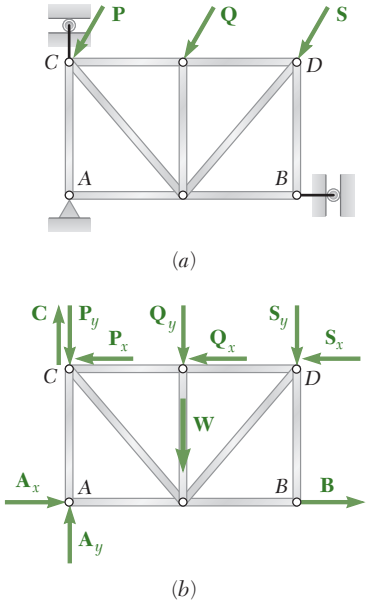
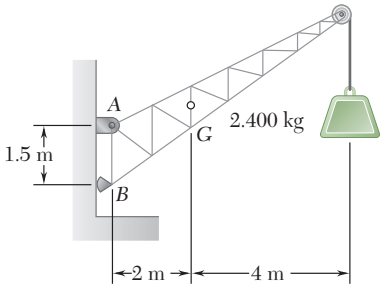


Figura 4.7 Vinculações impróprias

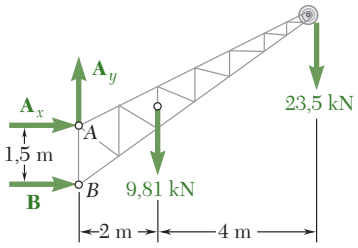
* A rotação da treliça em torno de *A* requer alguma "folga" nos apoios em *B* e *C*. Na prática, essa folga sempre existirá. Além disso, observa-se que, se a folga se mantiver pequena, os deslocamentos dos roletes *B* e *C* – e, assim, as distâncias do ponto *A* às linhas de ação das reações **B** e **C** também serão pequenos. A equação $\Sigma M_A = 0$ requer, então, que as reações **B** e **C** sejam muito grandes, situação que pode resultar no colapso dos suportes em *B* e *C*.

** Pelo fato de decorrer de uma *geometria* ou arranjo inadequados dos apoios, essa situação é frequentemente citada como *instabilidade geométrica.*



PROBLEMA RESOLVIDO 4.1

Um guindaste fixo tem massa de 1.000 kg e é usado para suspender um caixote de 2.400 kg. Ele é mantido na posição indicada na figura por um pino em *A* e um suporte basculante em *B*. O centro de gravidade do guindaste está localizado em *G*. Determine os componentes das reaçãoes em *A* e *B*.



SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Traça-se um diagrama de corpo livre do guindaste. Multiplicando as massas do guindaste e do caixote por $g = 9{,}81$ m/s^2, obtemos os pesos correspondentes, ou seja, 9.810 N, ou 9,81 kN, e 23.500 N, ou 23,5 kN. A reação no pino *A* é uma força de direção desconhecida e é representada por seus componentes $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$. A reação no suporte basculante *B* é perpendicular à superfície deste; portanto, ela é horizontal. Admitimos que $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ e **B** atuam nas direções e sentidos mostrados.

Cálculo de *B*. Expressamos que a soma dos momentos de todas as forças em relação ao ponto *A* é zero. A equação obtida não conterá $\mathbf{A}_x$ nem $\mathbf{A}_y$, pois os momentos de $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$ em relação a *A* são nulos. Mutiplicando a intensidade de cada força por sua distância perpendicular a partir de *A*, temos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad +B(1{,}5\text{ m}) - (9{,}81\text{ kN})(2\text{ m}) - (23{,}5\text{ kN})(6\text{ m}) = 0$$
$$B = +107{,}1\text{ kN} \qquad \mathbf{B} = 107{,}1\text{ kN} \rightarrow \blacktriangleleft$$

Como o resultado é positivo, a reação tem a direção que lhe atribuimos anteriormente.

Cálculo de A_x. Determina-se a intensidade de $\mathbf{A}_x$ expressando-se que a soma dos componentes horizontais de todas as forças externas é nula.

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$
$$A_x + 107{,}1\text{ kN} = 0$$
$$A_x = -107{,}1\text{ kN} \qquad \mathbf{A}_x = 107{,}1\text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft$$

Como o resultado é negativo, o sentido de $\mathbf{A}_x$ é oposto ao assumido originalmente.

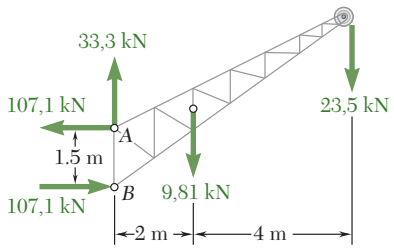
Cálculo de A_y. A soma dos componentes verticais também deve ser nula.

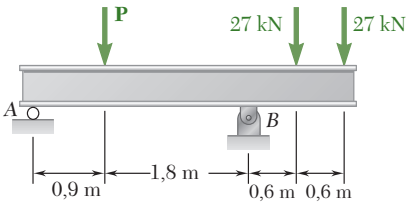
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad A_y - 9{,}81\text{ kN} - 23{,}5\text{ kN} = 0$$
$$A_y = +33{,}3\text{ kN} \qquad \mathbf{A}_y = 33{,}3\text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

Adicionando vetorialmente os componentes $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$, descobrimos que a reação em *A* é 112,2 kN ⦜ 17,3°.

Verificação. Os valores obtidos para as reações podem ser verificados recordando-se que a soma dos momentos de todas as forças externas em relação a qualquer ponto deve ser nula. Por exemplo, considerando-se o ponto *B*, temos:

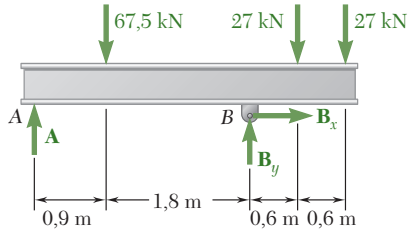
$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -(9{,}81\text{ kN})(2\text{ m}) - (23{,}5\text{ kN})(6\text{ m}) + (107{,}1\text{ kN})(1{,}5\text{ m}) = 0$$





PROBLEMA RESOLVIDO 4.2

Três cargas são aplicadas a uma viga tal como mostra a figura. A viga é sustentada por um rolete em *A* e por um pino em *B*. Desprezando o peso da viga, determine as reações em *A* e *B* quando $P = 67{,}5$ kN.



SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Traça-se um diagrama de corpo livre da viga. A reação em *A* é vertical e é representada por **A**. A reação em *B* é representada pelos componentes $\mathbf{B}_x$ e $\mathbf{B}_y$. Admite-se que cada componente atua com sentido indicado na figura.

Equações de equilíbrio. Escrevemos as três equações de equilíbrio seguintes e as resolvemos para as reações indicadas:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad B_x = 0 \qquad \mathbf{B}_x = 0 \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0:$$
$$-(67{,}5\text{ kN})(0{,}9\text{ m}) + B_y(2{,}7\text{ m}) - (27\text{ kN})(3{,}3\text{ m}) - (27\text{ kN})(3{,}9\text{ m}) = 0$$
$$B_y = +94{,}5\text{ kN} \qquad \mathbf{B}_y = 94{,}5\text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

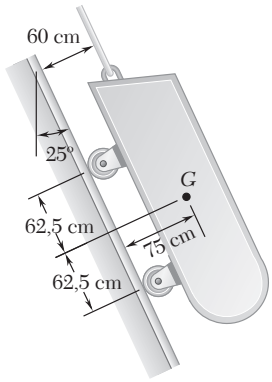
$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0:$$
$$-A(2{,}7\text{ m}) + (67{,}5\text{ kN})(1{,}8\text{ m}) - (27\text{ kN})(0{,}6\text{ m}) - (27\text{ kN})(1{,}2\text{ m}) = 0$$
$$A = +27\text{ kN} \qquad \mathbf{A} = 27\text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

Verificação. Os resultados são verificados somando-se os componentes verticais de todas as forças externas:

$$+\uparrow \Sigma F_y = +27\text{ kN} - 67{,}5\text{ kN} + 94{,}5\text{ kN} - 27\text{ kN} - 27\text{ kN} = 0$$

Observação. Neste problema, as reações tanto em *A* como em *B* são verticais; no entanto, essas reações são verticais por razões diferentes. Em *A*, a viga é sustentada por um rolete; portanto, a reação não pode ter nenhum componente horizontal. Em *B*, o componente horizontal da reação é zero porque deve satisfazer a equação de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$ e nenhuma das outras forças exercidas na viga tem um componente horizontal.

Poderíamos ter percebido à primeira vista que a reação em *B* era vertical e dispensado o componente horizontal $\mathbf{B}_x$. Contudo, não seria uma boa opção. Se a seguíssemos, correríamos o risco de esquecer o componente $\mathbf{B}_x$ quando as condições de carregamento exigissem tal componente (ou seja, quando fosse incluída uma carga horizontal). Além disso, o componente $\mathbf{B}_x$ foi calculado igual a zero por meio da solução de uma equação de equilíbrio, $\Sigma F_x = 0$. Se estabelecêssemos $\mathbf{B}_x$ igual a zero de imediato, poderíamos não perceber que realmente fizemos uso dessa equação e, assim, perderíamos o controle do número de equações disponíveis para resolver o problema.



PROBLEMA RESOLVIDO 4.3

Um vagão de carga está em repouso sobre um trilho formando um ângulo de 25° com a vertical. O peso bruto do vagão e sua carga é 24.750 N e em um ponto atua 75 cm do trilho, no meio entre os dois eixos. O vagão é amarrado por um cabo a 60 cm do trilho. Determine a tração no cabo e a reação em cada par de rodas.

SOLUÇÃO

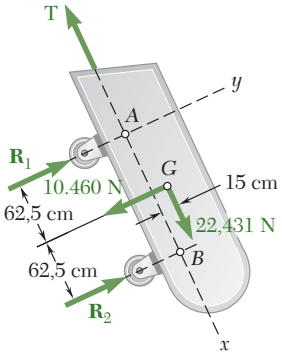


Diagrama de corpo livre. Um diagrama de corpo livre do vagão é traçado na figura. A reação em cada roda é perpendicular ao trilho, e a força de tração **T** é paralela a ele. Por conveniência, escolhemos o eixo x paralelo ao trilho e o eixo y perpendicular ao trilho. O peso de 24.750 N é, então, decomposto em componentes x e y.

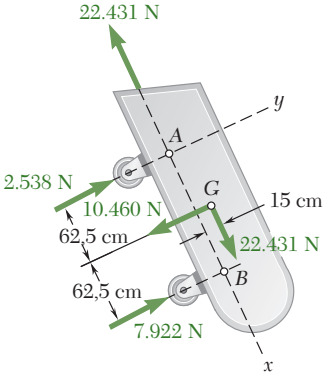
$$W_x = +(24.750\text{ N})\cos 25° = +22.431\text{ N}$$
$$W_y = -(24.750\text{ N})\operatorname{sen} 25° = -10.460\text{ N}$$

Equação de equilíbrio. Consideramos momentos em relação a A a fim de excluir **T** e $\mathbf{R}_1$ dos cálculos.

$$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0:$$
$$-(10.460\text{ N})(62{,}5\text{ cm}) - (22.431\text{ N})(15\text{ cm}) + R_2(125\text{ cm}) = 0$$
$$R_2 = +7.922\text{ N} \qquad \mathbf{R}_2 = 7.922\text{ N}\nearrow$$

Agora, levando em conta os momentos em relação a B para eliminar **T** e $\mathbf{R}_2$ dos cálculos, temos:

$$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0:$$
$$(10.460\text{ N})(62{,}5\text{ cm}) - (22.431\text{ N})(15\text{cm}) - R_1(125\text{ cm}) = 0$$
$$R_1 = +2.538\text{ N} \qquad \mathbf{R}_1 = +2.538\text{ N}\nearrow$$



Encontra-se o valor de T da seguinte maneira:

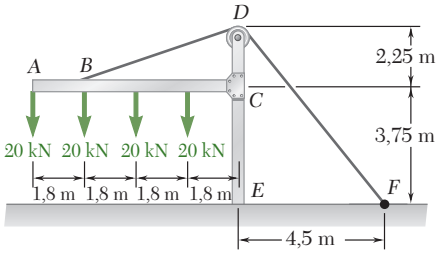
$$\searrow+\Sigma F_x = 0: \qquad +22.431\text{ N} - T = 0$$
$$T = +22.431\text{ N} \qquad \mathbf{T} = 22.431\text{ N}\nwarrow$$

Os valores calculados das reações são mostrados no esboço ao lado.

Verificação. Os cálculos são verificados da seguinte maneira:

$$\nearrow+\Sigma F_y = +2.538\text{ N} + 7.922\text{ N} - 10.460\text{ N} = 0$$

Poderíamos também ter verificado a solução calculando os momentos em relação a qualquer outro ponto diferente de A e B.

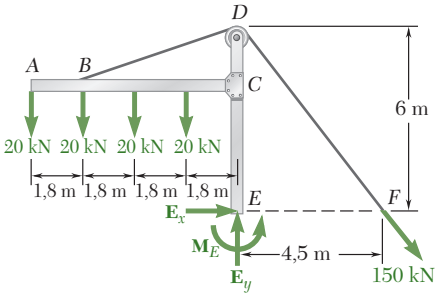


PROBLEMA RESOLVIDO 4.4

A estrutura representada na figura sustenta parte do teto de um pequeno edifício. Sabendo que a tração no cabo é 150 kN, determine a reação na extremidade fixa *E*.

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Traça-se um diagrama de corpo livre da estrutura e do cabo *BDF*. A reação na extremidade fixa **E** é representada pelos componentes de força $\mathbf{E}_x$ e $\mathbf{E}_y$ e pelo binário $\boldsymbol{M}_E$. As outras forças que atuam no corpo livre são as quatro cargas de 20 kN e a força de 150 kN exercida na extremidade *F* do cabo.



Equação de equilíbrio. Notando que $DF = \sqrt{(4{,}5\text{ m})^2 + (6\text{ m})^2} = 7{,}5\text{ m}$, temos:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad E_x + \frac{4{,}5}{7{,}5}(150\text{ kN}) = 0$$

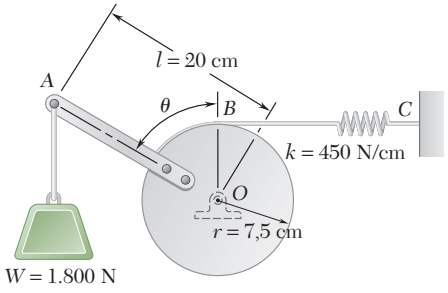
$$E_x = -90{,}0\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_x = 90{,}0\text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad E_y - 4(20\text{ kN}) - \frac{6}{7{,}5}(150\text{ kN}) = 0$$

$$E_y = +200\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_y = 200\text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0: \quad (20\text{ kN})(7{,}2\text{ m}) + (20\text{ kN})(5{,}4\text{ m}) + (20\text{ kN})(3{,}6\text{ m})$$
$$+ (20\text{ kN})(1{,}8\text{ m}) - \frac{6}{7{,}5}(150\text{ kN})(4{,}5\text{ m}) + M_E = 0$$

$$M_E = +180{,}0\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \mathbf{M}_E = 180{,}0\text{ kN}\cdot\text{m}\circlearrowleft \blacktriangleleft$$

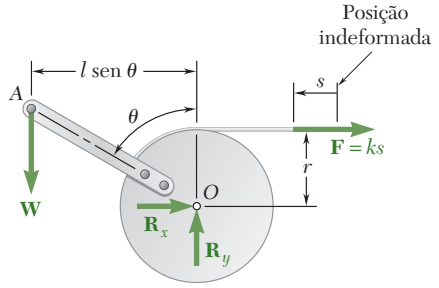


PROBLEMA RESOLVIDO 4.5

Um peso de 1.800 N está ligado em *A* à alavanca mostrada na figura. A constante da mola *BC* é $k = 450$ N/cm, e a mola está indeformada quando $\theta = 0$. Determine a posição de equilíbrio.

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Traça-se o diagrama do corpo livre da alavanca e do cilindro. Representando por *s* a deflexão da mola a partir de sua posição indeformada, e observando que $s = r\theta$, temos $F = ks = kr\theta$.



Equação de equilíbrio. Somando os momentos de **W** e **F** em relação a *O*, temos:

$$+\circlearrowleft\Sigma M_O = 0: \qquad Wl\text{ sen }\theta - r(kr\theta) = 0 \qquad \text{sen }\theta = \frac{kr^2}{Wl}\theta$$

Substituindo os valores dados, obtemos:

$$\text{sen }\theta = \frac{(450\text{ N/cm})(7{,}5\text{ cm})^2}{(1.800\text{ N})(20\text{ cm})}\theta \qquad \text{sen }\theta = 0{,}703\theta$$

Resolvendo numericamente, encontramos: $\theta = 0$ $\theta = 80{,}3°$ ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vimos que as forças externas aplicadas sobre um corpo rígido em equilíbrio formam um sistema de forças equivalente a zero. Para resolver um problema de equilíbrio, sua primeira tarefa é traçar um *diagrama de corpo livre* claro e em uma escala adequada, no qual você irá representar todas as forças externas e as dimensões relevantes. Tanto as forças conhecidas quanto as forças desconhecidas devem ser incluídas.

Para um corpo rígido bidimensional, as reações nos apoios podem envolver uma, duas ou três incógnitas, dependendo do tipo de apoio (Fig. 4.1). Para uma solução bem-sucedida de um problema, um diagrama de corpo livre correto é essencial. Nunca devemos prosseguir com a solução de um problema enquanto não estivermos seguros de que seu diagrama de corpo livre inclui todas as cargas, todas as reações e o peso do corpo (se for o caso).

1. Podemos escrever três equações de equilíbrio e resolvê-las para três *incógnitas*. As três equações podem ser:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0$$

Porém, há geralmente vários conjuntos de equações que podem ser escritos, tais como

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0$$

onde o ponto B é escolhido de modo que a linha AB não seja paralela ao eixo y, ou

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$

onde os pontos A, B e C não devem ser colineares.

2. Para simplificar a solução, pode ser útil aplicar uma das seguintes técnicas de solução, se for aplicável:

a. Pela soma dos momentos em relação ao ponto de interseção das linhas de ação de duas forças desconhecidas, obteremos uma equação com uma única incógnita.
b. Pela soma dos componentes numa direção perpendicular a duas forças desconhecidas paralelas, obteremos uma equação com uma única incógnita.

3. Depois de traçar seu diagrama de corpo livre, podemos encontrar uma das seguintes situações especiais:

a. As reações envolvem menos que três incógnitas, o corpo é considerado *parcialmente vinculado* e seu movimento é possível.
b. As reações envolvem mais que três incógnitas: as reações são consideradas *estaticamente indeterminadas*. Embora possamos ser capazes de calcular uma ou duas reações, não podemos determinar todas as reações.
c. As reações passam por um único ponto ou são paralelas: o corpo é considerado *impropriamente vinculado* e seu movimento pode ocorrer de acordo com as condições gerais de carregamento.

PROBLEMAS

4.1 Um trator de 9.450 N é usado para erguer 4.050 N de cascalho. Determine a reação em cada uma das duas (*a*) rodas traseiras *A*, (*b*) rodas dianteiras *B*.

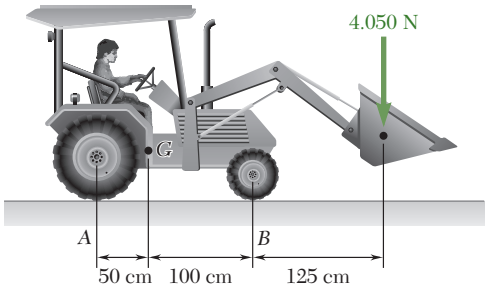


Figura P4.1

4.2 Uma jardineira usa um carrinho de mão de 60 N para transportar um saco de fertilizante. Qual a força que ela deve exercer em cada barra?

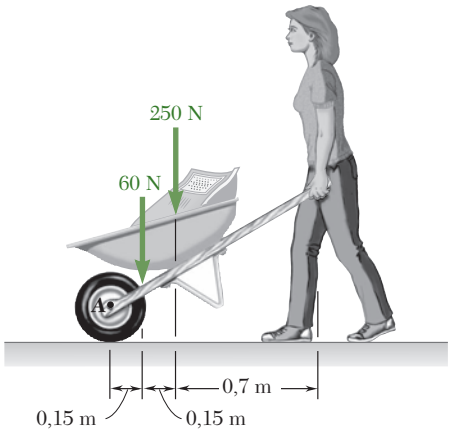


Figura P4.2

4.3 A jardineira do Problema 4.2 deseja transportar um segundo saco de fertilizante de 250 N ao mesmo tempo que o primeiro. Determine a máxima distância horizontal admissível do eixo *A* do carrinho de mão até o centro de gravidade do segundo saco se ela pode carregar somente 75 N em cada braço.

4.4 Para a viga e carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a reação em *A*, (*b*) a tração no cabo *BC*.

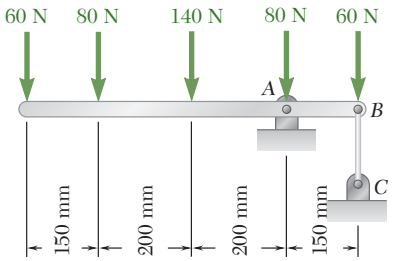


Figura P4.4

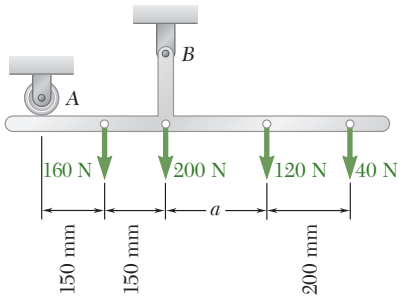


Figura P4.7

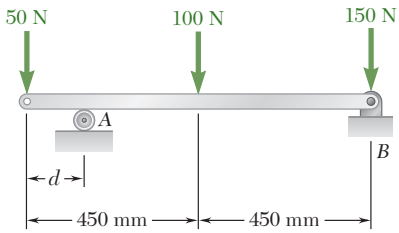


Figura P4.9

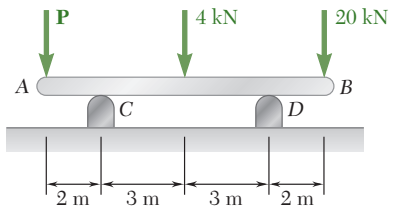


Figura P4.12 e P4.13

4.5 Dois caixotes, de massa 350 kg cada, são colocados na caçamba de uma caminhonete de 1.400 kg. Determine as reações em cada uma das duas (*a*) rodas traseiras *A*, (*b*) rodas dianteiras *B*.

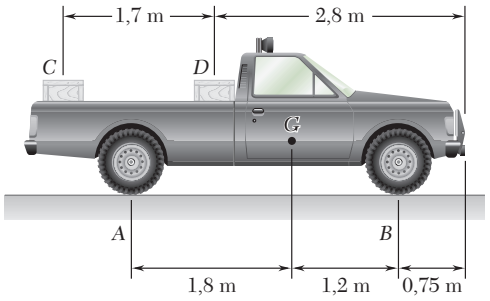


Figura P4.5

4.6 Resolva o Problema 4.5 considerando que o caixote *D* foi removido e a posição do caixote *C* permanece inalterada.

4.7 Um apoio em T sustenta as quatro cargas mostradas na figura. Determine as reações em *A* e *B* (*a*) se $a = 250$ mm, (*b*) se $a = 175$ mm.

4.8 Para o apoio e o carregamento do Problema 4.7, determine a menor distância *a* para a qual o apoio não se move.

4.9 O máximo valor admissível de cada uma das reações é 180 N. Desprezando o peso da viga, determine o intervalo de valores da distância *d* para o qual a viga está segura.

4.10 Resolva o Problema 4.9 considerando que a carga de 50 N é substituída por uma carga de 80 N.

4.11 Para a viga do Problema Resolvido 4.2, determine o intervalo de valores de *P* para os quais a viga estará segura, sabendo que o valor máximo admissível de cada uma das reações é 120 kN e a reação em *A* deve estar direcionada para cima.

4.12 A viga *AB* de 10 m apoia, mas não está fixada, sobre aos suportes *C* e *D*. Desprezando o peso próprio da viga, determine o intervalo de valores de *P* para que a viga permaneça em equilíbrio.

4.13 O máximo valor admissível de cada reação é 50 kN, e cada reação deve ser direcionada para cima. Desprezando o peso da viga, determine o intervalo de valores de *P* para que a viga esteja segura.

4.14 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine o intervalo de valores da distância *a* para os quais a reação em *B* não exceda 400 N dirigida para baixo ou 800 N dirigida para cima.

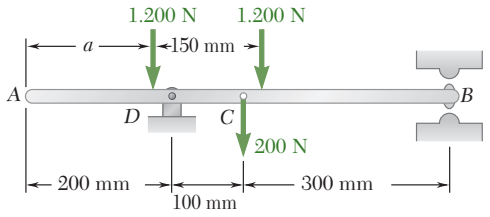


Figura P4.14

4.15 Duas hastes *AB* e *DE* são conectadas por uma alavanca *BCD* como mostrado. Sabendo que a tração na haste *AB* é 720 N, determine (*a*) a tração da haste *DE*, (*b*) a reação em *C*.

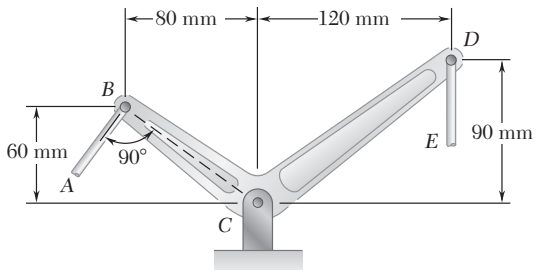


Figura P4.15 e P4.16

4.16 Duas hastes *AB* e *DE* são conectadas por uma alavanca *BCD* como mostrado na figura. Determine a máxima força que pode ser exercida com segurança pela haste *AB* na alavanca se o máximo valor admissível para a reação em *C* é 1.600 N.

4.17 A tração necessária no cabo *AB* é 800 N. Determine (*a*) a força vertical **P** que deve ser aplicada ao pedal, (*b*) a reação correspondente em *C*.

4.18 Determine a máxima tração que pode ser aplicada no cabo *AB* se o valor máximo admissível da reação em *C* for 1.000 N.

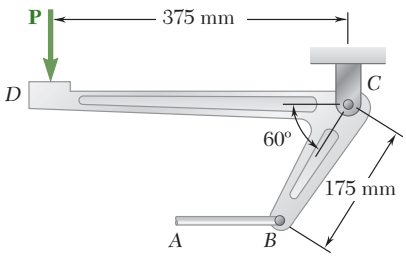


Figura P4.17 e P4.18

4.19 O suporte *BCD* é articulado em *C* e preso a um cabo de controle em *B*. Para o carregamento mostrado na figura, determine (*a*) a tração no cabo, (*b*) a reação em *C*.

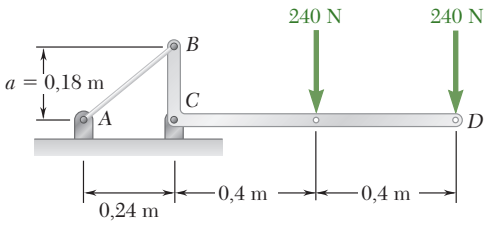


Figura P4.19

4.20 Resolva o Problema 4.19, considerando que $a = 0{,}32$ m.

4.21 Determine as reações em *A* e *B* quando (*a*) $h = 0$, (*b*) $h = 200$ mm.

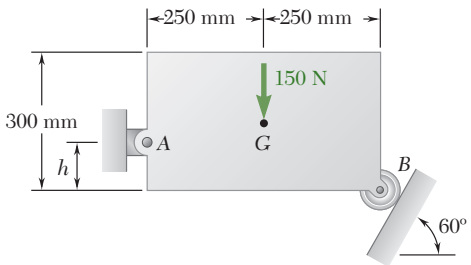


Figura P4.21

4.22 Para a estrutura e carregamento mostrados na figura, determine as reações em *A* e *E* quando (*a*) $\alpha = 30°$ e (*b*) $\alpha = 45°$.

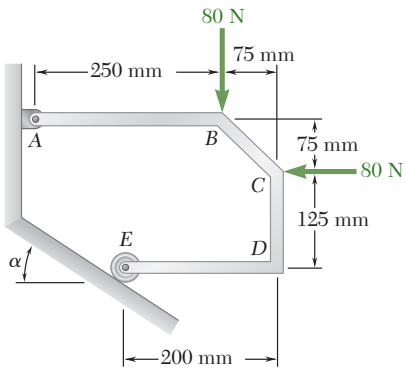


Figura P4.22

4.23 e 4.24 Para cada uma das placas e carregamentos mostrados nas figuras, determine as reações em A e B.

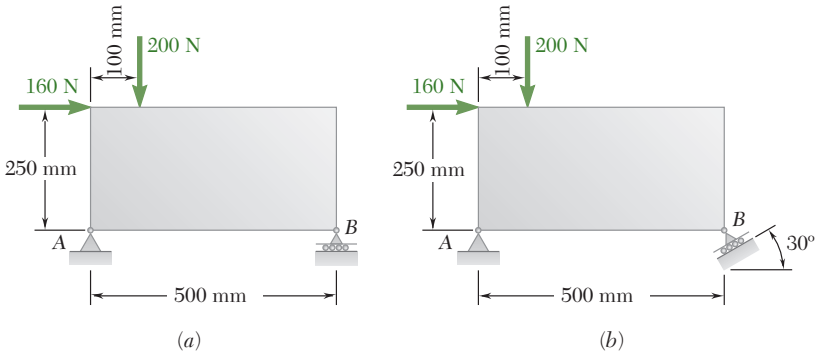


Figura P4.23

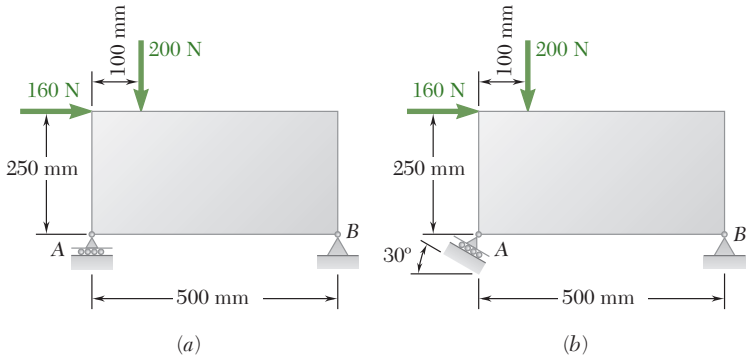


Figura P4.24

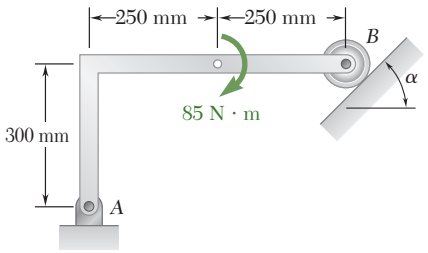


Figura P4.25

4.25 Determine as reações em A e B quando (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 90°$.

4.26 A barra AB, articulada em A e presa em B ao cabo BD, suporta as cargas mostradas nas figuras. Sabendo que $d = 200$ mm, determine (a) a tração no cabo BD, (b) a reação em A.

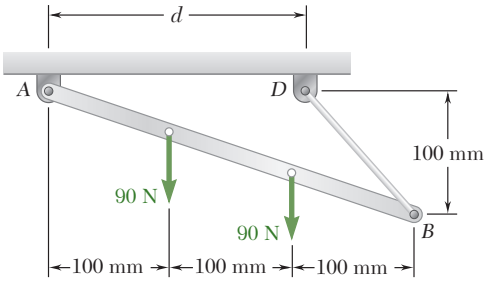


Figura P4.26 e P4.27

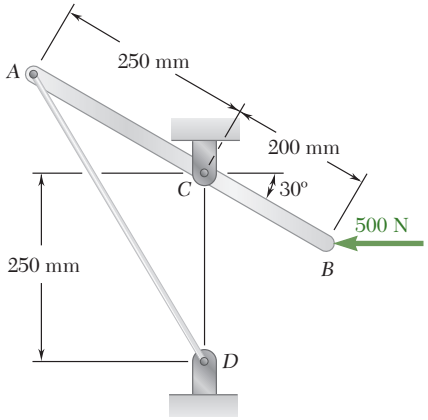


Figura P4.28

4.27 A haste AB, articulada em A e presa em B ao cabo BD, suporta as cargas mostradas na figura. Sabendo que $d = 150$ mm, determine (a) a tração no cabo BD, (b) a reação em A.

4.28 A alavanca AB é articulada em C e presa ao cabo de controle em A. Se a alavanca é sujeita a uma força horizontal de 500 N em B, determine (a) a tração no cabo, (b) a reação em C.

4.29 A força **P** de intensidade 1.245 N é aplicada no membro *ABCD*, que é suportado sem atrito pelo pino *A* e pelo cabo *CED*. Já que o cabo passa por uma pequena polia em *E*, a tração no cabo pode ser considerada a mesma nas porções *CE* e *ED*. Para o caso $a = 75$ mm, determine (*a*) a tração no cabo, (*b*) a reação em *A*.

4.30 Desprezando o atrito, determine a tração no cabo *ABD* e a reação no suporte *C*.

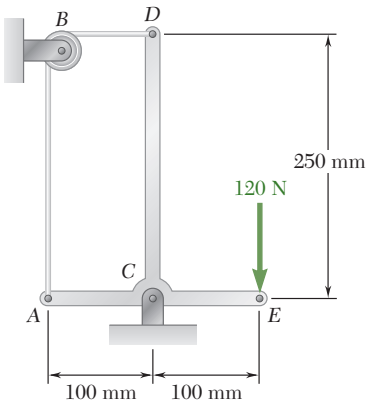


Figura P4.30

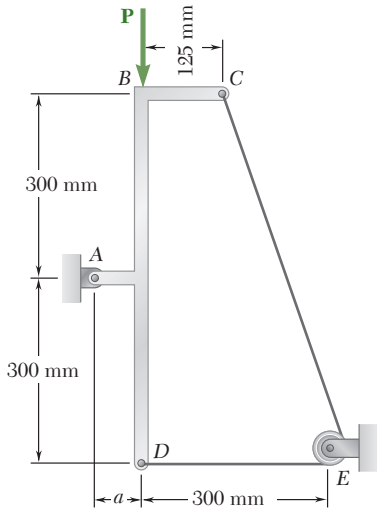


Figura P4.29

4.31 A haste *ABC* é dobrada em forma de um arco de círculo de raio *R*. Sabendo que $\theta = 30°$, determine a reação (*a*) em *B*, (*b*) em *C*.

4.32 A haste *ABC* é dobrada em forma de um arco de círculo de raio *R*. Sabendo que $\theta = 60°$, determine a reação (*a*) em *B*, (*b*) em *C*.

4.33 Desprezando o atrito, determine a tração no cabo *ABD* e a reação em *C* quando $\theta = 60°$.

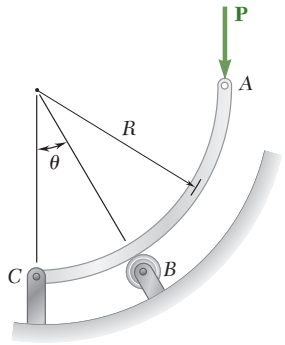


Figura *P4.31* e *P4.32*

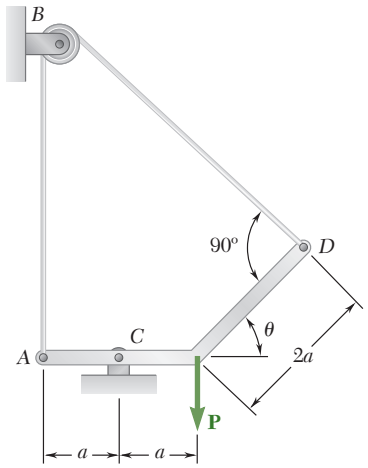


Figura P4.33 e P4.34

4.34 Desprezando o atrito, determine a tração no cabo *ABD* e a reação em *C* quando $\theta = 45°$.

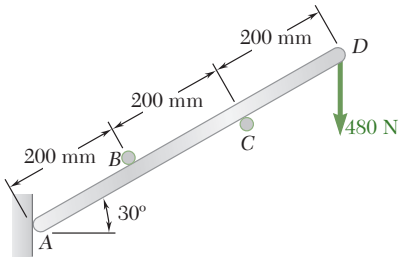


Figura P4.35

4.35 Uma haste leve é suportada sem atrito por cavilhas em *B* e *C* e apoia sem atrito na parede em *A*. A força vertical de 480 N é aplicada em *D*. Determine as reações em *A*, *B* e *C*.

4.36 Uma barra leve *AD* é suspensa pelo cabo *BE* e suporta um bloco de 200 N em *C*. As extremidades *A* e *D* da barra estão em contato, sem atrito, com as paredes. Determine a tração no cabo *BE* e as reações em *A* e *D*.

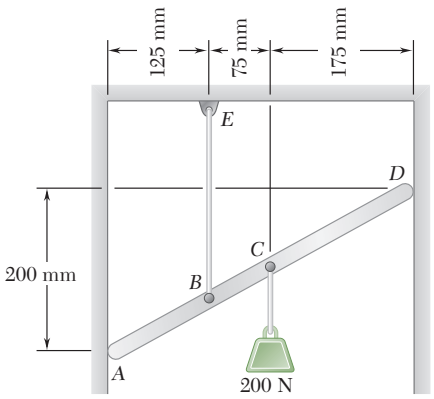


Figura P4.36

4.37 A barra *AC* sustenta duas cargas de 400 N, tal como mostra a figura. Os roletes *A* e *C* estão apoiados em superfícies sem atrito, e um cabo *BD* é preso em *B*. Determine (*a*) a tração no cabo *BD*, (*b*) a reação em *A* e (c) a reação em *C*.

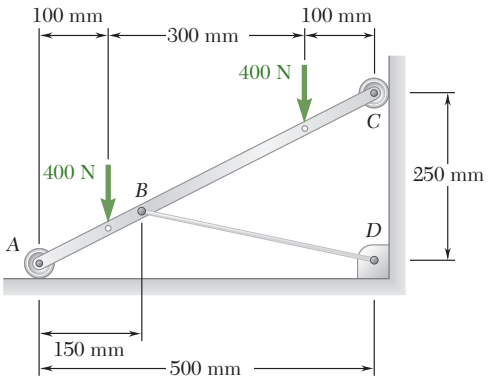


Figura P4.37

4.38 Determine a tração em cada cabo e a reação em *D*.

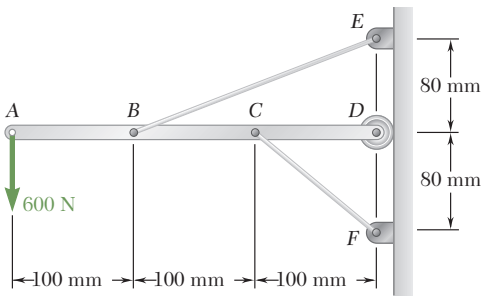


Figura P4.38

4.39 Duas reentrâncias foram feitas na chapa *DEF*, e esta foi posicionada pelas fendas nos pinos fixos *A* e *B* sem atrito. Sabendo que $P = 60$ N, determine (*a*) a força que cada pino exerce sobre a chapa, (*b*) a reação em *F*.

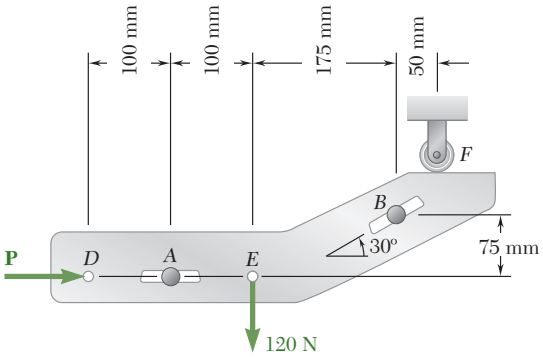


Figura P4.39

4.40 Para o Problema 4.39, a reação em *F* deve ser direcionada para baixo e seu valor máximo admissível 80 N. Desprezando o atrito nos pinos, determine a intervalo de valores requeridos de *P*.

4.41 A barra *AD* é presa em *A* e *C* por cursores que podem se mover livremente nas hastes mostradas na figura. Se a corda *BE* é vertical ($\alpha = 0$), determine a tração na corda e as reações em *A* e *C*.

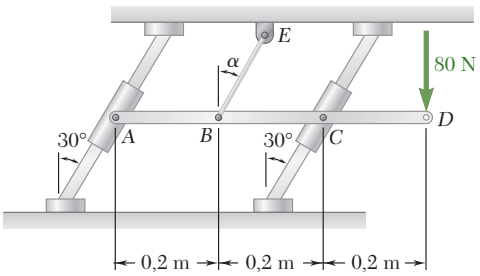


Figura P4.41

4.42 Resolva o Problema 4.41 se a corda *BE* é paralela às hastes ($\alpha = 30°$).

4.43 Uma massa de 8 kg pode ser sustentado das três diferentes maneiras mostradas nas figuras. Sabendo que as polias têm um raio de 100 mm, determine a reação em *A* em cada caso.

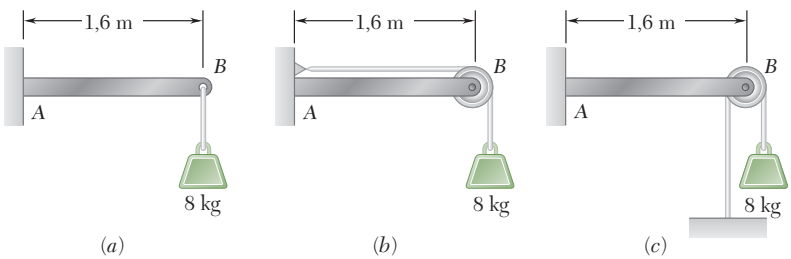


Figura P4.43

4.44 Uma força de tração de 25 N é mantida em uma fita à medida que esta passa pelo sistema de suportes mostrado na figura. Sabendo que o raio de cada polia é 10 mm, determine a reação em *C*.

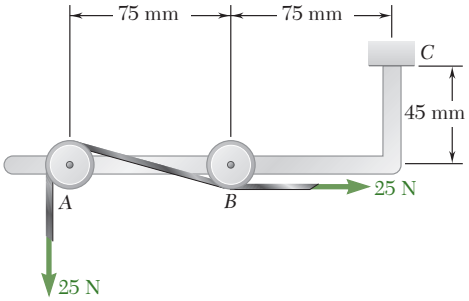


Figura P4.44

4.45 Resolva o Problema 4.44 considerando que são usadas as polias de raio 15 mm.

4.46 Um poste de telefone de 6 m com peso 1.600 N é usado para manter as extremidades de dois fios suspensas. Os fios formam com a horizontal os ângulos mostrados na figura, e as trações nos fios são, respectivamente, $T_1 = 600$ N e $T_2 = 375$ N. Determine a reação na extremidade fixa *A*.

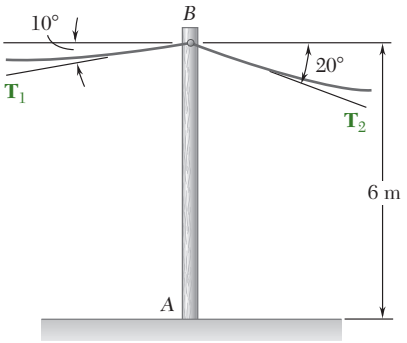


Figura P4.46

4.47 A viga *AD* sustenta as duas cargas de 160 N mostradas na figura. A viga é mantida em posição por um engaste em *D* e por um cabo *BE* que está preso ao contrapeso *W*. Determine a reação em *D* quando (*a*) $W = 400$ N, (*b*) $W = 360$ N.

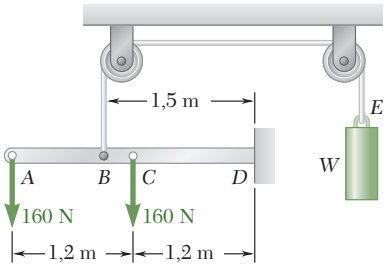


Figura P4.47 e P4.48

4.48 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine o intervalo de valores de *W* para os quais a intensidade do binário em *D* não exceda a 54 N · m.

4.49 Sabendo que a tração no arame *BD* é 1.300 N, determine a reação do engaste *C* na estrutura mostrada na figura.

4.50 Determine o intervalo de valores admissíveis da tração no arame *BD* sabendo que a intensidade do binário no engaste *C* não pode exceder 100 N · m.

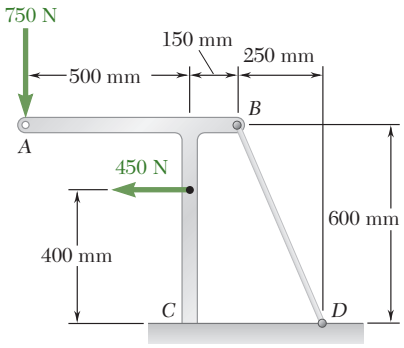


Figura P4.49 e P4.50

4.51 Uma carga vertical **P** é aplicada na extremidade *B* da barra *BC*. (*a*) Desprezando o peso da haste, determine o ângulo θ correspondente à posição de equilíbrio em termos de *P*, *l* e do contrapeso *W*. (*b*) Determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio se $P = 2W$.

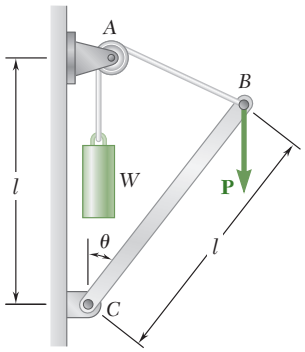


Figura P4.51

4.52 Uma haste delgada *AB* de peso *W* está ligada aos blocos *A* e *B*, que podem se mover livremente nas guias mostradas na figura. Os blocos estão interconectados por uma corda elástica que passa por uma polia em *C*. (*a*) Esboce a tração na corda em termos de *W* e θ. (*b*) Determine o valor de θ para o qual a tração na corda é igual a 3*W*.

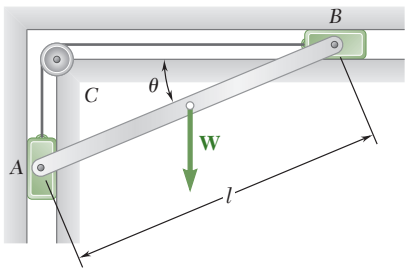


Figura P4.52

4.53 Sobre uma haste *AB* atuam um binário **M** e duas forças, cada qual de intensidade *P*. (*a*) Deduza uma equação em função de θ, *P*, *M* e *l*, a qual deve ser satisfeita quando a haste estiver em equilíbrio. (*b*) Determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio quando $M = 150$ N · m, $P = 200$ N e $l = 600$ mm.

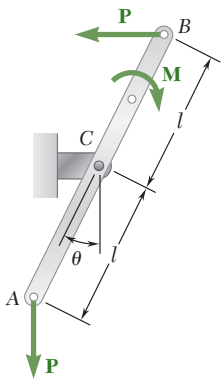


Figura P4.53

4.54 A haste *AB* é presa ao cursor em *A* e apoia sobre um pequeno rolete em *C*. (*a*) Desprezando o peso da barra *AB*, deduza um equação em função *P*, *Q*, *a*, *l* e θ a qual deve ser satisfeita quando a haste está em equilíbrio. (*b*) Determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio quando $P = 64$ N, $Q = 48$ N, $l = 500$ mm e $a = 125$ mm.

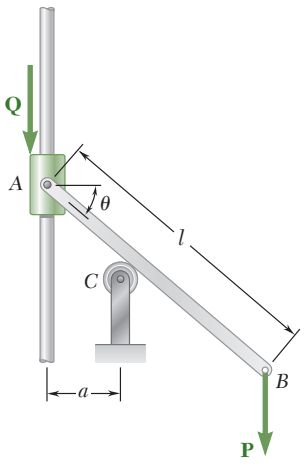


Figura P4.54

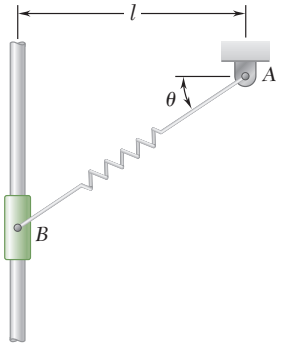


Figura *P4.55*

4.55 Um cursor B de peso W pode mover-se livremente ao longo da haste vertical mostrada na figura. A constante de mola é k, e a mola não fica deformada quando $\theta = 0$. (*a*) Deduza uma equação em função de θ, W, k e l que deve ser satisfeita quando o cursor estiver em equilíbrio. (*b*) Sabendo que $W = 300$ N, $l = 500$ mm e $k = 800$ N/m, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio.

4.56 Uma carga vertical **P** é aplicada na extremidade B de uma haste BC. A constante de mola é k, e a mola não fica deformada quando $\theta = 90°$. (*a*) Desprezando o peso da haste, expresse o ângulo θ correspondente ao equilíbrio em termos de P, k e l. (*b*) Determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio quando $P = \frac{1}{4}kl$.

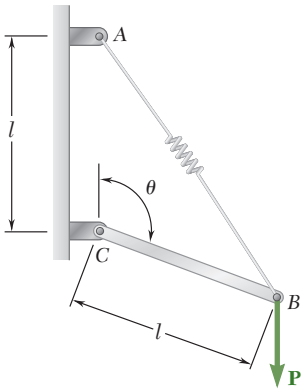


Figura *P4.56*

4.57 Resolva o Problema Resolvido 4.5, considerando que a mola não fica deformada quando $\theta = 90°$.

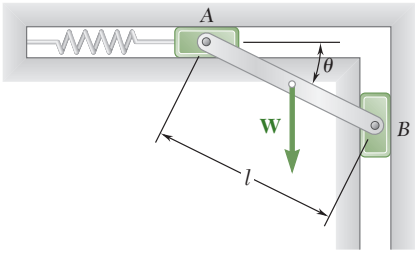


Figura P4.58

4.58 Uma haste delgada AB, de peso W, é presa aos blocos A e B, que se move livremente nas guias mostradas na figura. A constante da mola é k, e a mola não fica formada quando $\theta = 0$. (*a*) Desprezando o peso dos blocos, deduza uma equação em função de W, k, l e θ que deve ser satisfeita quando a haste estiver em equilíbrio. (*b*) Determine o valor de θ quando $W = 300$ N, $l = 750$ mm e $k = 0{,}5$ N/mm.

4.59 Oito placas retangulares idênticas de 500 × 750 mm, cada qual com massa $m = 40$ kg, são mantidas em um plano vertical como mostram as figuras. Todos os apoios consistem em pinos sem atrito, roletes ou hastes curtas. Para cada caso, determine se (*a*) a placa é completamente, parcialmente, ou impropriamente vinculada, (*b*) as reações são estaticamente determinadas ou indeterminadas, (*c*) o equilíbrio da placa é mantido nas posições mostradas. Também, se possível, calcule as reações.

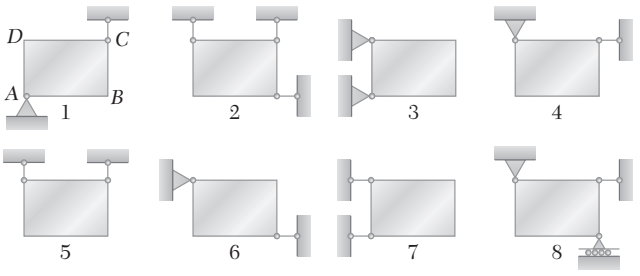


Figura P4.59

4.60 O suporte *ABC* pode ser apoiado das oito diferentes maneiras mostradas nas figuras. Todas as conexões consistem em pinos sem atrito, roletes ou hastes curtas. Em cada caso, responda às questões apresentadas no Problema 4.59 e, onde for possível, calcule as reações, considerando que a força **P** é 400 N.

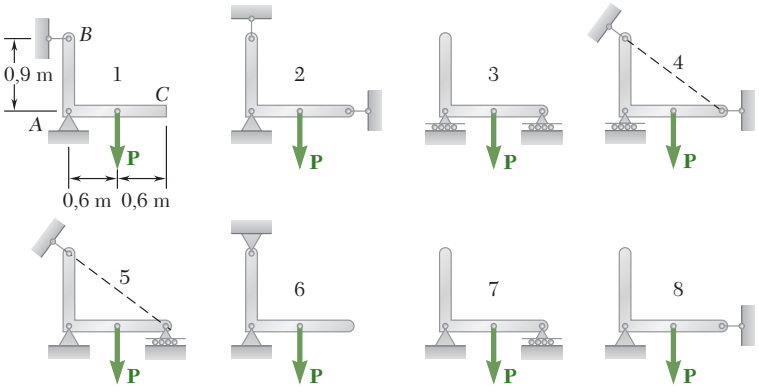


Figura *P4.60*

4.6 Equilíbrio de um corpo sujeito à ação de duas forças

Um caso particular de equilíbrio que merece atenção é o de um corpo rígido sujeito à ação de duas forças. Será mostrado que, *se um corpo sujeito à ação de duas forças está em equilíbrio, as duas forças devem ter igual intensidade, igual linha de ação e sentidos opostos.*

Considere uma cantoneira sujeita à ação de duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ aplicadas em *A* e *B*, respectivamente (Fig. 4.8*a*). Se essa placa estiver em equilíbrio, a soma dos momentos de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ em relação a qualquer eixo deve ser zero. Primeiro, somamos os momentos em relação a *A*. Como o momento de $\mathbf{F}_1$ é sem dúvida igual a zero, o momento de $\mathbf{F}_2$ deve também ser zero, e a linha de ação de $\mathbf{F}_2$ deve passar por *A* (Fig. 4.8*b*). Somando os momentos em relação a *B*, provamos de modo semelhante que a linha de ação de $\mathbf{F}_1$ deve passar por *B* (Fig. 4.8*c*). Portanto, ambas as forças têm a mesma linha de ação (linha *AB*). De qualquer uma das equações $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, vê-se que elas devem também ter igual intensidade, mas sentidos opostos.

Se várias forças forem aplicadas em dois pontos *A* e *B*, as forças aplicadas em *A* podem ser substituídas por sua resultante $\mathbf{F}_1$ e as em *B*, por sua resultante $\mathbf{F}_2$. Portanto, um corpo sujeito à ação de duas forças pode

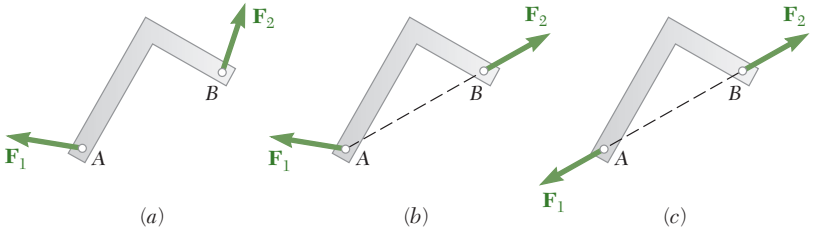


Figura 4.8

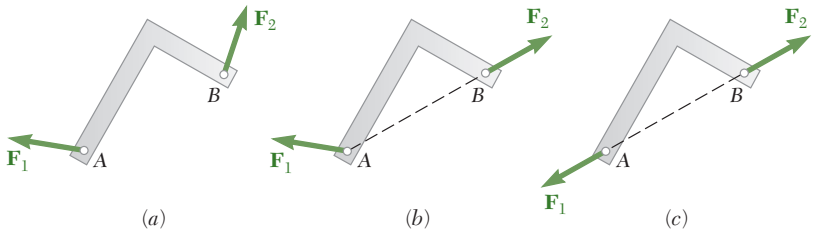


Figura 4.8 (*repetida*)

ser definido, de modo mais geral, como *um corpo rígido sujeito à ação de forças que atuam apenas em dois pontos.* As resultantes $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, portanto, devem ter igual linha de ação, igual intensidade e sentidos opostos (Fig. 4.8).

No estudo de estruturas e máquinas, você verá como a identificação de corpos sujeitos à ação de duas forças simplifica a solução de certos problemas.

4.7 Equilíbrio de um corpo sujeito à ação de três forças

Outro caso de equilíbrio de grande interesse é o de *um corpo rígido sujeito à ação de três forças,* ou, de modo mais amplo, *um corpo rígido sujeito à ação de forças aplicadas somente em três pontos.* Considere um corpo rígido sujeito à ação de um sistema de forças que pode ser reduzido a três forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ aplicadas nos pontos A, B e C, respectivamente (Fig. 4.9*a*). Será mostrado que, se o corpo estiver em equilíbrio, *as linhas de ação das três forças devem ser concorrentes ou paralelas.*

Como, o corpo rígido está em equilíbrio, a soma dos momentos de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ em relação a qualquer eixo deve ser zero. Supondo que as linhas de ação de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ se interceptam, e representando seu ponto de interseção por D, somamos os momentos em relação a D (Fig. 4.9*b*). Como os momentos de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ em relação a D são iguais a zero, o momento de $\mathbf{F}_3$ em relação a D deve também ser zero, e a linha de ação de $\mathbf{F}_3$ deve passar por D (Fig. 4.9*c*). Portanto, as três linhas de ação são concorrentes. A única exceção ocorre quando as linhas não se interceptam, isto é, as linhas de ação são paralelas.

Ainda que problemas relativos a corpos rígidos sujeitos à ação de três forças possam ser resolvidos pelos métodos gerais das Seções 4.3 a 4.5, a propriedade que acabamos de demonstrar pode ser utilizada para resolvê-los, grafica ou matematicamente, a partir de relações trigonométricas ou geométricas simples.

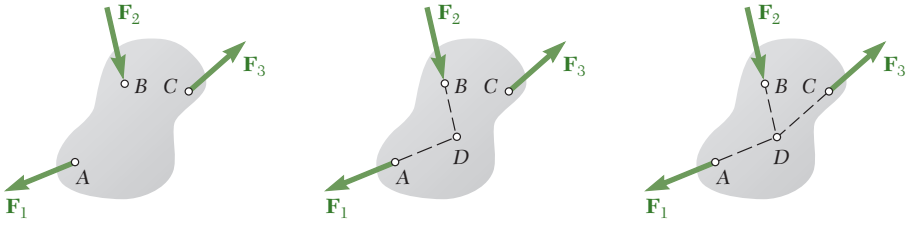
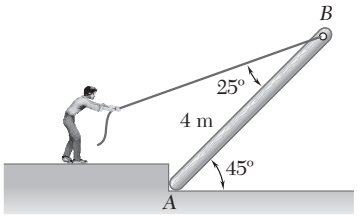


Figura 4.9



PROBLEMA RESOLVIDO 4.6

Um homem levanta uma viga de sustentação de 10 kg e 4 m de comprimento puxando-a com uma corda. Encontre a tração T na corda e a reação em A.

SOLUÇÃO

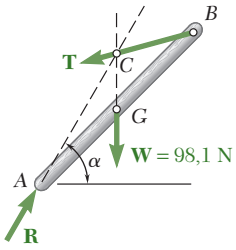
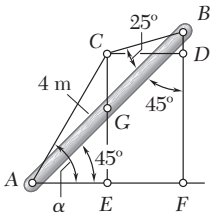


Diagrama de corpo livre. A viga de sustentação é um corpo rígido sujeito à ação de três forças, pois sobre ele atuam três forças: seu peso **W**, a força **T** exercida pela corda e a reação **R** do solo em A. Observamos que:

$$W = mg = (10\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2) = 98{,}1\text{ N}$$



Corpo sujeito à ação de três forças. Como a viga é um corpo sujeito à ação de três forças, as forças que atuam sobre ela deveriam ser concorrentes. A reação **R**, portanto, vai passar pelo ponto de interseção C das linhas de ação do peso **W** e da força de tração **T**. Esse fato será usado para determinar o ângulo α que **R** forma com a horizontal.

Traçando-se a vertical BF por B e a horizontal CD por C, observamos que:

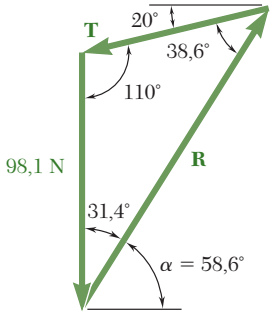
$$AF = BF = (AB)\cos 45° = (4\text{ m})\cos 45° = 2{,}828\text{ m}$$
$$CD = EF = AE = \tfrac{1}{2}(AF) = 1{,}414\text{ m}$$
$$BD = (CD)\operatorname{cotg}(45° + 25°) = (1{,}414\text{ m})\operatorname{tg} 20° = 0{,}515\text{ m}$$
$$CE = DF = BF - BD = 2{,}828\text{ m} - 0{,}515\text{ m} = 2{,}313\text{ m}$$

Temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2{,}313\text{ m}}{1{,}414\text{ m}} = 1{,}636$$

$$\alpha = 58{,}6° \blacktriangleleft$$

Agora sabemos a direção de todas as forças que atuam sobre a viga.



Triângulo de forças. Um triângulo de forças é desenhado tal como mostra a figura, e seus ângulos interiores são calculados a partir das direções conhecidas das forças. Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{T}{\operatorname{sen} 31{,}4°} = \frac{R}{\operatorname{sen} 110°} = \frac{98{,}1\text{ N}}{\operatorname{sen} 38{,}6°}$$

$$T = 81{,}9\text{ N} \blacktriangleleft$$

$$R = 147{,}8\text{ N} \measuredangle 58{,}6° \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

As seções precedentes abordaram dois casos particulares de equilíbrio de um corpo rígido.

1. Um corpo sujeito à ação de duas forças é um corpo sujeito à ação de forças em apenas dois pontos. As resultantes das forças aplicadas em cada um desses pontos devem ter *igual intensidade, igual linha de ação e sentidos opostos.* Essa propriedade nos permitirá simplificar as soluções de alguns problemas substituindo os dois componentes desconhecidos da reação por uma única força de intensidade desconhecida, mas de *direção conhecida.*

2. Um corpo sujeito à ação de três forças é um corpo sujeito à ação de forças em apenas três pontos. As resultantes das forças aplicadas em cada um desses pontos devem ser *concorrentes ou paralelas.* Para resolver um problema envolvendo um corpo sujeito à ação de três forças com forças concorrentes, desenhamos seu diagrama de corpo livre mostrando que as linhas de ação dessas três forças passam pelo mesmo ponto. O uso da geometria básica talvez nos auxilie a completar a solução usando um triângulo de forças [Problema Resolvido 4.6].

Embora o princípio indicado anteriormente para a solução de problemas que envolvam corpos sujeitos à ação de três forças seja facilmente entendido, pode ser difícil determinar os esquemas geométricos necessários. Se encontrarmos dificuldade, primeiro desenhemos um diagrama de corpo livre razoavelmente grande e, então, procuremos uma relação entre comprimentos conhecidos, ou facilmente calculáveis, e uma dimensão que envolva uma incógnita. Isso foi feito no Problema Resolvido 4.6, cujas dimensões AE e CE, facilmente calculáveis, foram utilizadas para determinar o ângulo α.

PROBLEMAS

4.61 Determine as reações em A e B quando $a = 180$ mm.

4.62 Para o suporte e carregamento mostrados na figura, determine o intervalo de valores da distância a para que a intensidade da reação em B não exceda a 600 N.

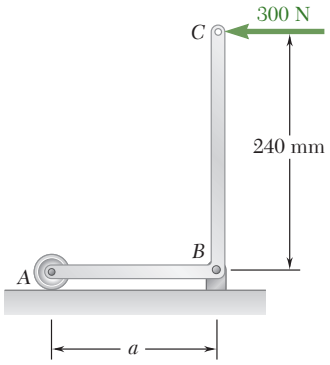


Figura P4.61 e P4.62

4.63 Usando o método da Seção 4.7, resolva o Problema 4.17.

4.64 Usando o método da Seção 4.7, resolva o Problema 4.18.

4.65 A chave mostrada na figura é usada para girar o eixo. Um pino é fixado no furo em A, enquanto noutro ponto, sem atrito, apoia sobre o eixo em B. Se a força **P** de 240 N é exercida na chave em D, encontre as reações em A e B.

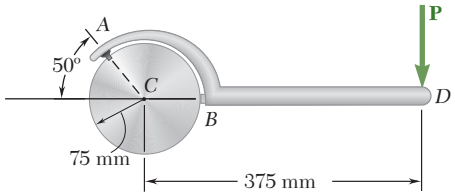


Figura P4.65

4.66 Determine as reações em B e D quando $b = 60$ mm.

4.67 Determine as reações em B e D quando $b = 120$ mm.

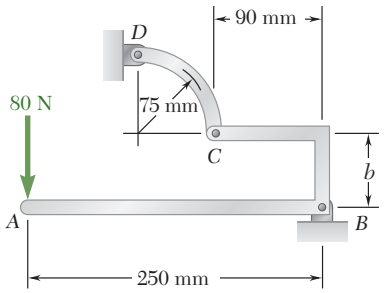


Figura P4.66 e P4.67

4.68 Determine as reações em B e C quando $a = 38$ mm.

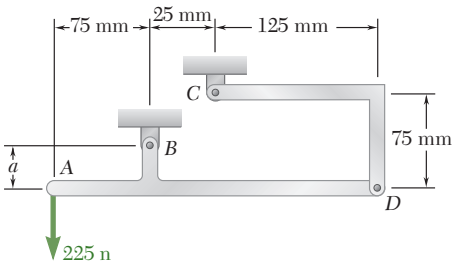


Figura P4.68

4.69 Um caixote de 50 kg é preso a uma viga de rolamento mostrado na figura. Sabendo que $a = 1{,}5$ m, determine (a) a tração no cabo CD, (b) a reação em B.

4.70 Resolva o Problema 4.69, considerando $a = 3$ m.

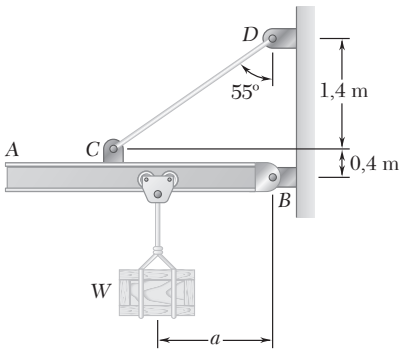


Figura P4.69

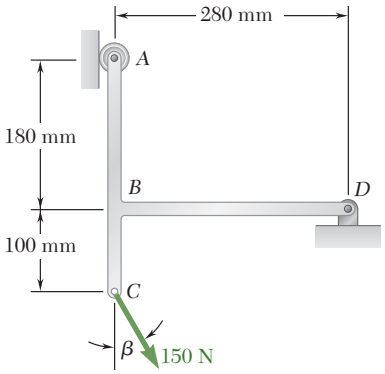


Figura *P4.72 e P4.73*

4.71 A extremidade de uma haste *AB* apoia no canto *A* e a outra extremidade é presa na corda *BD*. Se a haste suporta uma carga de 160 N no ponto médio *C*, encontre a reação em *A* e a tração da corda.

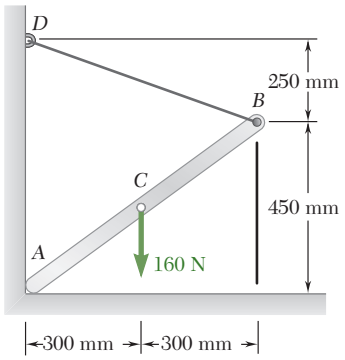


Figura P4.71

4.72 Determine as reações em *A* e *D* quando $\beta = 30°$.

4.73 Determine as reações em *A* e *D* quando $\beta = 60°$.

4.74 Um rolete de 160 N e 200 mm de diâmetro, para ser usado em um piso de cerâmica, está apoiado diretamente sobre a base abaixo do piso, tal como mostra a figura. Sabendo que a espessura de cada ladrilho é 8 mm, determine a força **P** necessária para se mover o rolete sobre os ladrilhos, sabendo-se que o rolete é (*a*) empurrado para a esquerda, (*b*) empurrado para a direita.

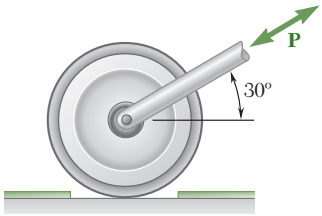


Figura P4.74

4.75 e 4.76 O elemento *ABC* é sustentado por um pino e um suporte em *B* e por uma corda inextensível presa em *A* e *C*, passando por uma polia sem atrito em *D*. Pode-se supor que a tração seja a mesma na porção *AD* e *CD* da corda. Para o carregamento mostrado na figura e desprezando o tamanho da polia, determine a tração na corda e a reação em *B*.

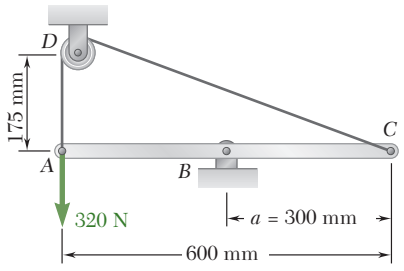


Figura P4.75

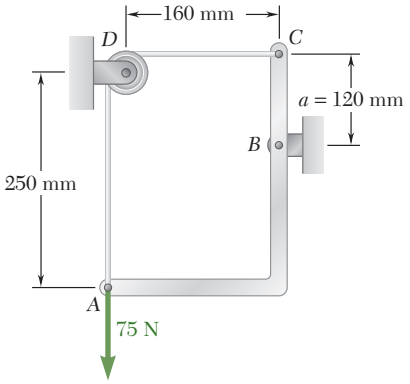


Figura *P4.76*

4.77 A haste AB é suportada por um pino e um suporte em A e apoia sem atrito numa cavilha em C. Determine as reações em A e C quando a força vertical de 170 N é aplicada em B.

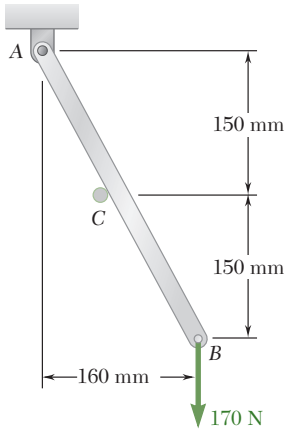


Figura P4.77

4.78 Resolva o Problema 4.77, considerando que a força de 170 N aplicada em B é horizontal e direcionada para a esquerda.

4.79 Usando o método da Seção 4.7, resolva o Problema 4.21.

4.80 Usando o método da Seção 4.7, resolva o Problema 4.28.

4.81 Sabendo que $\theta = 30°$, determine as reações (a) em B, (b) em C.

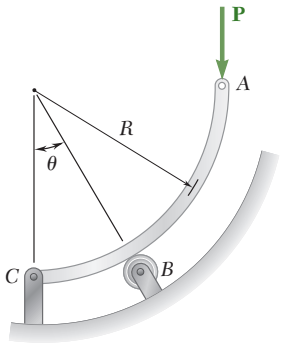


Figura P4.81 e P4.82

4.82 Sabendo que $\theta = 60°$, determine as reações (a) em B, (b) em C.

4.83 A haste AB está curvada no formato de um arco de círculo e alojada entre dois pinos D e E. A haste sustenta uma carga **P** na extremidade B. Desprezando o atrito e o peso da haste, determine a distância c correspondente à condição de equilíbrio quando $a = 20$ mm e $R = 100$ mm.

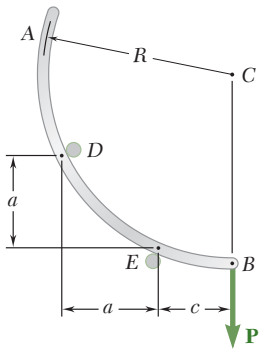


Figura P4.83

4.84 Uma haste delgada de comprimento L é presa a cursores que podem deslizar livremente ao longo das guias mostradas na figura. Sabendo que a haste está em equilíbrio, deduza uma expressão para o ângulo θ em termos do ângulo β.

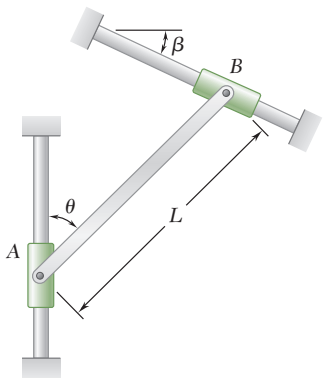


Figura P4.84 e P4.85

4.85 Uma haste delgada de massa 8 kg e comprimento L é presa a cursores que podem deslizar livremente ao longo das guias mostradas nas figuras. Sabendo que a haste está em equilíbrio e que $\beta = 30°$, determine (a) o ângulo θ que a haste forma com a vertical, (b) as reações em A e B.

4.86 Uma haste delgada de comprimento L é mantida em equilíbrio, tal como mostra a figura, com uma extremidade contra uma parede sem atrito e a outra presa a uma corda de comprimento S. Deduza uma expressão para a distância h em termos de L e S. Mostre que essa posição de equilíbrio não existe se $S > 2L$.

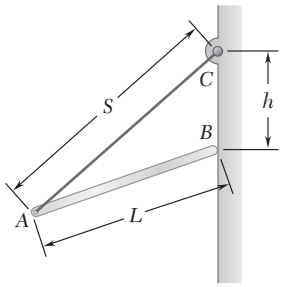


Figura P4.86 e P4.87

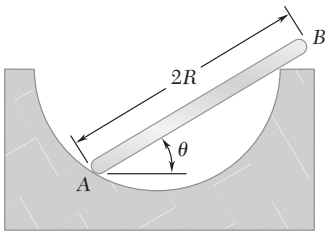


Figura P4.88

4.87 Uma haste delgada de comprimento $L = 500$ mm é mantida em equilíbrio, tal como mostra a figura, com uma extremidade contra uma parede sem atrito e a outra presa a uma corda de comprimento $S = 750$ mm. Sabendo que o peso da haste é 40 N, determine (*a*) a distância h, (*b*) a tração na corda, (c) a reação em B.

4.88 Uma haste uniforme AB de comprimento $2R$ está apoiada dentro de um recipiente semiesférico de raio R tal como mostra a figura. Desprezando o atrito, determine o ângulo θ correspondente à condição de equilíbrio.

4.89 A haste delgada de comprimento L e peso W é presa a um cursor em A e equipada com uma pequena roda em B. Sabendo que a roda desliza livremente ao longo da superfície cilíndrica de raio R e desprezando o atrito, deduza uma equação com θ, L e R que deve ser satisfeita quando a haste estiver em equilíbrio.

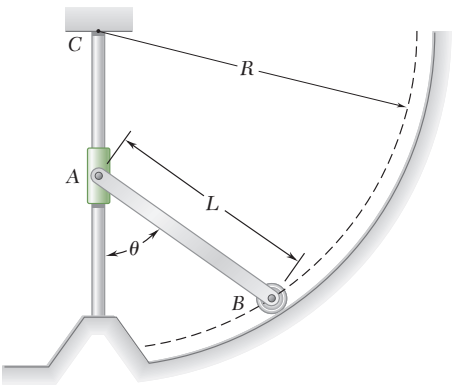


Figura P4.89

4.90 Sabendo que para a haste do Problema 4.89, $L = 375$ mm, $R = 500$ mm, e $W = 45$ N, determine (*a*) o ângulo θ correspondente ao equilíbrio, (*b*) as reações em A e B.

EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

4.8 Equilíbrio de um corpo rígido em três dimensões

Vimos na Seção 4.1 que são necessárias seis equações escalares para demonstrar as condições de equilíbrio de um corpo rígido no caso geral tridimensional.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$
$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Essas equações podem ser resolvidas para no máximo *seis incógnitas*, que geralmente representam reações em apoios ou conexões.

Na maior parte dos problemas, as equações escalares (4.2) e (4.3) serão obtidas de modo mais conveniente se expressarmos, inicialmente, as condições para o equilíbrio do corpo rígido na forma vetorial. Temos

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

e indicamos as forças **F** e os vetores posição **r** em termos de componentes escalares e vetores unitários. Em seguida, calculamos todos os produtos vetoriais, seja por cálculo direto, seja por meio de determinantes (ver Seção 3.8). Observamos que até três componentes da reação desconhecidos podem ser eliminados desses cálculos por uma escolha criteriosa do ponto *O*. Igualando a zero os coeficientes dos vetores unitários em cada uma das duas relações (4.1), obtemos as equações escalares desejadas.*

4.9 Reações em apoios e conexões para um estrutura tridimensional

As reações em uma estrutura tridimensional abrangem desde a força única de direção conhecida, exercida por uma superfície sem atrito, ao sistema força-binário, exercido por um engaste. Consequentemente, em problemas envolvendo o equilíbrio de uma estrutura tridimensional, pode haver de uma a seis incógnitas associadas às reações em cada apoio ou conexão. A figura 4.10 mostra os vários tipos de apoios e conexões com suas reações correspondentes. Uma maneira simples de se determinar o tipo de reação correspondente a um dado apoio ou conexão e o número de incógnitas envolvidas é descobrir quais dos seis movimentos fundamentais (translação nas direções x, y e z, rotação em torno dos eixos x, y e z) são permitidos e quais movimentos são impedidos.

* Em alguns problemas, poderemos achar conveniente eliminar as reações em dois pontos *A* e *B* da solução escrevendo a equação de equilíbrio $\Sigma M_{AB} = 0$, que envolve a determinação dos momentos das forças em relação ao eixo *AB* que une os pontos *A* e *B* (ver o Problema Resolvido 4.10).

Foto 4.6 Juntas universais, comumente encontradas nos eixos de direção de carros e caminhões de tração traseira, possibilitam que o movimento de rotação seja transferido entre dois eixos não colineares.

Apoios de esferas, superfícies sem atrito e cabos, por exemplo, impedem a translação em uma direção apenas e, portanto, exercem uma força única cuja linha de ação é conhecida; cada um desses apoios envolve uma incógnita, a saber, a intensidade da reação. Roletes sobre superfícies rugosas e rodas sobre trilhos impedem a translação em duas direções e suas reações correspondentes consistem em dois componentes de força desconhecidos. Superfícies rugosas em contato direto e apoios do tipo rótula impedem a translação em três direções; esses apoios envolvem três componentes de força desconhecidos.

Alguns apoios e conexões podem impedir tanto a rotação como a translação; já as reações correspondentes incluem tanto binários como forças. Por exemplo, a reação em um engaste, que impede qualquer movimento (tanto rotação quanto translação), consiste em três forças desconhecidas e três binários desconhecidos. Uma junta universal, que é projetada para possibilitar rotação em torno de dois eixos, exercerá uma reação constituída de três componentes de força desconhecidos e um binário desconhecido.

Outros apoios e conexões são projetados principalmente para impedir a translação; seu projeto, no entanto, é tal que eles também impedem algumas rotações. As reações correspondentes consistem essencialmente em componentes de força, mas *podem* também incluir binários. Um grupo de apoios desse tipo inclui articulações e mancais projetados para sustentar somente cargas radiais (por exemplo, mancais de deslizamentos, mancais de rolamento). As reações correspondentes consistem em dois componentes de força, mas também podem incluir dois binários. Outro grupo inclui apoios do tipo pino e suporte, articulações e mancais, projetados para sustentar tanto um empuxo axial como uma carga radial (por exemplo, mancais de esferas). As reações correspondentes consistem em três componentes de força, mas também podem incluir dois binários. Entretanto, esses apoios não exercerão quaisquer binários apreciáveis em condições normais de uso. Portanto, *somente* componentes de força devem ser incluídos em suas análises, a não ser que se verifique a necessidade de binários para se manter o equilíbrio do corpo rígido, ou a não ser que o apoio tiver sido projetado especificamente para exercer um binário (ver Problemas 4.119 a 4.122).

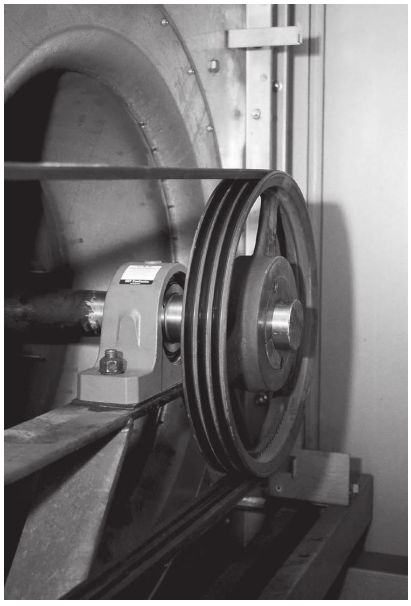


Figura 4.7 O mancal de rolamento mostrado suporta o eixo de um ventilador usado em uma aplicação industrial.

Se as reações envolvem mais de seis incógnitas, há mais incógnitas que equações, e algumas das reações são *estaticamente indeterminadas.* Se as reações envolvem menos de seis incógnitas, há mais equações do que incógnitas, e algumas das equações de equilíbrio não podem ser satisfeitas em condições gerais de carregamento; o corpo rígido só está *parcialmente vinculado.* No entanto, nas condições de carregamento particulares que correspondem a um dado problema, as equações extras frequentemente se reduzem a identidades triviais, como $0 = 0$, e podem ser desconsideradas; embora esteja apenas parcialmente vinculado, o corpo rígido permanece em equilíbrio (ver Problemas Resolvidos 4.7 e 4.8). Mesmo com seis ou mais incógnitas, é possível que algumas equações de equilíbrio não sejam satisfeitas. Isso pode ocorrer quando as reações associadas aos apoios ou são paralelas ou interceptam a mesma linha; o corpo rígido está, então, *impropriamente vinculado.*

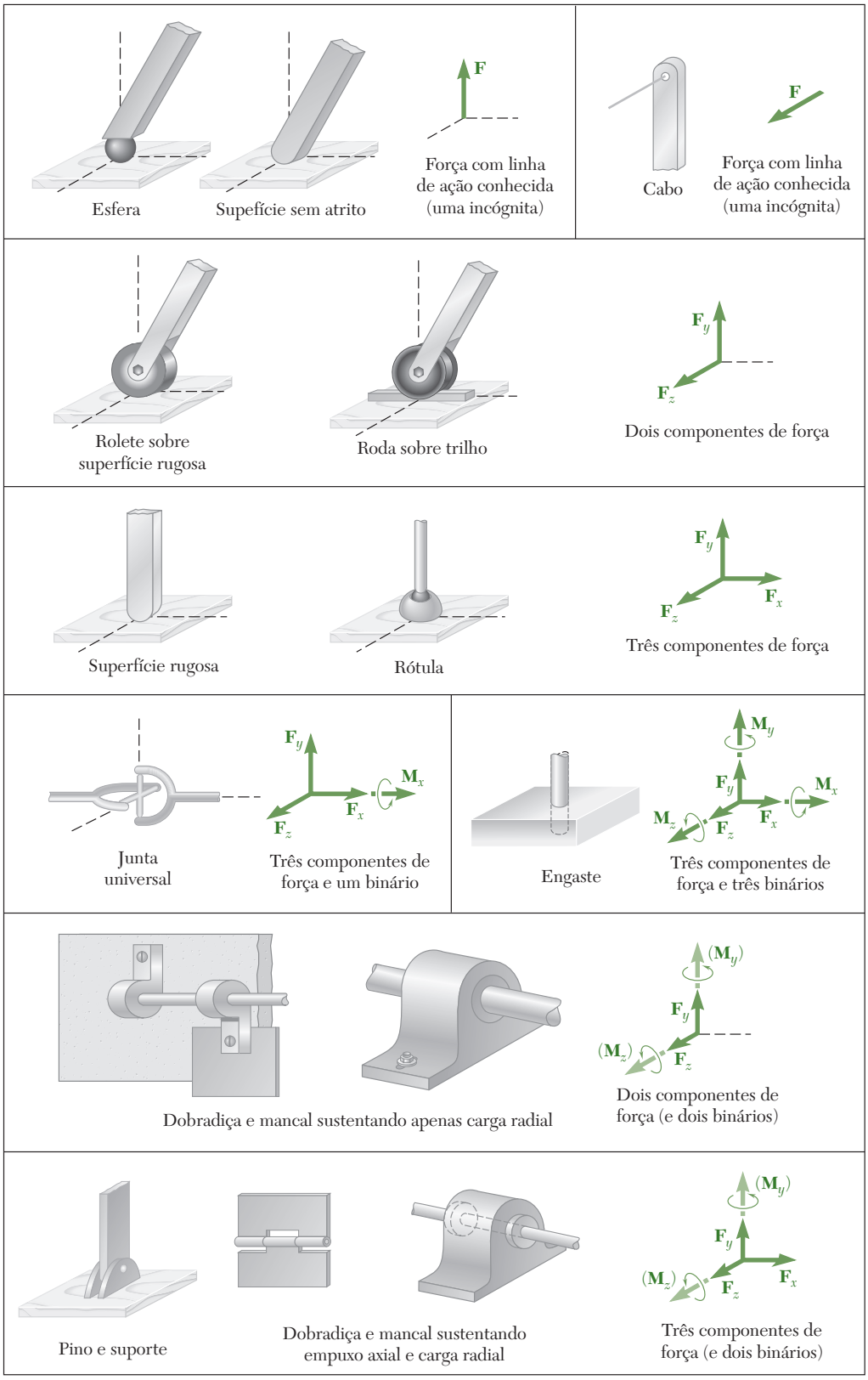
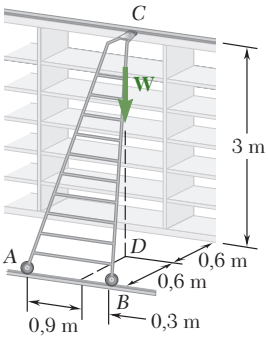
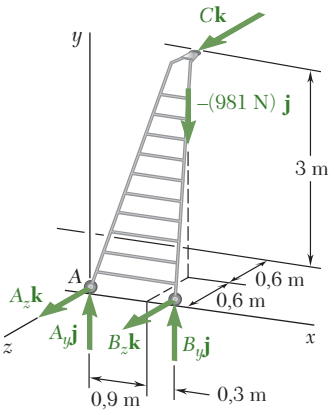


Figura 4.10 Reações em apoios e conexões.



PROBLEMA RESOLVIDO 4.7

Uma escada de 20 kg é usada para alcançar as prateleiras altas em um depósito e está apoiada por duas rodas flangeadas[1] A e B montadas sobre um trilho e por uma roda C sem flange apoiada sobre um trilho fixado à parede. Um homem de 80 kg está em pé sobre a escada e inclina-se para a direita. A linha de ação do peso combinado **W** do homem e da escada intercepta o piso no ponto D. Determine as reações em A, B e C.



SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Traça-se um diagrama de corpo livre da escada. As forças envolvidas são o peso combinado do homem e da escada

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(80\text{ kg} + 20\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(981\text{ N})\mathbf{j}$$

e cinco componentes de reações deconhecidos, dois em cada roda com flange e um na roda sem flange. A escada está então apenas parcialmente vinculada; ela está livre para rolar ao longo dos trilhos. No entanto, a escada está em equilíbrio sob a carga dada, pois a equação $\Sigma\mathbf{F}_x = 0$ está satisfeita.

Equação de equilíbrio. Expressamos que as forças que atuam na escada formam um sistema equivalente a zero:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \quad A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} - (981\text{ N})\mathbf{j} + C\mathbf{k} = 0$$
$$(A_y + B_y - 981\text{ N})\mathbf{j} + (A_z + B_z + C)\mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = 0: \quad 1{,}2\mathbf{i}\times(B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) + (0{,}9\mathbf{i} - 0{,}6\mathbf{k})\times(-981\mathbf{j})$$
$$+ (0{,}6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 1{,}2\mathbf{k})\times C\mathbf{k} = 0$$

Calculando o produto vetorial, temos:*

$$1{,}2B_y\mathbf{k} - 1{,}2B_z\mathbf{j} - 882{,}9\mathbf{k} - 588{,}6\mathbf{i} - 0{,}6C\mathbf{j} + 3C\mathbf{i} = 0$$
$$(3C - 588{,}6)\mathbf{i} - (1{,}2B_z + 0{,}6C)\mathbf{j} + (1{,}2B_y - 882{,}9)\mathbf{k} = 0 \qquad (2)$$

Estabelecendo os coeficientes de **i**, **j**, **k** iguais a zero na Eq.(2), obtemos as três equações escalares a seguir, que expressam que a soma dos momentos em relação a cada eixo coordenado deve ser zero:

$$3C - 588{,}6 = 0 \qquad C = +196{,}2\text{ N}$$
$$1{,}2B_z + 0{,}6C = 0 \qquad B_z = -98{,}1\text{ N}$$
$$1{,}2B_y - 882{,}9 = 0 \qquad B_y = +736\text{ N}$$

As reações em B e C são, portanto:

$$\mathbf{B} = +(736\text{ N})\mathbf{j} - (98{,}1\text{ N})\mathbf{k} \qquad \mathbf{C} = +(196{,}2\text{ N})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

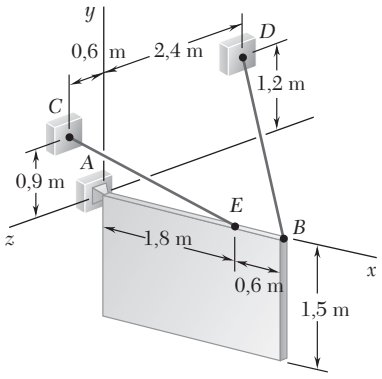
Tornando os coeficientes de **j** e **k** iguais a zero na Eq. (1), obtemos duas equações escalares demonstrando que as somas dos componentes nas direções y e z são iguais a zero. Substituindo B_y, B_z e C pelos valores obtidos acima, temos

$$A_y + B_y - 981 = 0 \qquad A_y + 736 - 981 = 0 \qquad A_y = +245\text{ N}$$
$$A_z + B_z + C = 0 \qquad A_z - 98{,}1 + 196{,}2 = 0 \qquad A_z = -98{,}1\text{ N}$$

Concluímos que a reação em A é $\mathbf{A} = +(245\text{ N})\mathbf{j} - (98{,}1\text{ N})\mathbf{k}$ ◀

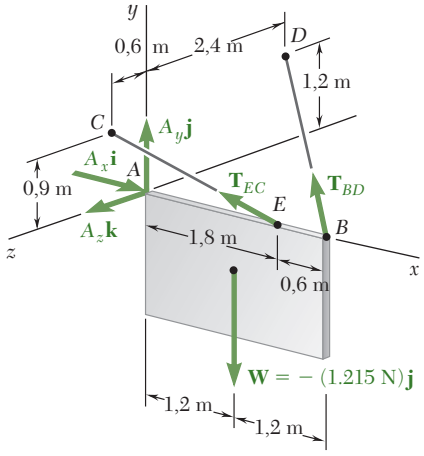
[1] N. de T. *flange*: aro ou calor exterior que se projeta para fora de uma roda, para mantê-la em posição, por exemplo, em relação a um trilho.

* Os momentos neste Problema Resolvido e nos Problemas Resolvidos 4.8 e 4.9 podem também ser expressos em forma de determinantes (ver Problema Resolvido 3.10).



PROBLEMA RESOLVIDO 4.8

Uma placa de 1,5 × 2,4 m de massa específica uniforme pesa 1.215 N e é sustentada por uma rótula em *A* e por dois cabos. Determine a tração em cada cabo e a reação em *A*.



SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Traça-se um diagrama de corpo livre da placa. As forças exercidas no corpo livre são o peso $\mathbf{W} = -(1.215\ \text{N})\mathbf{j}$ e as reações em *A*, *B* e *E*. A reação em *A* é uma força de direção desconhecida e é representada por três componentes desconhecidos. Como as direções das forças exercidas pelos cabos são conhecidas, essas forças envolvem apenas uma incógnita cada, a saber, as intensidades T_{BD} e T_{EC}. Como há apenas cinco incógnitas, a placa está parcialmente vinculada. A placa pode girar livremente em torno do eixo *x*; ela está, no entanto, em equilíbrio sob o carregamento dado, pois a equação $\Sigma\mathbf{M}_x = 0$ está satisfeita.

Os componentes das forças $\mathbf{T}_{BD}$ e $\mathbf{T}_{EC}$ podem ser expressos em termos das intensidades desconhecidas T_{BD} e T_{EC} da seguinte maneira

$$\overrightarrow{BD} = -(2{,}4\ \text{m})\mathbf{i} + (1{,}2\ \text{m})\mathbf{j} - (2{,}4\ \text{m})\mathbf{k} \qquad BD = 3{,}6\ \text{m}$$
$$\overrightarrow{EC} = -(1{,}8\ \text{m})\mathbf{i} + (0{,}9\ \text{m})\mathbf{j} + (0{,}6\ \text{m})\mathbf{k} \qquad EC = 2{,}1\ \text{m}$$
$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD}\left(\frac{\overrightarrow{BD}}{BD}\right) = T_{BD}(-\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k})$$
$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC}\left(\frac{\overrightarrow{EC}}{EC}\right) = T_{EC}(-\tfrac{6}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} - \tfrac{2}{7}\mathbf{k})$$

Equações de equilíbrio. Indicamos que as forças atuantes sobre a placa formam um sistema equivalente a zero:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \quad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (1.215\ \text{N})\mathbf{j} = 0$$
$$(A_x - \tfrac{2}{3}T_{BD} - \tfrac{6}{7}T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + \tfrac{1}{3}T_{BD} + \tfrac{3}{7}T_{EC} - 1.215\ \text{N})\mathbf{j} + (A_z - \tfrac{2}{3}T_{BD} + \tfrac{2}{7}T_{EC})\mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$

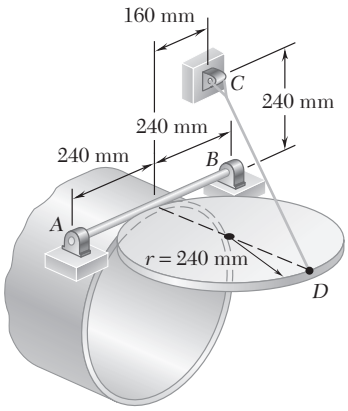
$$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$
$$(2{,}4\ \text{m})\mathbf{i} \times T_{BD}(-\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}) + (1{,}8\ \text{m})\mathbf{i} \times T_{EC}(-\tfrac{6}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{2}{7}\mathbf{k}) + (1{,}2\ \text{m})\mathbf{i} \times (-1.215\ \text{N})\mathbf{j} = 0$$
$$(0{,}8T_{BD} + 0{,}771T_{EC} - 1.458\ \text{N})\mathbf{k} + (1{,}6T_{BD} - 0{,}514T_{EC})\mathbf{j} = 0 \qquad (2)$$

Tornamos os coeficientes de **j** e **k** iguais a zero na Eq. (2), obtemos duas equações escalares que podem ser resolvidas para T_{BD} e T_{EC}:

$$T_{BD} = 455{,}9\ \text{N} \qquad T_{EC} = 1.417{,}5\ \text{N} \quad \blacktriangleleft$$

Estabelecendo os coeficientes de **i**, **j**, **k** iguais a zero na Eq. (1), obtemos mais três equações, que nos possibilitam calcular os componentes de *A*. Temos:

$$\mathbf{A} = +(1.521\ \text{N})\mathbf{i} + (455{,}4\ \text{N})\mathbf{j} - (101{,}25\ \text{N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 4.9

Uma tampa de tubulação de raio r = 240 mm e 30 kg de massa é mantida na posição horizontal pelo cabo *CD*. Considerando que o mancal em *B* não exerce qualquer empuxo axial, determine a tração no cabo e as reações em *A* e *B*.

SOLUÇÃO

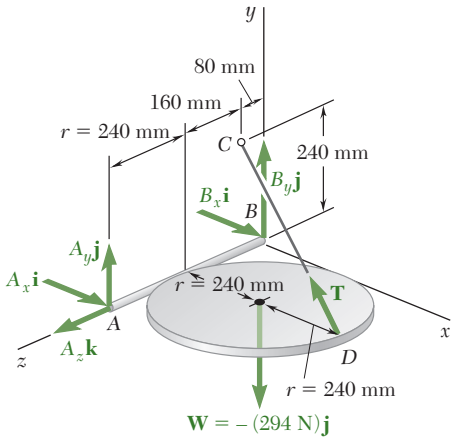


Diagrama de corpo livre. Um diagrama de corpo livre é desenhado com os eixos coordenados mostrados na figura. As forças que atuam no corpo livre são o peso da tampa

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(30\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(294\text{ N})\mathbf{j}$$

e as relações que envolvem seis incógnitas, a saber, a intensidade da força **T** exercida pelo cabo, três componentes da força na articulação *A* e dois na articulação *B*. Os componentes **T** são expressos em termos de intensidade desconhecida *T* decompondo-se o vetor $\overrightarrow{DC}$ em componentes retangulares, da seguinte maneira

$$\overrightarrow{DC} = -(480\text{ mm})\mathbf{i} + (240\text{ mm})\mathbf{j} - (160\text{ mm})\mathbf{k} \qquad DC = 560\text{ mm}$$

$$\mathbf{T} = T\frac{\overrightarrow{DC}}{DC} = -\tfrac{6}{7}T\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}T\mathbf{j} - \tfrac{2}{7}T\mathbf{k}$$

Equação de equilíbrio. Demonstramos que as forças exercidas na tampa de tubulação formam um sistema equivalente a zero:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + \mathbf{T} - (294\text{ N})\mathbf{j} = 0$$
$$(A_x + B_x - \tfrac{6}{7}T)\mathbf{i} + (A_y + B_y + \tfrac{3}{7}T - 294\text{ N})\mathbf{j} + (A_z - \tfrac{2}{7}T)\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma\mathbf{M}_B = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = 0:$$
$$2r\mathbf{k}\times(A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (2r\mathbf{i} + r\mathbf{k})\times(-\tfrac{6}{7}T\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}T\mathbf{j} - \tfrac{2}{7}T\mathbf{k}) + (r\mathbf{i} + r\mathbf{k})\times(-294\text{ N})\mathbf{j} = 0$$
$$(-2A_y - \tfrac{3}{7}T + 294\text{ N})r\mathbf{i} + (2A_x - \tfrac{2}{7}T)r\mathbf{j} + (\tfrac{6}{7}T - 294\text{ N})r\mathbf{k} = 0 \quad (2)$$

Tornando os coeficientes dos vetores unitários iguais a zero na Eq. (2) obtemos três equações escalares, que resultam em

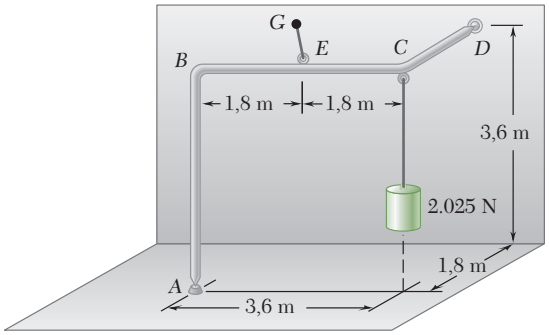
$$A_x = +49{,}0\text{ N} \qquad A_y = +73{,}5\text{ N} \qquad T = 343\text{ N}$$

Estabelecendo os coeficientes dos vetores unitários iguais a zero na Eq. (1), obtemos mais três equações escalares. Depois de substituir os valores de *T*, A_x e A_y nessas equações, obtemos:

$$A_z = +98{,}0\text{ N} \qquad B_x = +245\text{ N} \qquad B_y = +73{,}5\text{ N}$$

As reações *A* e *B* são, portanto:

$$\mathbf{A} = +(49{,}0\text{ N})\mathbf{i} + (73{,}5\text{ N})\mathbf{j} + (98{,}0\text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$
$$\mathbf{B} = +(245\text{ N})\mathbf{i} + (73{,}5\text{ N})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

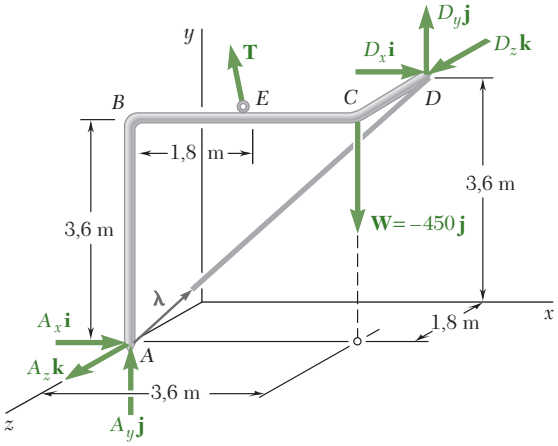


PROBLEMA RESOLVIDO 4.10

Uma carga de 12.025 N está suspensa no canto *C* de uma tabulação rígida *ABCD* que foi dobrada, tal como mostra a figura. A tubulação é sustentada pelas rótulas *A* e *D*, que estão presas, respectivamente, no solo e em uma parede vertical, e por um cabo que liga o ponto médio *E* da porção *BC* da tubulação e o ponto *G* na parede. Determine (*a*) onde *G* deverá estar localizado se a tração no cabo tiver de ser mímina, (*b*) o valor mínimo correspondente a essa tração.

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. O diagrama de corpo livre da tubulação inclui a carga $\mathbf{W} = (-2.025\ \text{N})\mathbf{j}$, as relações em *A* e *D* e a força **T** exercida pelo cabo. Para eliminar as reações em *A* e *D* dos cálculos, escrevemos que a soma dos momentos das forças em relação a *AD* é zero. Representado por $\boldsymbol{\lambda}$ o vetor unitário do longo de *AD*, temos:



$$\Sigma M_{AD} = 0: \qquad \boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = 0 \qquad (1)$$

O segundo termo da Eq. (1) pode ser calculado como se segue:

$$\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W} = (3{,}6\mathbf{i} + 3{,}6\mathbf{j}) \times (-2.025\mathbf{j}) = -7.290\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \frac{3{,}6\mathbf{i} + 3{,}6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{5{,}4} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = (\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}) \cdot (-7.290\mathbf{k}) = +2.430$$

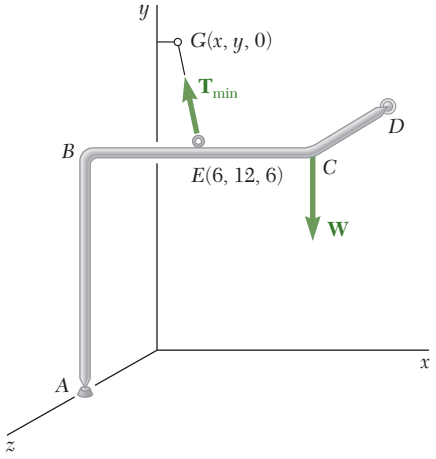
Substituindo o valor obtido na Eq. (1), temos:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) = -2.430\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad (2)$$

Valor mínimo da tração. Recordando a propriedade comutativa para produtos tripos mistos, reescrevemos a Eq. (2) na forma

$$\mathbf{T} \cdot (\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE}) = -2.430\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad (3)$$

que mostra a projeção de **T** sobre o vetor $\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE}$ uma constante. Segue-se que **T** é mínimo quando for paralelo ao vetor:



$$\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE} = (\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}) \times (1{,}8\mathbf{i} + 3{,}6\mathbf{j}) = 1{,}2\mathbf{i} - 0{,}6\mathbf{j} + 1{,}2\mathbf{k}$$

Como o vetor unitário correspondente é $\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, temos:

$$\mathbf{T}_{\text{mín.}} = T(\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}\mathbf{k}) \qquad (4)$$

Substituindo por **T** e $\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE}$ na Eq. (3) e calculando os produtos escalares, obtemos $1{,}8T = -2.430$ e, portanto, $T = -1.350$. Transferindo esse valor para (4), obtemos:

$$\mathbf{T}_{\text{mín.}} = -900\mathbf{i} + 450\mathbf{j} - 900\mathbf{k} \qquad T_{\text{mín.}} = 1.350\ \text{N} \blacktriangleleft$$

Localização de G. Como o vetor $\overrightarrow{EG}$ e a força $\mathbf{T}_{\text{mín.}}$ têm a mesma direção, seus componentes devem ser proporcionais. Representado as coordenadas de *G* por *x*, *y*, *O*, temos:

$$\frac{x - 6}{-900} = \frac{y - 12}{+450} = \frac{0 - 6}{-900} \qquad x = 0 \qquad y = 4{,}5\ \text{m} \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O equilíbrio de um *corpo tridimensional* foi tratado nas seções que acabamos de ler. Novamente, é mais importante que, como primeiro passo da solução, tracemos um *diagrama de corpo livre* completo.

1. À medida que desenhar o diagrama de corpo livre, dê atenção especial às reações nos apoios. O número de incógnitas em um apoio pode variar de uma a seis (Fig. 4.10). Para decidir se uma reação desconhecida ou um componente de reação existe no apoio, perguntemos a nós mesmos se o apoio impede o movimento do corpo em uma certa direção ou em torno de um certo eixo.

a. Se o movimento é impedido em uma certa direção, incluamos no diagrama de corpo livre uma reação desconhecida ou um *componente de reação* que atue na *mesma direção*.

b. Se o apoio impede rotação em torno de um certo eixo, incluamos no diagrama de corpo livre um *binário* de intensidade desconhecida que atue sobre o *mesmo eixo*.

2. As forças externas que atuam em um corpo tridimensional formam um sistema equivalente a zero. Escrevendo $\Sigma\mathbf{F} = 0$ e $\Sigma\mathbf{M}_A = 0$ sobre um ponto apropriado A e igualando os coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ em ambas as equações iguais a zero, obtêm-se seis equações escalares. Em geral, essas equações vão conter seis incógnitas e podem ser resolvidas para essas incógnitas.

3. Após completar o diagrama de corpo livre, é conveniente procurarmos equações que envolvam o menor número possível de incógnitas. Essas estratégias podem nos ser úteis:

a. Somando os momentos em relação a uma rótula ou uma articulação, obtermos equações nas quais três componentes de reações desconhecidas foram eliminados [Problemas Resolvidos 4.8 e 4.9].

b. Se for possível traçar um eixo que passe pelos pontos de aplicação de todas as reações desconhecidas, exceto uma, ao se somarem os momentos em relação a esse eixo, obtém-se uma equação com uma única incógnita [Problemas Resolvidos 4.10].

4. Após traçar o diagrama de corpo livre, podemos encontrar uma das seguintes situações:

a. As reações envolvem menos que seis incógnitas: o corpo é considerado *parcialmente vinculado* e seu movimento é possível. Porém, podemos ser capazes de determinar as reações se forem dadas as condições de carregamento [Problema Resolvido 4.7].

b. As reações envolvem mais que seis incógnitas: as reações são consideradas *estaticamente indeterminadas*. Embora possamos ser capazes de calcular uma ou duas reações, não pode mos determinar todas as reações [Problema Resolvido 4.10].

c. As reações são paralelas ou interceptam a mesma linha: o corpo é considerado *impropriamente vinculado* e seu movimento pode ocorrer de acordo com as condições gerais de carregamento.

4.91 Uma placa de madeira compensada de 1,2 m × 2,4 m, pesando 150 N, foi temporariamente colocada entre três apoios tubulares. A borda inferior da placa apoia em pequenos cursores em *A* e *B*, e a borda superior está inclinada contra o tubo *C*. Desprezando o atrito em toda a superfície, determine as reações em *A*, *B* e *C*.

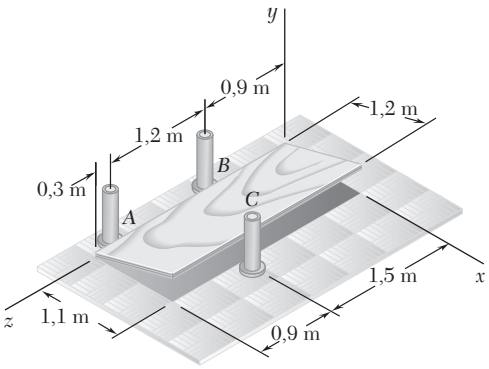


Figura P4.91

4.92 Dois rolos de fitas são presos a um eixo e segurados por mancais em *A* e *D*. O raio do rolo *B* é 30 mm e o raio do rolo *C* é 40 mm. Sabendo que $T_B = 80$ N e o sistema gira em velocidade constante, determine as reações em *A* e *D*. Considere que o mancal *A* não exerce qualquer esforço axial e despreze os pesos dos rolos e do eixo.

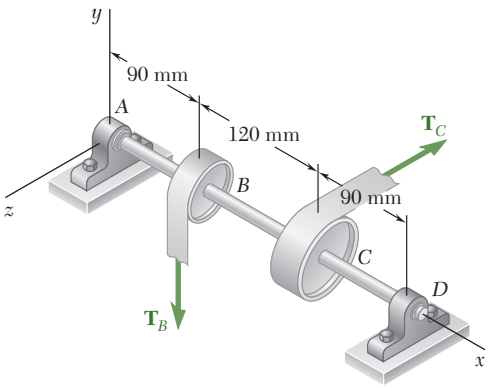


Figura P4.92

4.93 Resolva o Problema 4.92, considerando que o rolo *C* é trocado por um rolo de raio 50 mm.

4.94 Duas correias de transmissão passam por duas roldanas soldadas a um eixo apoiado por mancais em *B* e *D*. A roldana em *A* tem um raio de 60 mm, e a roldana em *C* tem um raio de 50 mm. Sabendo que o sistema roda a uma velocidade constante, determine (*a*) a tração *T*, (*b*) as reações em *B* e *D*. Considere que o mancal em *D* não exerce qualquer esforço axial e despreze os pesos das roldanas e do eixo.

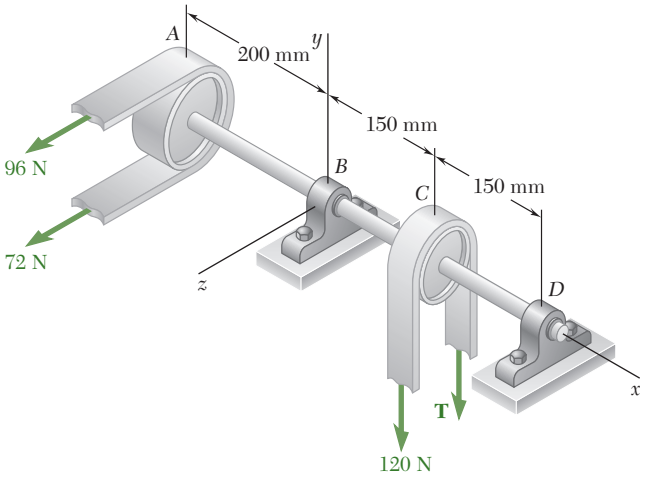


Figura P4.94

4.95 Uma alavanca de 200 mm e uma polia de diâmetro 240 mm estão soldadas ao eixo *BE* que é suportado pelos mancais em *C* e *D*. Se a carga vertical de 720 N é aplicada em *A* quando a alavanca está na horizontal, determine (*a*) a tração na corda, (*b*) a reação em *C* e *D*. Considere que o mancal em *D* não exerce qualquer esforço axial.

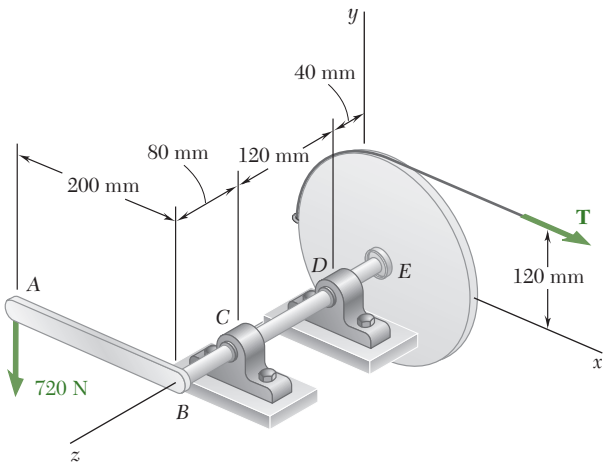


Figura *P4.95*

4.96 Resolva o Problema 4.95, considerando que o eixo foi girado no sentido horário em seus mancais de 30° e que a carga de 720 N permanece na vertical.

4.97 Uma abertura no piso é coberta por uma folha de madeira compensada de 1 × 1,2 m, com massa de 18 kg. A folha é articulada em *A* e *B* e é mantida em uma posição ligeiramente acima do solo por um pequeno bloco *C*. Determine o componente vertical da reação (*a*) em *A*, (*b*) em *B*, (*c*) em *C*.

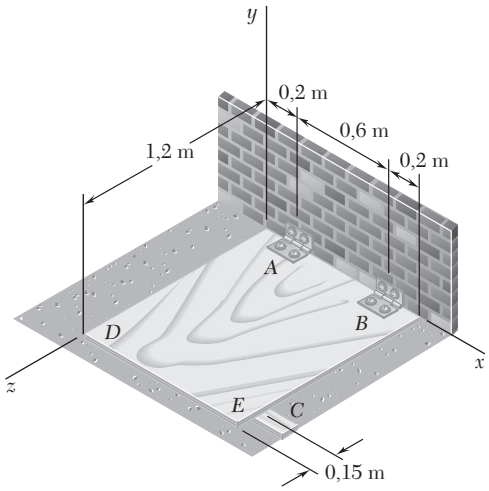


Figura P4.97

4.98 Resolva o Problema 4.97, considerando que o pequeno bloco *C* é movido e colocado na borda *DE* num ponto 0,15 m do canto *E*.

4.99 A placa quadrada de peso 320 N mostrada na figura é sustentada por três arames verticais. Determine a tração em cada arame.

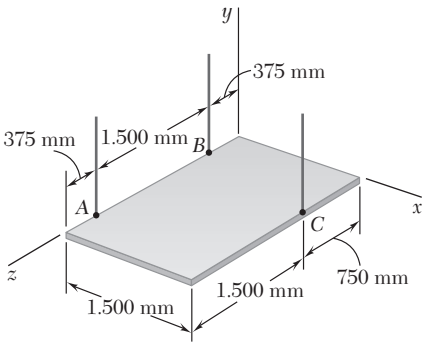


Figura P4.99 e P4.100

4.100 A placa quadrada de peso 320 N mostrada na figura é sustentada por três arames verticais. Determine o peso e a localização dos blocos mais leves que poderiam ser colocados na placa se a tração nos três arames for igual.

4.101 Dois tubos de aço *AB* e *BC*, cada qual com uma massa por unidade de comprimento de 8 kg/m, são soldados juntos em *B* e estão sustentados por três arames. Sabendo que $a = 0{,}375$ m, determine a tração em cada arame.

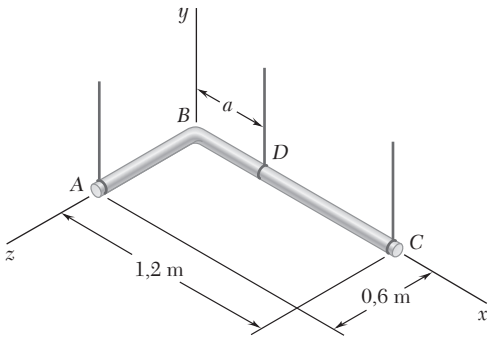


Figura P4.101

4.102 Para a montagem de tubos do Problema 4.101 determine (*a*) o maior valor admissível de *a* para o conjunto não virar e (*b*) a correspondente tração em cada arame.

4.103 A placa quadrada de 100 N mostrada na figura é sustentada por três arames verticais. Determine (*a*) a tração em cada arame quando $a = 250$ mm (*b*) o valor de *a* para o qual as trações nos três arames sejam iguais.

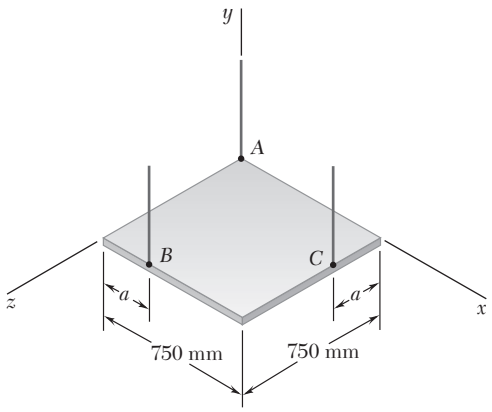


Figura *P4.103*

4.104 A mesa mostrada na figura pesa 120 N e tem um diâmetro de 1,2 m. É suportada por três pernas igualmente distribuídas nas extremidades. A carga vertical **P** de intensidade 400 N é aplicada no topo da mesa em *D*. Determine valor máximo de *a* para a mesa não tombar. Mostre, num esboço, a área da mesa sobre a qual **P** possa agir sem tombar a mesa.

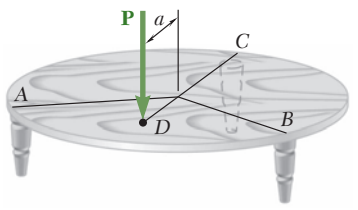


Figura *P4.104*

4.105 Sobre uma lança de 3 m atua uma força de 3.730 N como mostrado na figura. Determine a tração em cada cabo e a reação na rótula em *A*.

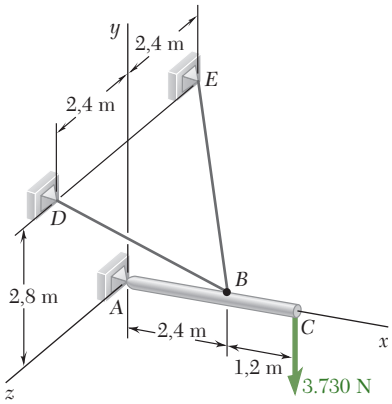


Figura P4.105

4.106 Uma lança de 2,4 m é segura por uma rótula em *C* e por dois cabos *AD* e *BE*. Determine a tração em cada cabo e a reação em *C*.

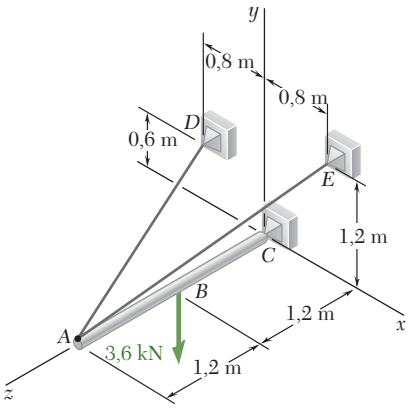


Figura P4.106

4.107 Resolva o Problema 4.106, considerando que a carga de 3,6 kN é aplicada no ponto *A*.

4.108 Um caixote de 2.400 N é suspenso por um cabo que passa pela polia *B* e é preso no suporte *H*. A lança *AB* de 800 N é suportada pela rótula em *A* e por dois cabos *DE* e *DF*. O centro de gravidade da lança é localizado em *G*. Determine (*a*) a tração nos cabos *DE* e *DF*, (*b*) a reação em *A*.

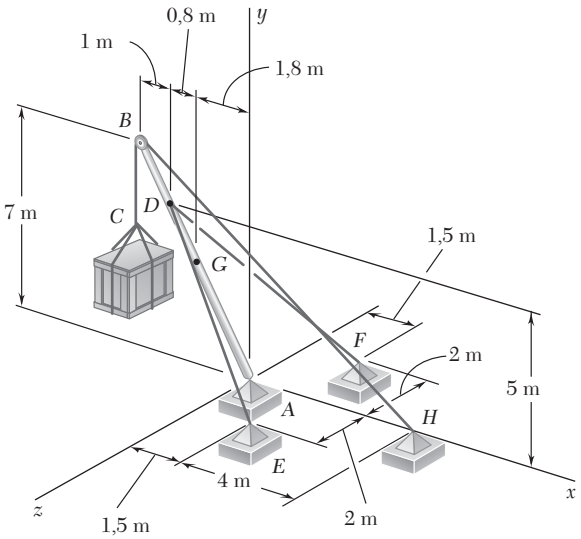


Figura P4.108

4.109 Uma viga de 3 m é sustentada por uma rótula em A e pelos cabos CD e CE. Sabendo que a força de 5 kN atua verticalmente para baixo ($\phi = 0$), determine (a) a tração nos cabos CD e CE, (b) a reação em A.

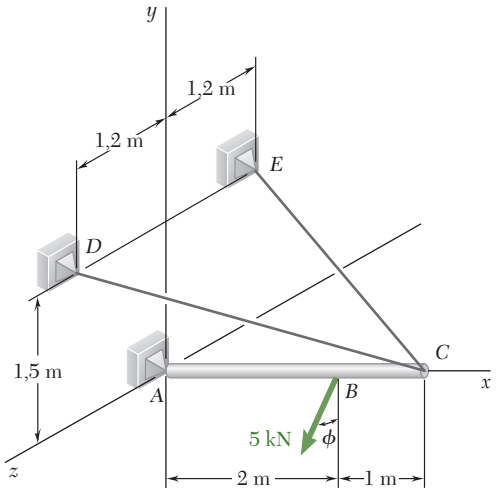


Figura P4.109 e P4.110

4.110 Uma viga de 3 m é mantida por uma rótula em A e pelos cabos CD e CE. Sabendo que a linha de ação da força de 5 kN forma um ângulo de $\phi = 30°$ com a vertical do plano xy, determine (a) a tração nos cabos CD e CE, (b) a reação em A.

4.111 Uma lança de 1,2 m é mantida pela rótula em C e por dois cabos BF e DAE, sendo que o cabo DAE passa por uma polia sem atrito em A. Para a carga mostrada na figura, determine a tração em cada cabo e a reação em C.

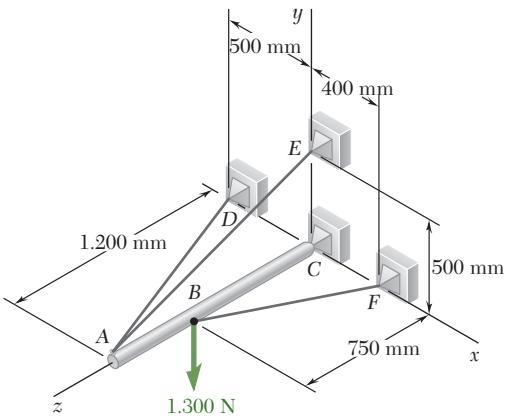


Figura P4.111

4.112 Resolva o Problema 4.111, considerando que a carga de 1.300 N é aplicada em *A*.

4.113 Uma cobertura de 20 kg de uma abertura de um telhado é articulada nos cantos *A* e *B*. O telhado forma um ângulo de 30° com a horizontal e a cobertura é mantida em uma posição horizontal pelo apoio *CE*. Determine (*a*) a intensidade da força exercida pelo apoio e (*b*) as reações nas dobradiças. Suponha que a articulação em *A* não exerce qualquer esforço axial.

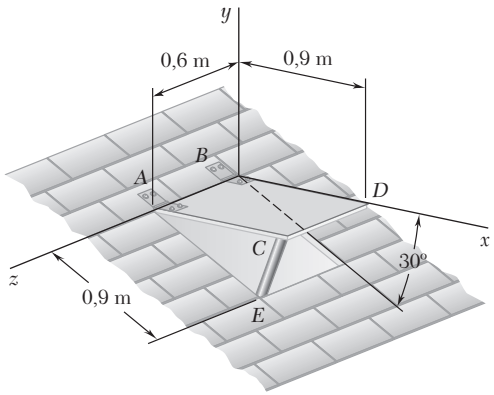


Figura P4.113

4.114 A haste dobrada *ABEF* é sustentada por mancais em *C* e *D* e pelo arame *AH*. Sabendo que a porção *AB* da haste tem 250 mm de comprimento, determine (*a*) a tração no arame *AH*, (*b*) as reações em *C* e *D*. Considere que o mancal em *D* não exerce qualquer esforço axial.

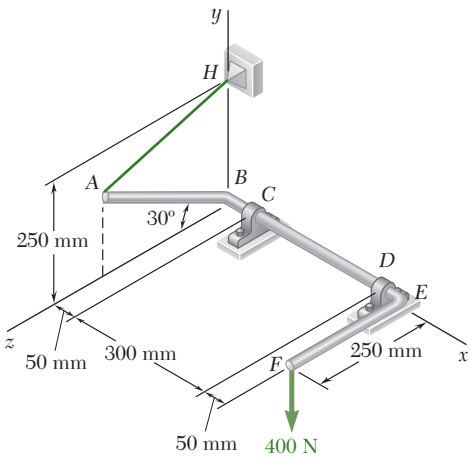


Figura P4.114

4.115 Uma placa retangular uniforme de 100 kg de massa é sustentada na posição mostrada na figura pelas dobradiças *A* e *B* e pelo cabo *DCE*, que passa por um gancho sem atrito em *C*. Considerando que a tração é a mesma em ambas as partes do cabo, determine (*a*) a tração no cabo, (*b*) as reações em *A* e *B*. Considere que a dobradiça em *B* não exerce qualquer esforço axial.

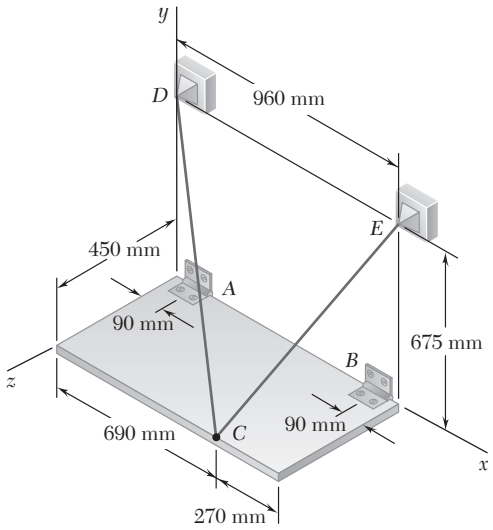


Figura *P4.115*

4.116 Resolva o Problema 4.115, considerando que o cabo *DCE* é substituído por um cabo preso no ponto *E* e no gancho em *C*.

4.117 A placa retangular mostrada na figura tem peso de 300 N e é mantida na posição mostrada pelas dobradiças *A* e *B* e pelo cabo *EF*. Considerando que a dobradiça em *B* não exerce qualquer esforço axial, determine (*a*) a tração no cabo e (*b*) as reações em A e *B*.

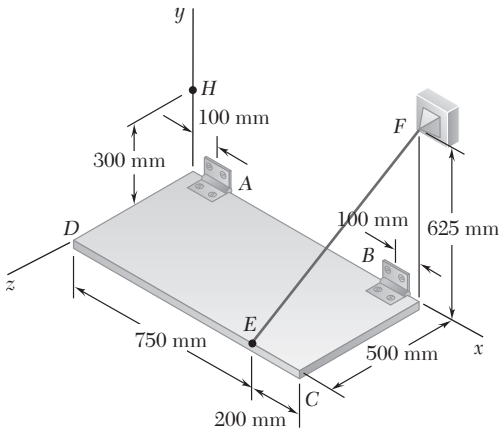


Figura P4.117

4.118 Resolva o Problema 4.117, considerando que o cabo *EF* é substituído por um cabo preso aos pontos *E* e *H*.

4.119 Resolva o Problema 4.114, considerando que o mancal em *D* é removido e que o em *C* pode exercer binários em relação aos eixos paralelos aos eixos *y* e *z*.

4.120 Resolva o Problema 4.117, considerando que a dobradiça em *B* é removida e a dobradiça em *A* pode exercer binários sobre o eixo paralelo aos eixos *y* e *z*.

4.121 O conjunto mostrado na figura é usado para controlar a tração *T* na fita que passa no rolo em *E* sem atrito. O cursor *C* é soldado nas barras *ABC* e *CDE*. Ele pode rodar sobre o eixo *FG*, mas seu movimento ao longo do eixo é impedido pela arruela *S*. Para a carga mostrada, determine (*a*) a tração *T* na fita, (*b*) a reação em *C*.

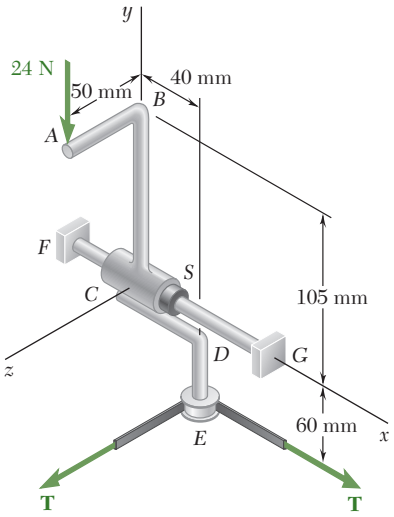


Figura P4.121

4.122 O conjunto mostrado na figura é soldado ao cursor *A*, que se encaixa no pino vertical mostrado. O pino pode exercer binários em torno dos eixos *x* e *z*, mas não impede movimento em torno ou ao longo do eixo *y*. Para o carregamento mostrado, determine a tração em cada cabo e a reação em *A*.

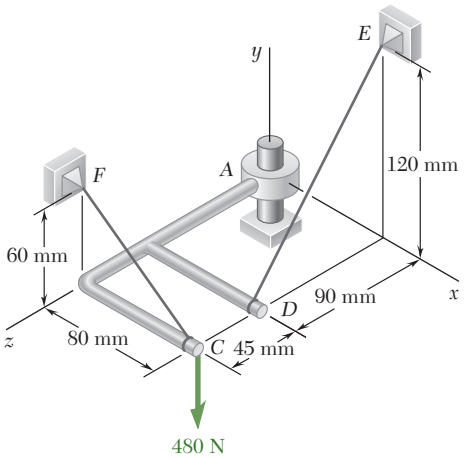


Figura P4.122

4.123 O elemento rígido *ABC* em formato de L é sustentado por uma rótula em *A* e por três cabos. Se um carregamento de 2.000 N é aplicado em *F*, determine a tração em cada cabo.

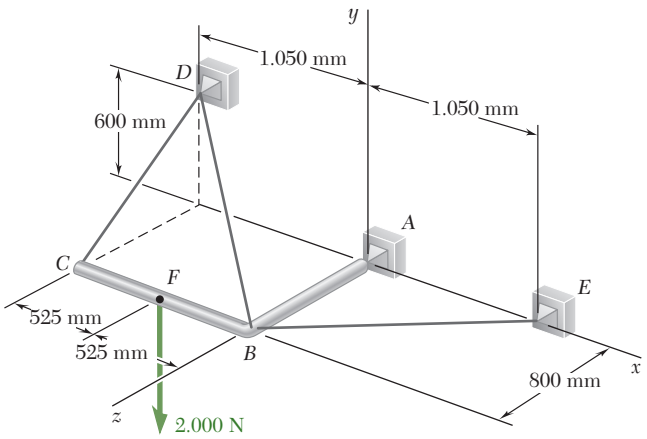


Figura P4.123

4.124 Resolva o Problema 4.123, considerando que o a carga de 2.000 N é aplicada em *C*.

4.125 A estrutura *ABCD* é sustentada por uma rótula em *A* e por três cabos. Para $a = 150$ mm, determine a tração em cada cabo e a reação em *A*.

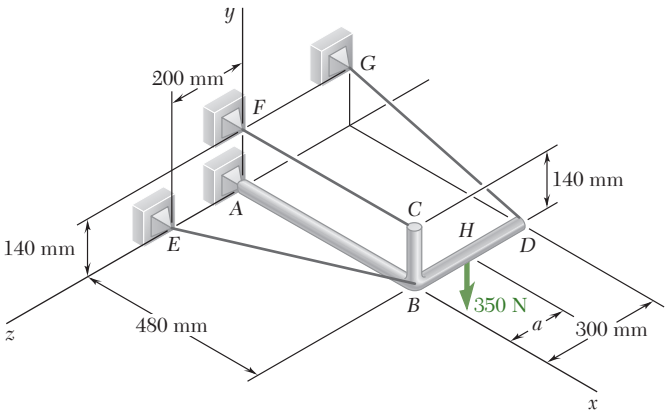


Figura P4.125 e P4.126

4.126 A estrutura *ABCD* é sustentada por uma rótula em *A* e por três cabos. Sabendo que a carga de 350 N é aplicada em *D* ($a = 300$ mm), determine a tração em cada cabo e a reação em *A*.

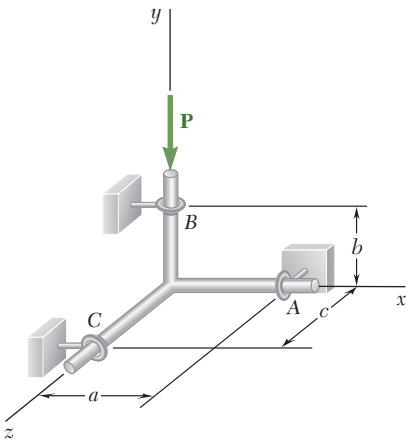


Figura P4.127

4.127 Três hastes são soldadas juntas para formar uma "cantoneira" sustentada por três parafusos de olhal. Desprezando o atrito, determine as reações em *A*, *B* e *C* quando $P = 1.000$ N, $a = 300$ mm, $b = 200$ mm e $c = 250$ mm.

4.128 Resolva o Problema 4.127, considerando que a força **P** é removida e substituída por um binário $\mathbf{M} = +(68\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$ atuando em *B*.

4.129 Para limpar a tubulação de esgoto entupida *AE*, um encanador desconectou ambas as extremidades da tubulação e inseriu um desentupidor motorizado através da abertura em *A*. A cabeça cortante do desentupidor está conectada por um cabo resistente a um motor elétrico que gira a uma velocidade constante à medida que o encanador força o cabo para dentro da tubulação. As forças exercidas pelo encanador e pelo motor na extremidade do cabo podem ser representadas pelo torsor $\mathbf{F} = -(48\text{ N})\mathbf{k}$, $\mathbf{M} = -(90\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$. Determine as reações adicionais em *B*, *C* e *D* causadas pela operação de limpeza. Considere que a reação em cada apoio consiste em dois componentes de força perpendiculares à tubulação.

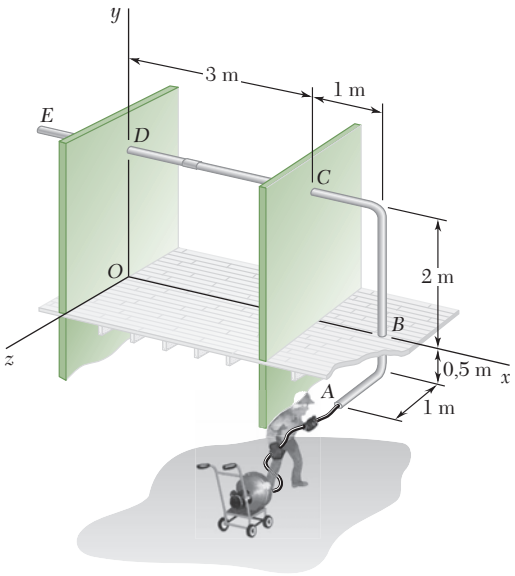


Figura P4.129

4.130 Resolva o Problema 4.129, considerando que o encanador exerce uma força $\mathbf{F} = -(48\text{ N})\mathbf{k}$ e que o motor está desligado ($\mathbf{M} = 0$).

4.131 A montagem mostrada na figura consiste em uma barra de *AF* de 80 mm que é soldada a uma cruz representada por quatro braços de 200 mm. A montagem é mantida por uma rótula em *F* e por três conexões curtas, cada qual formando um ângulo de 45° com a vertical. Para o carregamento mostrado, determine (*a*) a tração em cada conexão, (*b*) a reação a *F*.

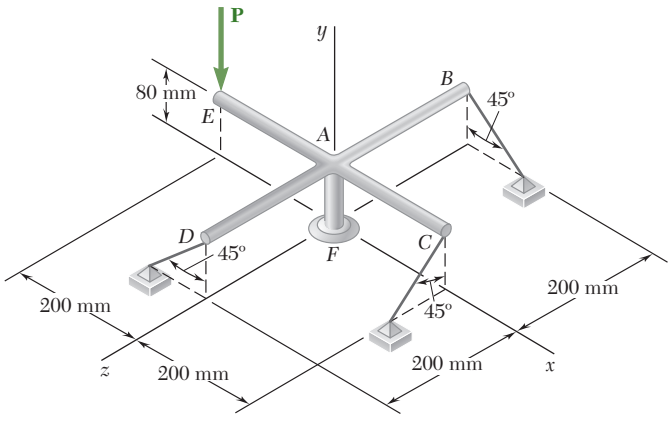


Figura *P4.131*

4.132 Uma haste uniforme de massa de 10 kg *AB* é sustentada por uma rótula em *A* e por uma corda *CG* que é presa no ponto médio *G* da corda. Sabendo que a barra encosta sem fricção na parede vertical em *B*, determine (*a*) a tração na corda, (*b*) as reações em *A* e *B*.

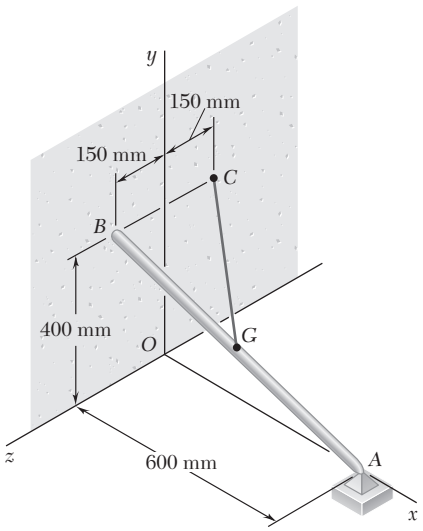


Figura P4.132

4.133 A haste dobrada *ABDE* é apoiada por rótulas em *A* e *E* e pelo cabo *DF*. Se uma carga de 240 N é aplicada em *C*, tal como mostra a figura, determine a tração no cabo.

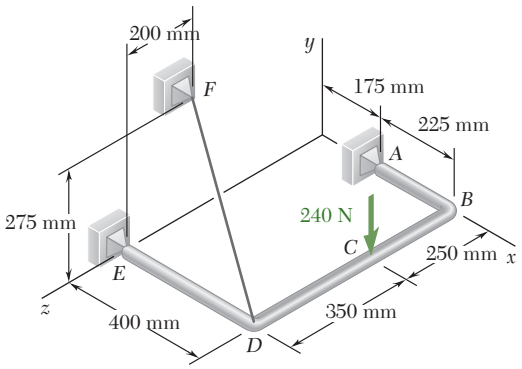


Figura P4.133

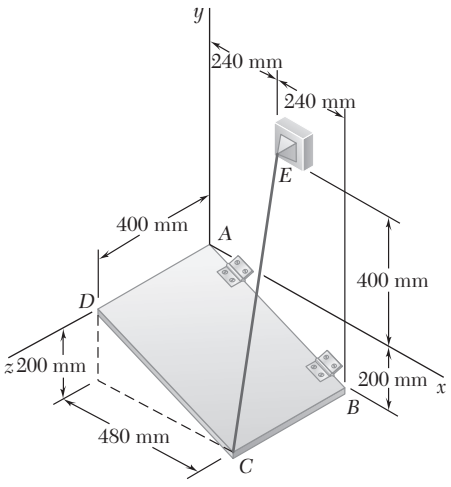


Figura P4.135

4.134 Resolva o Problema 4.133, considerando que o cabo *DF* é substituído por um cabo que conecte *B* e *F*.

4.135 A placa *ABCD* de 50 kg é sustentada por dobradiças ao longo de *AB* e pelo arame *CE*. Sabendo que a placa é uniforme, determine a tração no arame.

4.136 Resolva o Problema 4.135, considerando que o arame *CE* é substituído por um arame que conecte *E* e *D*.

4.137 Duas placas retangulares são soldadas juntas para formar o conjunto mostrado na figura. O conjunto é sustentado por rótulas em *B* e *D* e por uma esfera sobre uma superfície horizontal em *C*. Para o carregamento mostrado na figura, determine a reação em *C*.

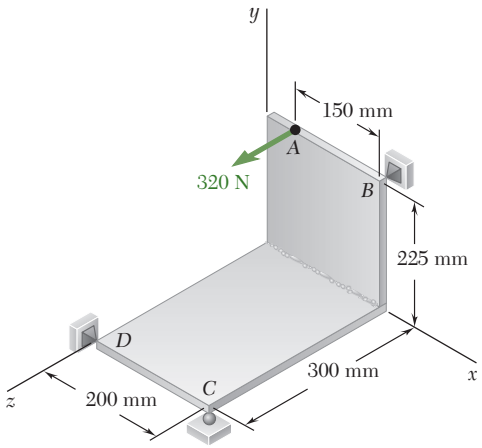


Figura P4.137

4.138 Dois painéis de madeira compensada de 0,6 m × 1,2 m, cada qual com peso de 48 N, são pregados juntos tal como mostra a figura. Os painéis são sustentados por rótulas em *A* e *F* e pelo arame *BH*. Determine (*a*) a localização de *H* no plano *xy* para a tração no arame ser mínima e (*b*) a correspondente tração mínima.

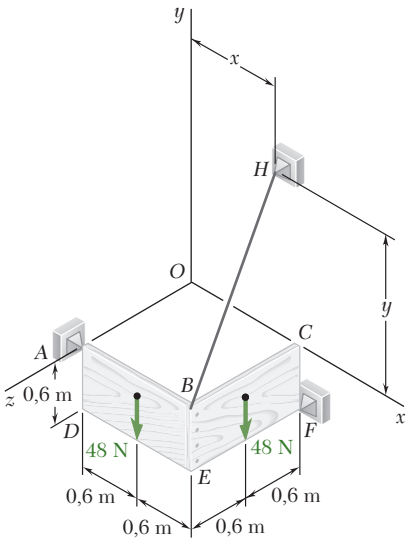


Figura P4.138

4.139 Resolva o Problema 4.138, sujeito à restrição de que *H* deve estar sobre o eixo *y*.

4.140 O tubo *ACDE* é suportado por rótulas em *A* e *E* e pelo arame *DF*. Determine a tração no arame quando a carga de 640 N é aplicada em *B* como mostrado na figura.

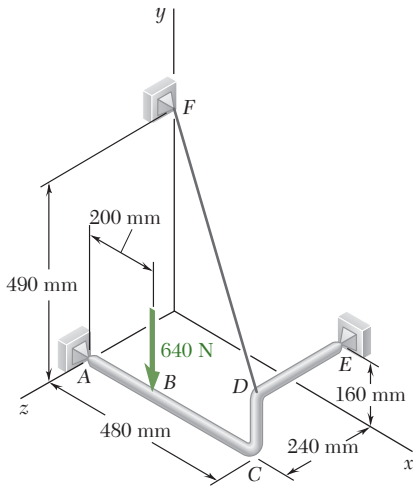


Figura P4.140

4.141 Resolva o Problema 4.140, considerando que o arame *DF* é substituído por um arame que conecte *C* e *F*.

REVISÃO E RESUMO

Equações de equilíbrio

Este capítulo foi dedicado ao estudo do *equilíbrio de corpos rígidos*, isto é, da situação em que forças externas exercidas sobre um corpo rígido *formam um sistema equivalente a zero* [Seção 4.1]. Temos, então:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

Decompondo cada força e cada momento em seus componentes retangulares, podemos demonstrar as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido com as seis equações escalares seguintes:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Essas equações podem ser usadas para determinar forças desconhecidas aplicadas ao corpo rígido ou reações desconhecidas exercidas pelos seus apoios.

Diagrama de corpo livre

Quando resolver um problema que envolva o equilíbrio de um corpo rígido, é essencial considerar *todas* as forças atuantes sobre o corpo. Assim, o primeiro passo na solução do problema deve ser traçar um *diagrama de corpo livre* mostrando o corpo em destaque e todas as incógnitas, assim como as forças conhecidas exercidas sobre ele [Seção 4.2].

Equilíbrio de uma estrutura bidimensional

Na primeira parte do capítulo, consideramos o *equilíbrio de uma estrutura bidimensional*; isto é, que a estrutura considerada e as forças aplicadas nela estavam contidas no mesmo plano. Vimos que cada uma das reações exercidas sobre a estrutura pelos seus apoios pode envolver uma, duas ou três incógnitas, dependendo do tipo de apoio [Seção 4.3].

No caso de uma estrutura bidimensional, as Eqs. (4.1), ou as Eqs. (4.2) e (4.3), se reduzem a *três equações de equilíbrio*, a saber

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{4.5}$$

onde A é um ponto arbitrário no plano da estrutura [Seção 4.4]. Essas equações podem ser usadas para se obter a solução para as três incógnitas. Embora as três equações de equilíbrio (4.5) não possam ser *aumentadas* com outras equações, qualquer uma delas pode ser *substituída* por outra equação. Portanto, podemos escrever outros conjuntos de equações de equilíbrio, tais como

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \tag{4.6}$$

onde o ponto B é escolhido de modo que a linha AB não seja paralela ao eixo y, ou

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \tag{4.7}$$

em que os pontos A, B e C não estão em uma linha reta.

Já que qualquer conjunto de equações de equilíbrio pode ser resolvido para somente três incógnitas, as reações nos apoios de uma estru-

tura rígida bidimensional não podem ser completamente determinadas se envolverem *mais do que três incógnitas*; diz-se que elas são *estaticamente indeterminadas* [Seção 4.5]. Por outro lado, se as reações envolvem *menos do que três incógnitas*, o equilíbrio não poderá ser mantido para condições gerais de carregamento; diz-se que a estrutura é *parcialmente vinculada*. O fato de as reações envolverem exatamente três incógnitas não é garantia de que o equilíbrio das equações possa ser resolvido para todas as três incógnitas. Se os suportes são arranjados de tal maneira que as reações são *ou concorrentes ou paralelas*, as reações são estaticamente indeterminadas, e diz-se que a estrutura é *impropriamente vinculada*.

Indeterminação estática

Vinculações parciais

Vinculações impróprias

Foi dada especial atenção a dois casos específicos de equilíbrio de um corpo rígido. Na Seção 4,6, um *corpo sujeito à ação de duas forças* foi definido como um corpo rígido sujeito à ação de forças em apenas dois pontos, e foi mostrado que as resultantes $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ dessas forças devem ter *igual intensidade, igual linha de ação e sentidos opostos* (Fig. 4.11), uma propriedade que vai simplificar a solução de certos problemas em capítulos futuros. Na Seção 4.7, um *corpo sujeito à ação de três forças* foi definido como um corpo rígido sujeito à ação de forças em apenas três pontos e mostrado que as resultantes $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ dessas forças podem ser *tanto concorrentes* (Fig. 4.12) *como paralelas*. Essa propriedade nos concede uma técnica alternativa para a solução de problemas que envolvam um corpo sujeito à ação de três forças [Problema Resolvido 4.6].

Corpo sujeito à ação de duas forças

Corpo sujeito à ação de três forças

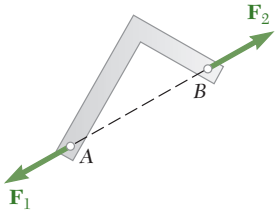


Figura 4.11

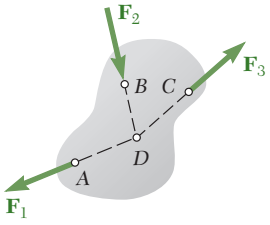


Figura 4.12

Na segunda parte do capítulo, consideramos o *equilíbrio de um corpo tridimensional* e vimos que cada uma das reações exercidas sobre o corpo por seus apoios pode envolver uma a seis incógnitas, dependendo do tipo de apoio [Seção 4.8].

Equilíbrio de um corpo tridimensional

No caso geral do equilíbrio de um corpo tridimensional, todas as seis equações escalares de equilíbrio (4.2) e (4.3) listadas no início desta revisão devem ser usadas e resolvidas para *seis incógnitas* [Seção 4.9]. Na maioria dos problemas, no entanto, essas equações serão mais convenientemente obtidas se primeiro considerarmos

$$\Sigma\mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma\mathbf{M}_o = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

e demonstrarmos as forças $\mathbf{F}$ e os vetores posição $\mathbf{r}$ em termos dos componentes escalares e dos vetores unitários. Os produtos vetoriais podem, então, ser calculados diretamente ou por meio de determinantes, e as

equações escalares desejadas podem ser obtidas igualando-se a zero os coeficientes dos vetores unitários [Problemas Resolvidos 4.7 a 4.9].

Observamos que no máximo três componentes de reações desconhecidas podem ser eliminados dos cálculos de $\Sigma \mathbf{M}_O$ na segunda das relações (4.1) por meio de uma escolha criteriosa do ponto O. Além disso, é possível eliminar as reações em dois pontos A e B da solução de alguns problemas escrevendo-se a equação $\Sigma M_{AB} = 0$, que envolve o cálculo dos momentos das forças em relação ao eixo AB, que une os pontos A e B [Problema Resolvido 4.10].

Se as reações envolvem mais do que seis incógnitas, algumas das reações são *estaticamente indeterminadas*; se envolvem menos do que seis incógnitas, o corpo rígido é apenas *parcialmente vinculado.* Mesmo com seis ou mais incógnitas, o corpo rígido vai estar *impropriamente vinculado* se as reações associadas aos apoios dados forem paralelas ou interceptarem a mesma linha.

PROBLEMAS DE REVISÃO

4.142 Um carrinho de mão é usado para transportar dois barris, cada qual de massa 40 kg. Desprezando a massa do carrinho, determine (*a*) a força vertical **P** que deve ser aplicada à barra para se manter o equilíbrio quando $\alpha = 35°$, (*b*) a reação correspondente em cada uma das duas rodas.

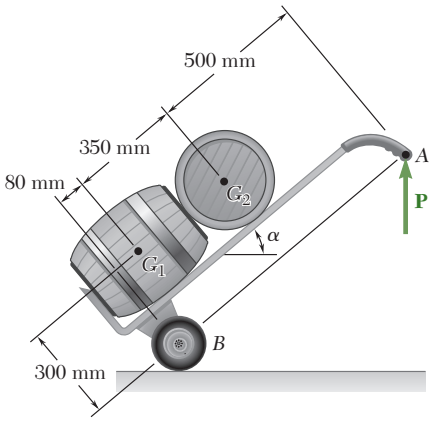


Figura P4.142

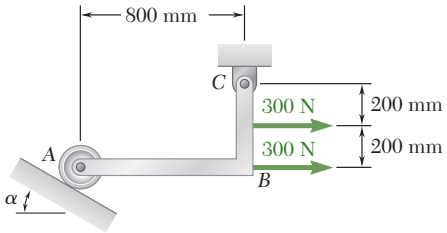


Figura P4.143

4.143 Determine as reações em *A* e *C* quando (*a*) $\alpha = 0$, (*b*) $\alpha = 30°$.

4.144 Uma alavanca *AB* é articulada em *C* e presa a um cabo de controle em *A*. Se a alavanca for submetida a uma força vertical de 300 N em *B*, determine (*a*) a tração no cabo, (*b*) a reação em *C*.

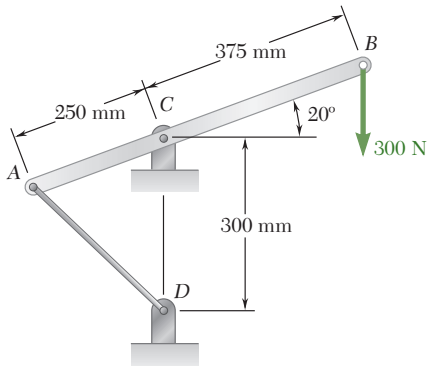


Figura *P4.144*

4.145 Desprezando o atrito e o raio da polia, determine (*a*) a tração no cabo *ADB*, (*b*) a reação em *C*.

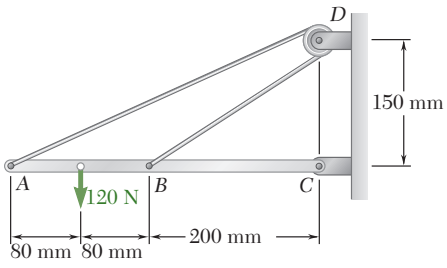


Figura P4.145

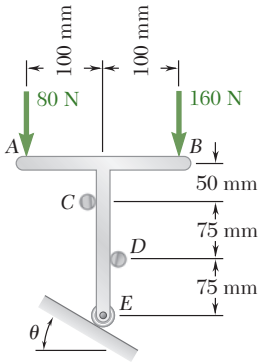


Figura P4.146 e *P4.147*

4.146 O suporte em forma de T mostrado na figura é suspenso por uma pequena roda em E e por cavilhas em C e D. Desprezando o efeito do atrito, determine as reações em C, D e E quando $\theta = 30°$.

4.147 O suporte em forma de T mostrado na figura é apoiado por uma pequena roda em E e por cavilhas em C e D. Desprezando o efeito do atrito, determine (a) o menor valor de θ para que seu equilíbrio seja mantido, (b) as reações correspondentes em C, D e E.

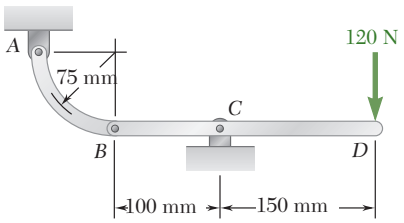


Figura P4.148

4.148 Para a estrutura e carregamento mostrados na figura, determine as reações em A e C.

4.149 Determine as reações em A e B quando $\beta = 50°$.

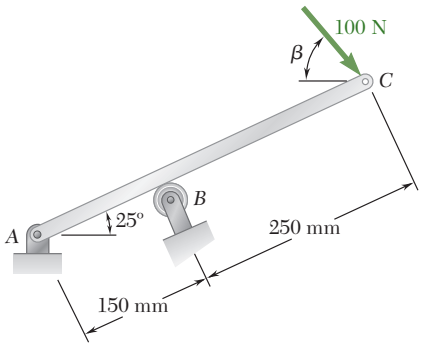


Figura *P4.149*

4.150 No poste ABC de 6 m, atua uma força de 455 N, tal como mostra a figura. O poste é sustentado por uma rótula em A e por dois cabos BD e BE. Para $a = 3$ m, determine a tração em cada cabo e a reação em A.

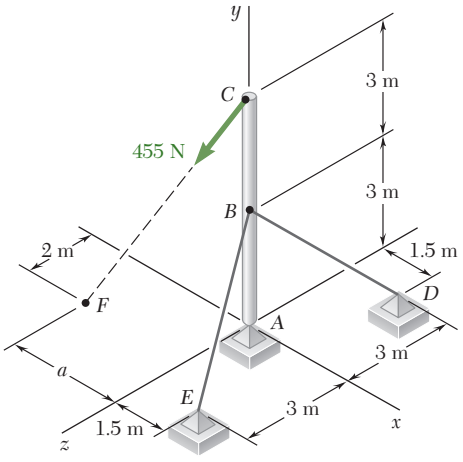


Figura P4.150

4.151 Resolva o Problema 4.150 para $a = 1{,}5$ m.

4.152 O elemento rígido *ABF* em formato de L é sustentado por uma rótula em *A* e por três cabos. Para o carregamento mostrado na figura, determine a tração em cada cabo e a reação em *A*.

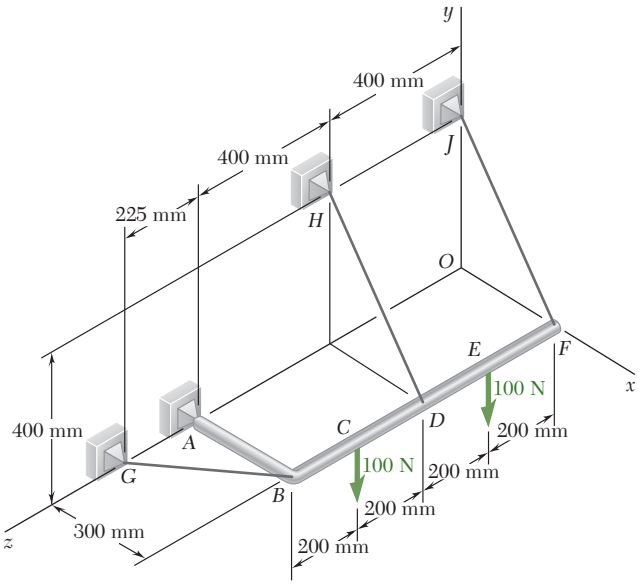


Figura P4.152

4.153 A força **P** é aplicada numa barra dobrada *ABC*, que pode ser apoiada de quatro maneiras diferentes, como mostrado na figura. Em cada caso, se possível, determine as reações nos suportes.

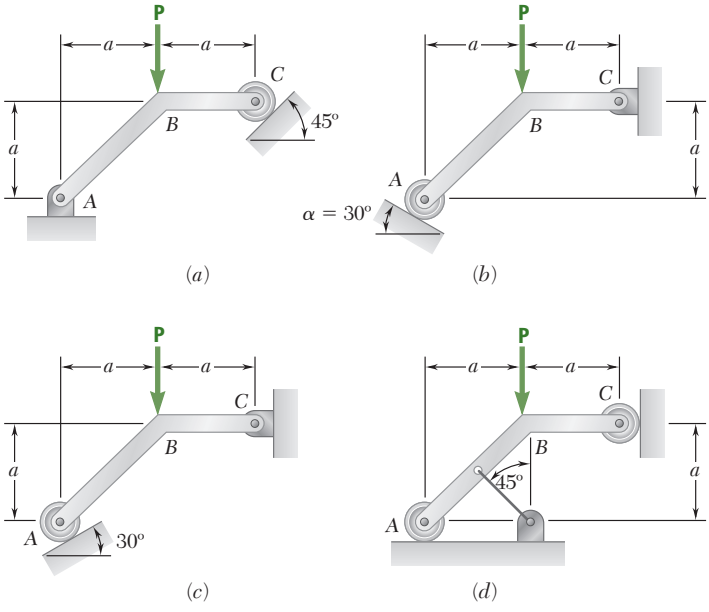


Figura P4.153

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

4.C1 A posição da haste em forma de L mostrada na figura é controlada por um cabo preso ao ponto B. Sabendo que a haste sustenta uma carga de intensidade $P = 200$ N, utilize um aplicativo computacional para calcular a tração T no cabo para valores de θ de 0 a 120°, usando incremento de 10°. Determine a tração máxima T e o valor correspondente de θ.

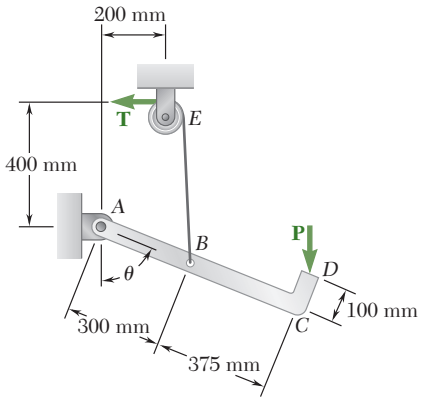


Figura P4.C1

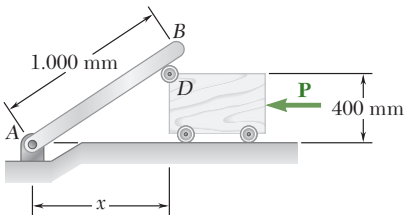


Figura P4.C2

4.C2 A posição da haste AB de massa 10 kg é controlada pelo bloco mostrado na figura, que é lentamente movimentado para a esquerda pela força **P**. Desprezando o efeito do atrito, utilize um aplicativo computacional para calcular a intensidade P da força para valores de x decrescendo de 750 mm a 0 usando incrementos de 50 mm. Adotando o menor incremento adequado, determine o valor máximo de P e o valor correspondente de x.

4.C3 e 4.C4 A constante da mola AB é k, e a mola não está deformada quando $\theta = 0$. Sabendo que $R = 250$ mm, $a = 500$ mm e $k = 1$ kN/m, utilize um aplicativo computacional para calcular o peso W correspondente à condição de equilíbrio para valores de θ de 0 a 90°, usando incremento de 10°. Usando o menor incremento adequado, determine o valor de θ correspondente à condição de equilíbrio quando $W = 20$ N.

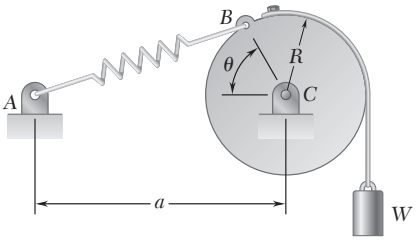


Figura P4.C3

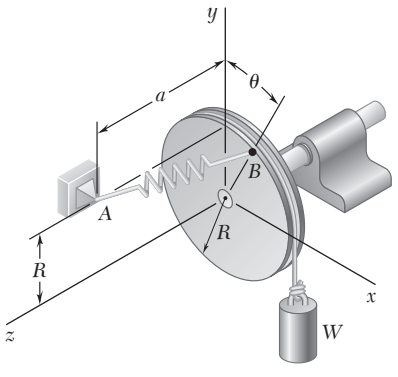


Figura P4.C4

4.C5 Um painel de 200 × 250 mm e massa de 20 kg é sustentado por dobradiças ao longo da aresta *AB*. O cabo *CDE* é preso ao painel no ponto *C*, passa por uma pequena polia em *D* e sustenta um cilindro de massa *m*. Desprezando o efeito do atrito, utilize um aplicativo computacional para calcular a massa do cilindro correspondente à condição de equilíbrio para valores de θ de 0 a 90°, usando incrementos de 10°. Adotando o menor incremento adequado, determine o valor de θ correspondente a $m = 10$ kg.

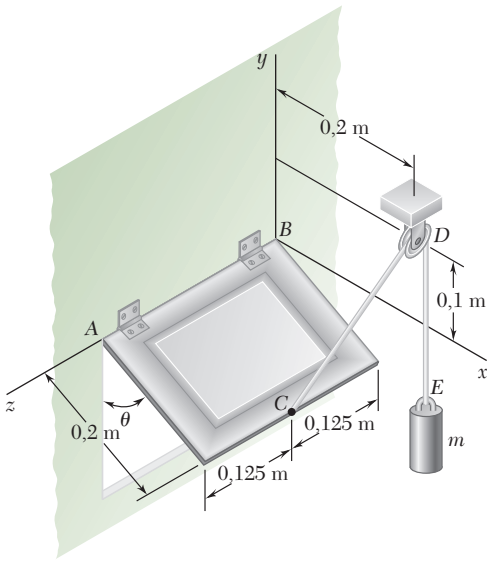


Figura P4.C5

4.C6 O guindaste mostrado na figura sustenta um caixote de massa de 2.000 kg. Ele é sustentado por uma rótula em *A* e por dois cabos presos aos pontos *D* e *E*. Sabendo que o guindaste está em um plano vertical formando um ângulo ϕ com o plano *xy*, utilize um aplicativo computacional para calcular a tração em cada cabo para valores de ϕ de 0 a 60°, usando incrementos de 5°. Adotando o menor incremento adequado, determine o valor de ϕ para que a tensão no cabo *BE* seja máxima.

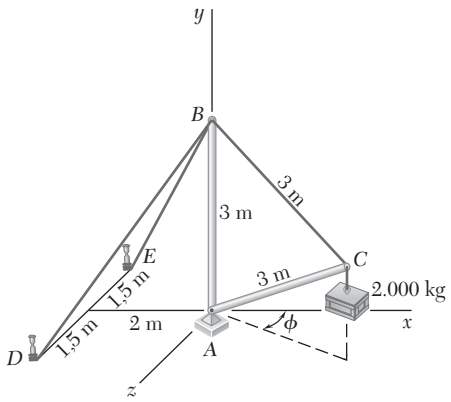
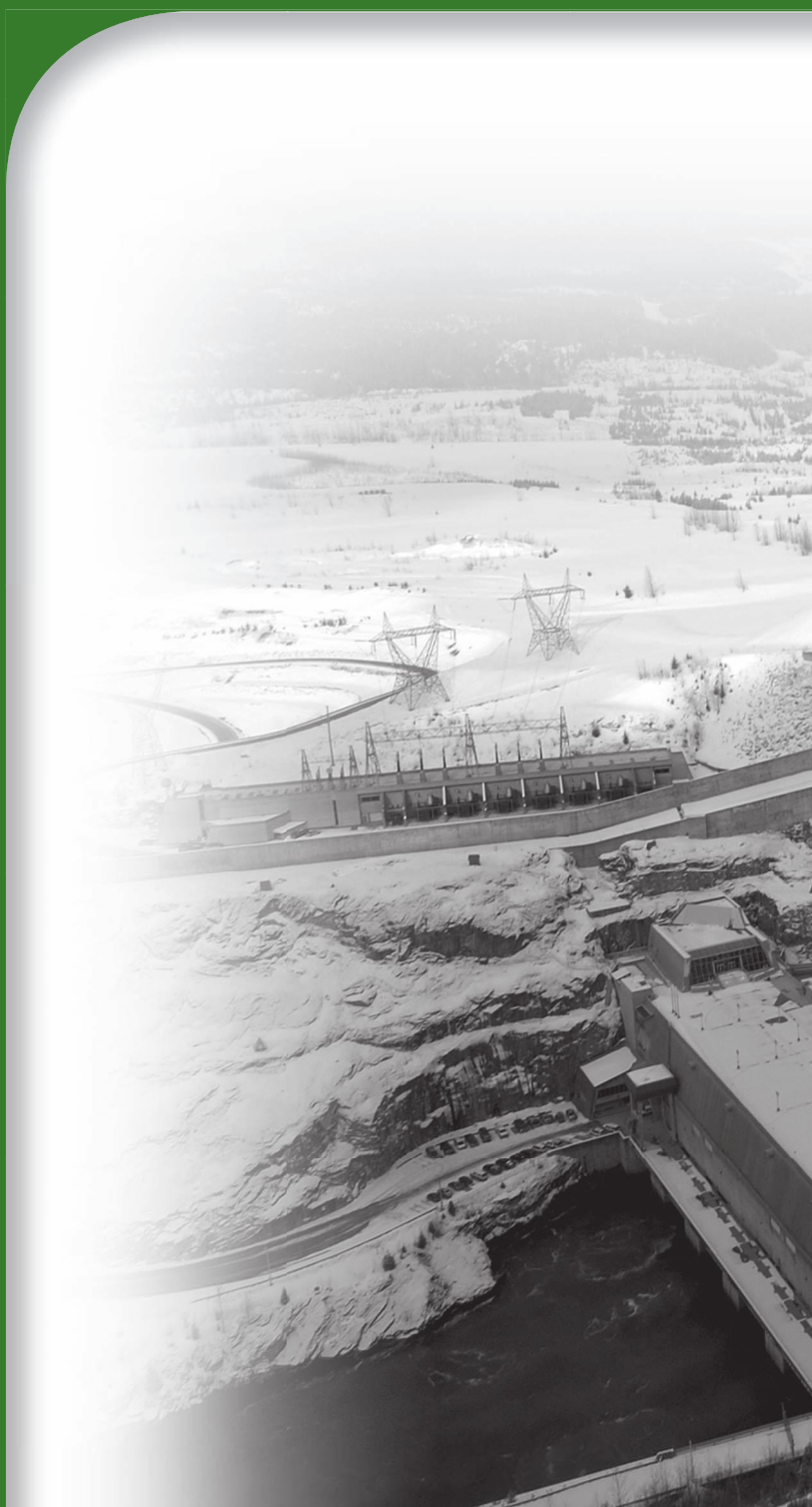


Figura P4.C6

A barragem Revelstoke, localizada no Rio Columbia em British Columbia, está sujeita a três diferentes tipos de forças distribuídas: o peso de seus elementos constituintes, a pressão exercida pela força da água em sua superfície submersa, e a pressão exercida pelo solo em sua base.



CAPÍTULO 5

Forças distribuídas: centroides e centros de gravidade

5 Forças distribuídas: centroides e centros de gravidade

5.1 Introdução
5.2 Centro de gravidade de um corpo bidimensional
5.3 Centroides de áreas e linhas
5.4 Momentos de primeira ordem de áreas e linhas
5.5 Placas e fios compostos
5.6 Determinação de centroides por integração
5.7 Teoremas de Pappus-Guldinus
5.8 Cargas distribuídas sobre vigas
5.9 Forças sobre superfícies submersas
5.10 Centro de gravidade de um corpo tridimensional e centroide de um sólido
5.11 Corpos compostos
5.12 Determinação de centroides de sólidos por integração

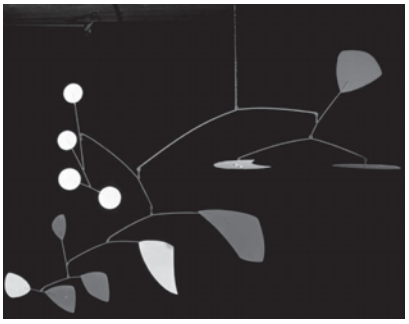


Foto 5.1 O balanceamento preciso dos componentes de um móbile requer certo conhecimento sobre centros de gravidade e centroides, os principais tópicos deste capítulo.

5.1 Introdução

Até aqui, temos considerado que a atração exercida pela Terra sobre um corpo rígido pode ser representada por uma força única **W**. Essa força, denominada força de gravidade ou peso do corpo, era para ser aplicada no *centro de gravidade* do corpo (Seção 3.2). Na verdade, a Terra exerce uma força sobre cada uma das partículas que constituem o corpo. Logo, a ação da Terra sobre um corpo rígido deve ser representada por um grande número de pequenas forças distribuídas sobre todo o corpo. Todavia, aprenderemos neste capítulo que todas essas pequenas forças podem ser substituídas por uma força única equivalente **W**. Também veremos como determinar o centro de gravidade, ou seja, o ponto de aplicação da resultante **W**, para corpos de formas diversas.

Na primeira parte deste capítulo, serão levados em conta corpos bidimensionais, tais como placas planas e fios contidos em um dado plano. Serão apresentados dois conceitos estreitamente associados à determinação do centro de gravidade de uma placa ou fio: o conceito de *centroide* de uma área ou linha e o conceito de *momento de primeira ordem* de uma área ou linha em relação a um dado eixo.

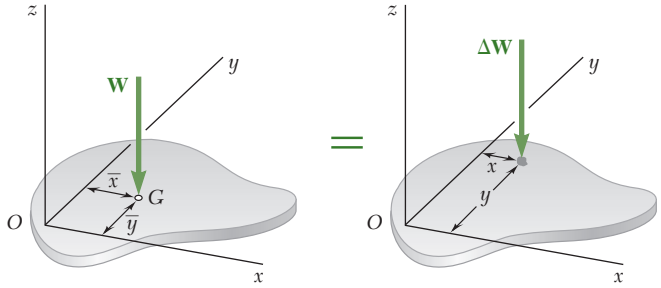
Aprenderemos também que o cálculo da área de uma superfície de revolução ou do volume de um sólido de revolução está diretamente relacionado com a determinação do centroide da curva ou da superfície usada para gerar tal superfície ou sólido de revolução (Teoremas de Pappus-Guldinus). E, conforme mostram as Seções 5.8 e 5.9, a determinação do centroide de uma área simplifica a análise de vigas sujeitas a cargas distribuídas e o cálculo das forças exercidas sobre superfícies retangulares submersas, tais como comportas hidráulicas e partes de barragens.

Na parte final do capítulo, aprenderemos a determinar o centro de gravidade de um corpo tridimensional, assim como o centroide de um sólido e os momentos de primeira ordem desse sólido em relação aos planos coordenados.

ÁREAS E LINHAS

5.2 Centro de gravidade de um corpo bidimensional

Vamos considerar inicialmente uma placa plana horizontal (Fig. 5.1). Podemos dividir a placa em n pequenos elementos. As coordenadas



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}W = \Sigma x\,\Delta W$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}W = \Sigma y\,\Delta W$$

Figura 5.1 Centro da gravidade de uma placa.

do primeiro elemento são representadas por x_1 e y_1; as do segundo elemento, por x_2 e y_2, etc. As forças exercidas pela Terra sobre os elementos de placa serão representadas por $\Delta\mathbf{W}_1$, $\Delta\mathbf{W}_2$, ..., $\Delta\mathbf{W}_n$, respectivamente. Essas forças, ou pesos, estão dirigidas para o centro da Terra; para fins práticos, porém, podem ser tomadas como paralelas. Logo, sua resultante é uma força única com mesma direção e sentido. A intensidade W dessa força é obtida pela adição das intensidades dos pesos elementares:

$$\Sigma F_z: \qquad W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \cdots + \Delta W_n$$

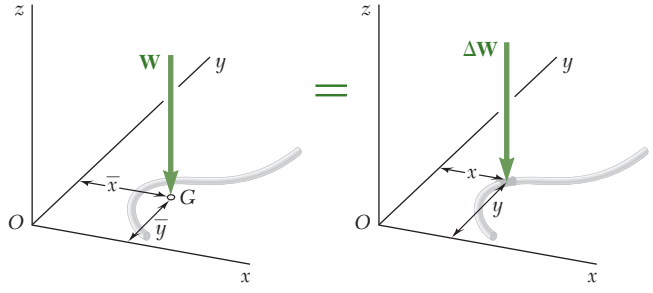
Para obter as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do ponto G no qual a resultante $\mathbf{W}$ deve ser aplicada, escrevemos que os momentos de $\mathbf{W}$ em relação aos eixos x e y são iguais às somas dos momentos correspondentes dos pesos elementares:

$$\begin{aligned} \Sigma M_y: &\qquad \bar{x}W = x_1\,\Delta W_1 + x_2\,\Delta W_2 + \cdots + x_n\,\Delta W_n \\ \Sigma M_x: &\qquad \bar{y}W = y_1\,\Delta W_1 + y_2\,\Delta W_2 + \cdots + y_n\,\Delta W_n \end{aligned} \tag{5.1}$$

Contudo, se aumentarmos o número de elementos em que se divide a placa e diminuirmos simultaneamente o tamanho de cada elemento, obteremos, no limite, as seguintes expressões:

$$W = \int dW \qquad \bar{x}\,W = \int x\,dW \qquad \bar{y}\,W = \int y\,dW \tag{5.2}$$

Essas equações definem o peso $\mathbf{W}$ e as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centro de gravidade G de uma placa plana. As mesmas equações podem ser deduzidas para um fio contido no plano xy (Fig. 5.2). Observamos que geralmente; o centro de gravidade G de um fio não está localizado sobre o fio.



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}\,W = \Sigma x\,\Delta W$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}\,W = \Sigma y\,\Delta W$$

Figura 5.2 Centro de gravidade de um fio.

5.3 Centroides de áreas e linhas

No caso de uma placa plana homogênea de espessura uniforme, a intensidade ΔW do peso de um elemento da placa pode ser expressa como

$$\Delta W = \gamma t\, \Delta A$$

sendo: γ = peso específico (peso por unidade de volume) do material
t = espessura da placa
ΔA = área do elemento

Analogamente, podemos demonstrar a intensidade W do peso de toda a placa como

$$W = \gamma t A$$

sendo A a área total da placa.

Se forem usadas as unidades usuais dos EUA, mede-se o peso específico γ em lb/ft^3, a espessura t em ft [pés] e as áreas ΔA e A em ft^2. Observamos que ΔW e W são medidos em pounds. Se forem usadas as unidades do SI, γ será em N/m^3, t em metros e as áreas ΔA e A em metros quadrados; desse modo, os pesos ΔW e W serão expressos em newtons.*

Substituindo ΔW e W nas equações de momentos (5.1) e dividindo todos os termos por γt, obtemos:

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}A = x_1\,\Delta A_1 + x_2\,\Delta A_2 + \cdots + x_n\,\Delta A_n$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}A = y_1\,\Delta A_1 + y_2\,\Delta A_2 + \cdots + y_n\,\Delta A_n$$

Se aumentarmos o número de elementos em que se divide a superfície de área A e diminuirmos simultaneamente o tamanho de cada elemento, obteremos, no limite:

$$\bar{x}A = \int x\, dA \qquad \bar{y}A = \int y\, dA \tag{5.3}$$

Essas equações definem as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centro de gravidade de uma placa homogênea. O ponto de coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ também é conhecido como o *centroide C da superfície A* da placa (Fig. 5.3). Se a placa não é homogênea, essas equações não podem ser usadas para se determinar o centro de gravidade da placa; todavia, elas ainda determinam o centroide da superfície.

No caso de um fio homogêneo de seção transversal uniforme, a intensidade ΔW do peso de um elemento do fio pode ser expressa por

$$\Delta W = \gamma a\, \Delta L$$

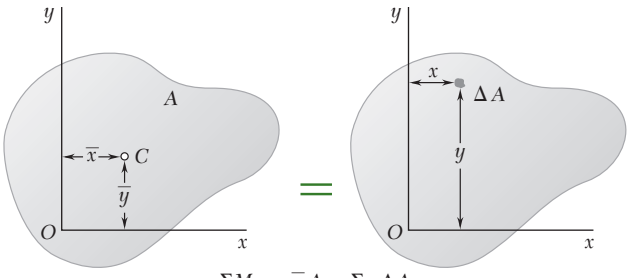
sendo γ = peso específico do material
a = área da seção transversal do fio
ΔL = comprimento do elemento

---

* Deve-se observar que, no Sistema Internacional (SI) de unidades, geralmente se caracteriza um material dado pela sua massa específica ρ (massa por unidade de volume), em vez do peso específico γ. O peso específico do material pode, então, ser obtido da relação

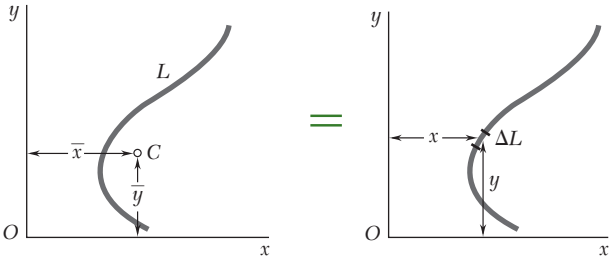
$$\gamma = \rho g$$

na qual g = 9,81 m/s^2. Uma vez que ρ é expresso em kg/m^3, observamos que γ será medido em (kg/m^3)(m/s^2), ou seja, em N/m^3.



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}\,A = \Sigma x\,\Delta A$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}\,A = \Sigma y\,\Delta A$$

Figura 5.3 Centroide de uma área.



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}L = \Sigma x\,\Delta L$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}L = \Sigma y\,\Delta L$$

Figura 5.4 Centroide de uma linha.

O centro de gravidade do fio coincide, então, com o *centroide C da linha L*, que define o formato do fio (Fig. 5.4). As coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centroide da linha L são obtidas das equações:

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \tag{5.4}$$

5.4 Momentos de primeira ordem em áreas e linhas

A integral $\int x\,dA$ nas Eqs. (5.3) da seção precedente é conhecida como o *momento de primeira ordem da área A em relação ao eixo y*, sendo representada por Q_y. De forma análoga, a integral $\int y\,dA$ define o *momento de primeira ordem da área A em relação ao eixo x*, sendo representada por Q_x. Temos:

$$Q_y = \int x\,dA \qquad Q_x = \int y\,dA \tag{5.5}$$

Comparando as Eqs. (5.3) com as Eqs. (5.5), notamos que os momentos de primeira ordem da área A podem ser determinados como produtos da área coordenadas de seu centroide:

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A \tag{5.6}$$

Resulta das Eqs. (5.6) que as coordenadas do centroide de uma área podem ser obtidas dividindo-se os momentos de primeira ordem pelo próprio valor da área. Os momentos de primeira ordem da área também são úteis em mecânica dos materiais na determinação de tensões de cisalhamento em vigas sob ação de carregamentos transversais. Por fim, observamos nas Eqs. (5.6) que, se o centroide de uma área estiver localizado sobre um eixo de coordenadas, o momento de primeira ordem da área em relação a esse eixo será nulo. Inversamente, se o momento de primeira ordem de uma área em relação a um eixo de coordenadas for nulo, o centroide da área estará localizado sobre esse eixo.

Relações semelhantes às Eqs. (5.5) e (5.6) podem ser usadas para definir os momentos de primeira ordem de uma linha em relação aos

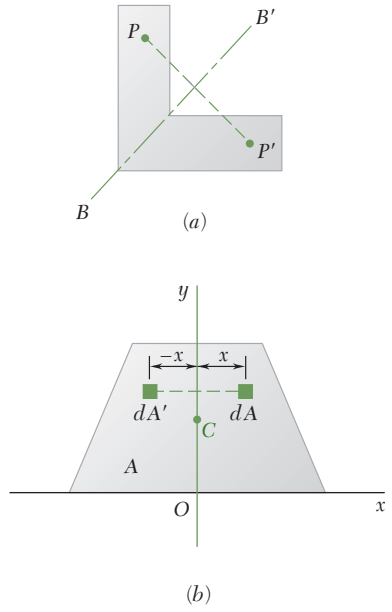


Figura 5.5

eixos de coordenadas e para expressar esses momentos como produtos do comprimento L da linha e das coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de seu centroide.

Diz-se que uma área A é *simétrica em relação a um eixo* BB' se para cada ponto P da área existir um ponto P' da mesma área tal que a linha PP' seja perpendicular a BB' e fique dividida em duas partes iguais por esse eixo (fig. 5.5*a*). Diz-se que uma linha L é simétrica em relação a um eixo BB' se satisfizer condições semelhantes. Quando uma área A ou uma linha L possuem um eixo de simetria BB', seu momento de primeira ordem em relação a BB' é zero, e seu centroide está sobre esse eixo. Por exemplo, no caso da área A da Fig. 5.5*b*, que é simétrica em relação ao eixo y, observamos que para cada elemento de superfície dA de abscissa x existe um elemento dA' de igual área e com abscissa $-x$. Por conseguinte, a integral na primeira das Eqs. (5.5) é zero e, portanto, $Q_y = 0$. Da primeira das relações (5.3) resulta também que $\bar{x} = 0$. Logo, se uma área A ou uma linha L tiverem um eixo de simetria, seu centroide C ficará localizado sobre esse eixo.

Observemos ainda que, se uma área ou linha tiver dois eixos de simetria, seu centroide C deverá se localizar na interseção dos dois eixos (Fig. 5.6). Essa propriedade permite-nos determinar imediatamente, tanto o centroide de áreas tais como círculos, elipses, quadrados, retângulos, triângulos equiláteros ou outras figuras simétricas, bem como o centroide de linhas com a forma da circunferência de um círculo, do perímetro de um quadrado, etc.

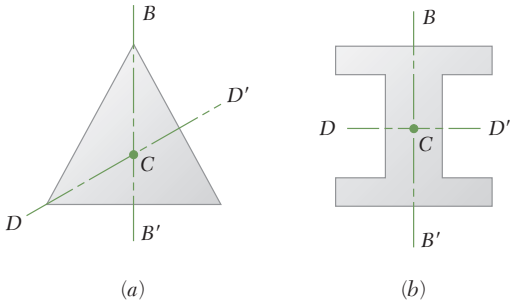


Figura 5.6

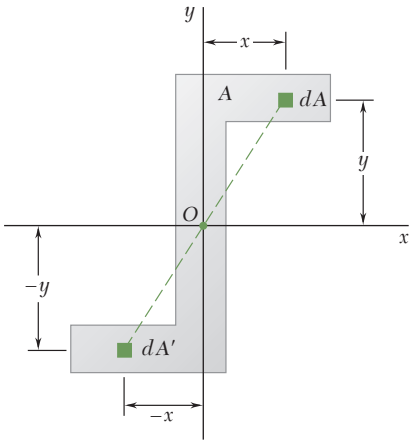


Figura 5.7

Diz-se que uma área é *simétrica em relação a um centro* O se para cada elemento de superfície dA de coordenadas x e y existir um elemento dA' de igual área com coordenadas $-x$ e $-y$ (Fig. 5.7). Tem-se, então, que as integrais nas Eqs. (5.5) são ambas nulas e que $Q_x = Q_y = 0$. Das Eqs. (5.3), tem-se também que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, ou seja, o centroide da superfície coincide com seu centro de simetria O. De forma análoga, se uma linha tem um centro de simetria O, o centroide da curva coincidirá com o centro O.

Deve-se observar que uma figura que apresenta um centro de simetria não necessariamente apresenta um eixo de simetria (Fig. 5:7), ao passo que uma figura que apresenta dois eixos de simetria não necessariamente apresenta um centro de simetria (Fig. 5.6*a*). Porém, se uma figura apresenta dois eixos de simetria formando um ângulo reto entre si, o ponto de interseção desses eixos será um centro de simetria (Fig. 5.6*b*).

A determinação de centroides de áreas e linhas assimétricas ou com um único eixo de simetria será discutida nas Seções 5.6 e 5.7. Nas Figs. 5.8A e B, são mostrados centroides de áreas e linhas de formas usuais.

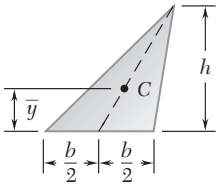
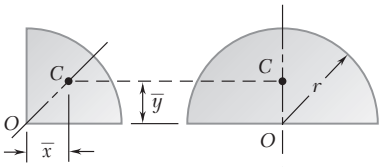
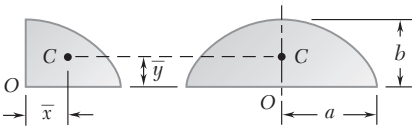
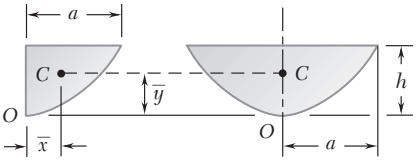
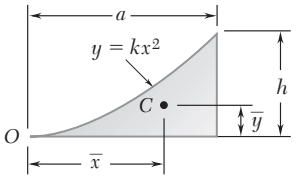
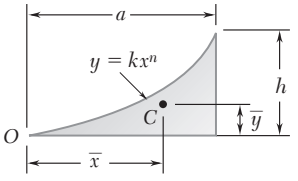
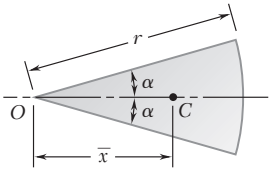
Formato		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Superfície triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Superfície de um quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Superfície semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Superfície de um quarto de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Superfície semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Superfície semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Superfície parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Superfície sob um arco parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Superfície sob um arco exponencial qualquer		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Setor circular		$\frac{2r\,\text{sen}\,\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Figura 5.8A Centroides de áreas de formatos usuais.

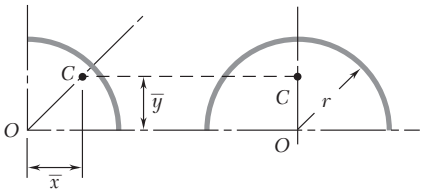
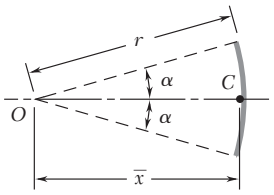
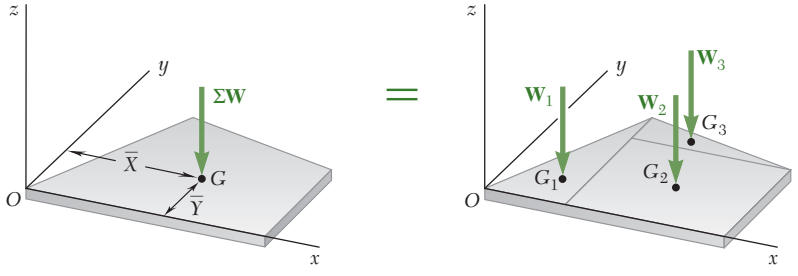
Formato		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Comprimento
Arco de um quarto de círculo		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Figura 5.8B Centroides de linhas de formatos mais comuns.

5.5 Placas e fios compostos

Em muitas situações, uma placa plana pode ser dividida em retângulos, triângulos ou outras formas usuais mostradas na Fig. 5.8A. Pode-se determinar a abscissa $\bar{X}$ do seu centro de gravidade G a partir das abscissas $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_n$ dos centros de gravidade de diversas partes, representando que o momento do peso de toda placa em relação ao eixo y é igual à soma dos momentos dos pesos das diversas partes em relação ao mesmo eixo (Fig. 5.9). A ordenada $\bar{Y}$ do centro de gravidade da placa é determinada de modo semelhante, igualando-se momentos em relação ao eixo x. Temos:

$$\Sigma M_y: \quad \bar{X}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \cdots + \bar{x}_n W_n$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{Y}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \cdots + \bar{y}_n W_n$$



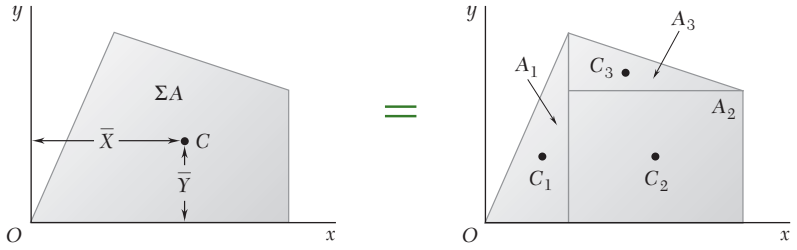
$$\Sigma M_y: \quad \bar{X}\,\Sigma W = \Sigma \bar{x} W$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{Y}\,\Sigma W = \Sigma \bar{y} W$$

Figura 5.9 Centro de gravidade de uma placa composta.

ou, de maneira compacta

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \tag{5.7}$$

Essas equações podem ser resolvidas para as coordenadas $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ do centro de gravidade da placa.



$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A$$
$$Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A$$

Figura 5.10 Centroide de uma área composta.

Se a placa é homogênea e de espessura uniforme, o centro de gravidade coincide com o centroide C da sua superfície. A abscissa $\bar{X}$ do centroide da superfície pode ser determinada observando-se que o momento de primeira ordem Q_y da superfície composta com relação ao eixo y pode ser expresso tanto como o produto de $\bar{X}$ pela área total quanto como a soma dos momentos de primeira ordem das áreas elementares em relação ao eixo y (Fig. 5.10). A ordenada $\bar{Y}$ do centroide é determinada de modo semelhante, considerando-se o momento de primeira ordem Q_x da área composta. Temos:

$$Q_y = \bar{X}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \cdots + \bar{x}_n A_n$$
$$Q_x = \bar{Y}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \cdots + \bar{y}_n A_n$$

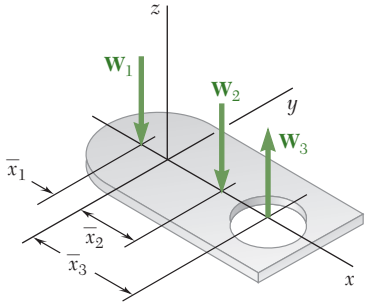
ou, de forma conduzida:

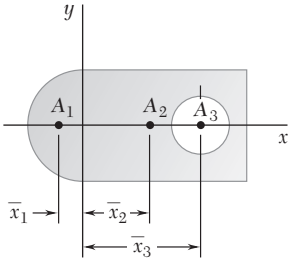
$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A \tag{5.8}$$

Essas equações fornecem os momentos de primeira ordem da superfície composta ou podem ser usadas para se obter as coordenadas $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ do seu centroide.

É preciso ter cuidado para se atribuir o sinal correto ao momento de cada área. Os momentos de primeira ordem de áreas, assim como os momentos de forças, podem ser positivos ou negativos. Por exemplo, uma superfície cujo centroide localiza-se à esquerda do eixo y terá um momento de primeira ordem negativo em relação a esse eixo. Além disso, deve-se atribuir um sinal negativo à área de uma superfície vazia (furo) (Fig. 5.11).

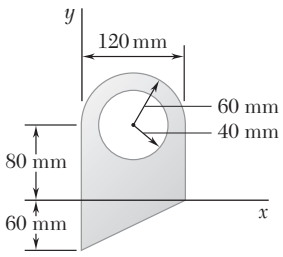
De modo análogo, em muitos casos é possível determinar o centro de gravidade de um fio composto ou o centroide de uma linha composta dividindo-se o fio ou a linha em elementos mais simples (ver o Problema Resolvido 5.2).





	$\bar{x}$	A	$\bar{x}A$
A_1 Semicírculo	−	+	−
A_2 Retângulo cheio	+	+	+
A_3 Furo circular	+	−	−

Figura 5.11

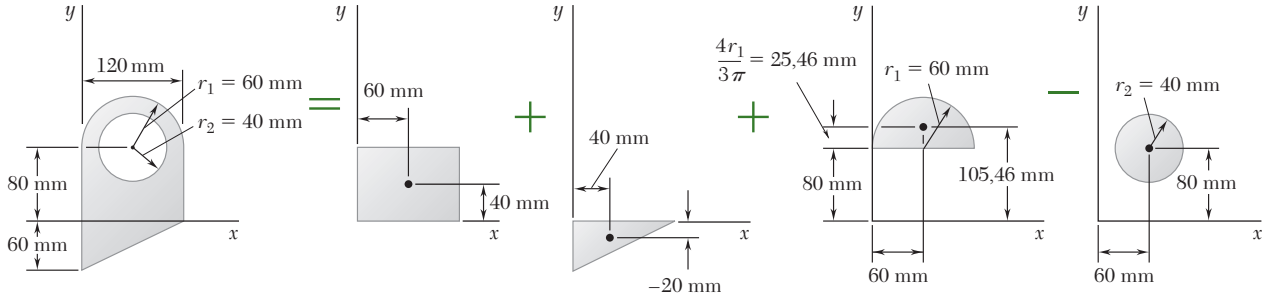


PROBLEMA RESOLVIDO 5.1

Para a área plana mostrada na figura, determine (*a*) os momentos de primeira ordem em relação aos eixos x e y, (*b*) a localização do centroide.

SOLUÇÃO

Componentes de área. A área é formada pela adição de um retângulo, um triângulo e um semicírculo e depois pela subtração de um círculo. De uso dos eixos de coordenadas mostrados, a área e as coordenadas do centroide de cada componente são determinadas e dispostas na tabela a seguir. A área do círculo é indicada como negativa, pois deve ser subtraída das demais áreas. Notemos que a coordenada $\bar{y}$ do centroide do triângulo é negativa para os eixos mostrados. Os momentos de primeira ordem das áreas componentes em relação aos eixos de coordenadas são também calculados e dispostos na tabela.

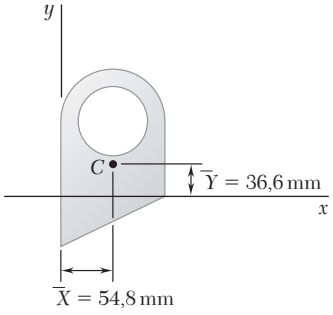


Componente	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Retângulo	$(120)(80) = 9{,}6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triângulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3{,}6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5{,}655 \times 10^3$	60	105,46	$+339{,}3 \times 10^3$	$+596{,}4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5{,}027 \times 10^3$	60	80	$-301{,}6 \times 10^3$	$-402{,}2 \times 10^3$
	$\Sigma A = 13{,}828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757{,}7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506{,}2 \times 10^3$

a. Momentos de primeira ordem da área. Usando as Eqs. (5.8), temos:

$$Q_x = \Sigma\bar{y}A = 506{,}2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_x = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \blacktriangleleft$$

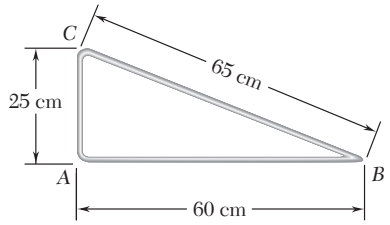
$$Q_y = \Sigma\bar{x}A = 757{,}7 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_y = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \blacktriangleleft$$



b. Localização do centroide. Substituindo os valores dados na tabela nas equações que definem o centroide de uma área composta, obtemos:

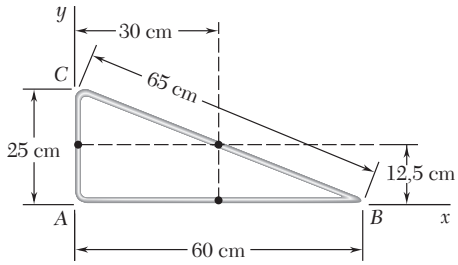
$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A: \qquad \bar{X}(13{,}828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757{,}7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{X} = 54{,}8 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A: \qquad \bar{Y}(13{,}828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506{,}2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{Y} = 36{,}6 \text{ mm} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 5.2

A figura mostrada é feita de um pedaço de arame fino e homogêneo. Determine a localização do centro de gravidade.



SOLUÇÃO

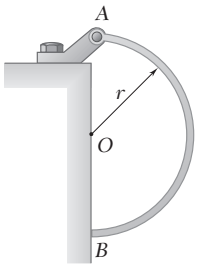
Como a figura é formada por um arame homogêneo, seu centro de gravidade coincide com o centroide de linha correspondente; logo, esse centroide será determinado. Escolhendo os eixos de coordenadas mostrados na figura, com origem em *A*, determinamos as coordenadas do centroide de cada segmento de reta e calculamos os momentos de primeira ordem em relação aos eixos de coordenadas.

Segmento	L, in.	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{x}L$, in^2	$\bar{y}L$, in^2
AB	60	30	0	1.800	0
BC	65	30	12,5	1.950	812,5
CA	25	0	12,5	0	312,5
	$\Sigma L = 150$			$\Sigma \bar{x}L = 3.750$	$\Sigma \bar{y}A = 1.125$

Substituindo os valores obtidos da tabela nas equações de definição do centroide de uma linha composta, obtemos:

$\bar{X}\Sigma L = \Sigma \bar{x}L$: $\quad \bar{X}(150\text{ cm}) = 3{,}750\text{ cm}^2 \quad \bar{X} = 25\text{ cm}$ ◀

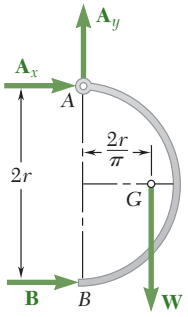
$\bar{Y}\Sigma L = \Sigma \bar{y}L$: $\quad \bar{Y}(150\text{ cm}) = 1{,}125\text{ cm}^2 \quad \bar{Y} = 7{,}5\text{ cm}$ ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 5.3

Uma barra semicircular uniforme de peso **W** e raio r é ligada a um pino em A e repousa sobre uma superfície sem atrito em B. Determine as reações em A e B.

SOLUÇÃO



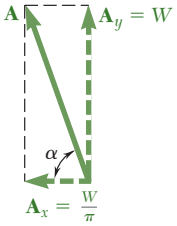


Diagrama de corpo livre. Um diagrama de corpo livre da barra é mostrado na figura. As forças exercidas sobre a barra são o peso próprio de **W**, aplicado no centro de gravidade G (cuja posição é obtida da Fig. 5.8B); uma reação em A, representada pelos seus componentes $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$; e uma reação horizontal em B.

Equação de equilíbrio.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad B(2r) - W\left(\frac{2r}{\pi}\right) = 0$$

$$B = +\frac{W}{\pi} \qquad \mathbf{B} = \frac{W}{\pi}\rightarrow \blacktriangleleft$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad A_x + B = 0$$

$$A_x = -B = -\frac{W}{\pi} \qquad \mathbf{A}_x = \frac{W}{\pi}\leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y - W = 0 \qquad \mathbf{A}_y = W\uparrow$$

Somando-se os dois componentes da reação em A:

$$A = \left[W^2 + \left(\frac{W}{\pi}\right)^2\right]^{1/2} \qquad A = W\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)^{1/2} \blacktriangleleft$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{W}{W/\pi} = \pi \qquad \alpha = \text{tg}^{-1}\pi \blacktriangleleft$$

As respostas, também podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} = 1{,}049W\,\measuredangle 72{,}3° \qquad \mathbf{B} = 0{,}318W\rightarrow \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, desenvolvemos as equações gerais para a determinação dos centros de gravidade de corpos e fios bidimensionais [Eqs. (5.2)], dos centroides de áreas planas [Eqs. (5.3)] e das linhas [Eqs. (5.4)]. Nos problemas a seguir, devemos determinar os centroides de áreas e linhas compostas e determinar os momentos de primeira ordem de áreas de placas compostas [Eqs. (5.8)].

1. Determinação dos centroides de áreas e linhas compostas. Os Problemas Resolvidos 5.1 e 5.2 ilustram o procedimento que devemos seguir para resolver problemas desse tipo. Todavia, há vários pontos que devem ser ressaltados.

a. O primeiro passo na solução deve ser decidir como construir a área ou linha dada a partir das formas mais comuns da Fig. 5.8. Devemos considerar que, para áreas planas, frequentemente é possível construir uma determinada forma de mais de um modo. Além disso, a indicação dos vários componentes (como foi feito no Problema Resolvido 5.1) irá nos auxiliar a estabelecer corretamente seus centroides e áreas ou comprimentos. Não nos esqueçamos de que podemos tanto adicionar como subtrair áreas para se obter a forma desejada.

b. Recomendamos totalmente que, para cada problema, se construa uma tabela contendo as áreas ou comprimentos e as respectivas coordenadas dos centroides. É essencial que nos lembremos de que áreas que são "removidas" (por exemplo, furos) sejam tratadas como negativas. Além disso, é necessário incluir o sinal das coordenadas negativas. Portanto, devemos sempre indicar cuidadosamente o local de origem do sistema de coordenadas.

c. Sempre que possível, usar propriedades de simetria [Seção 5.4] para ajudar na determinação de um centroide.

d. Nas fórmulas para um setor circular e para o arco de um círculo na Fig. 5.8, o ângulo α deve sempre ser expresso em radianos.

2. Cálculo dos momentos de primeira ordem de uma área. Os procedimentos para determinar o centroide de uma área e os momentos de primeira ordem de uma área são semelhantes; para o último, porém, não é necessário calcular o valor da área total. Além disso, conforme observamos na Seção 5.4, devemos considerar que o momento de primeira ordem de uma área em relação a um eixo que passa pelo centroide é nulo.

3. Resolução de problemas que envolvam o centro de gravidade. Os corpos considerados nos problemas a seguir são homogêneos; logo, seus centros de gravidade e seus centroides coincidem. Além disso, quando um corpo suspenso por um único pino está em equilíbrio, o pino e o centro de gravidade do corpo devem situar-se sobre a mesma linha vertical.

Pode parecer que muitos dos problemas desta seção têm pouco a ver com o estudo de mecânica. No entanto, a capacidade de determinar o centroide de formas compostas será essencial em vários tópicos que encontraremos mais adiante.

PROBLEMAS

5.1 a 5.9 Determine o centroide das áreas planas a seguir.

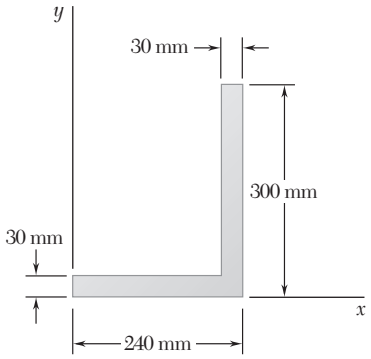


Figura P5.1

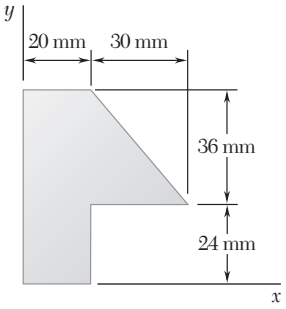


Figura P5.2

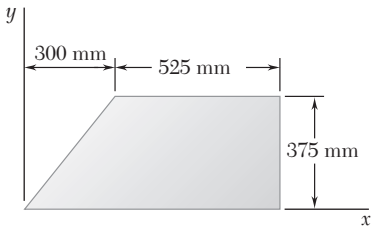


Figura P5.3

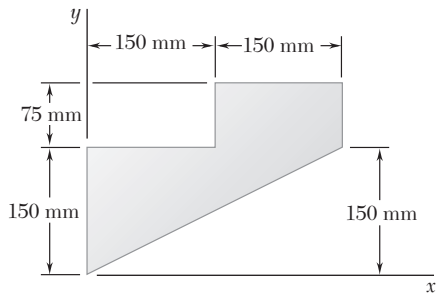


Figura P5.4

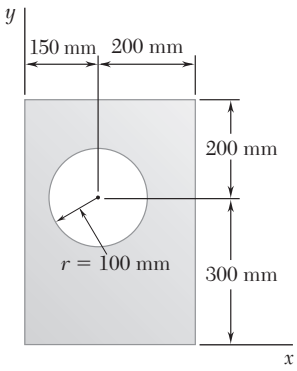


Figura P5.5

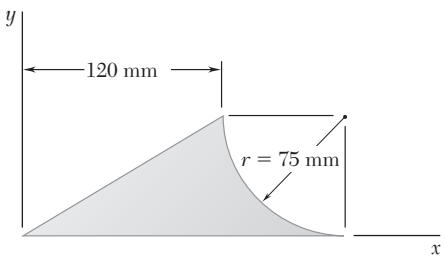


Figura P5.6

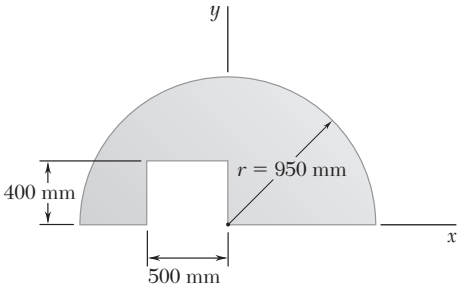


Figura *P5.7*

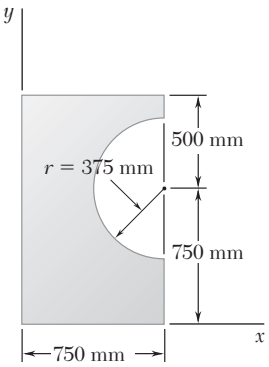


Figura *P5.8*

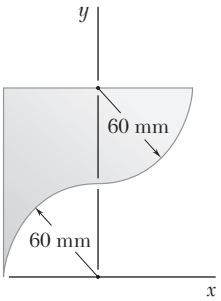


Figura P5.9

5.10 a 5.15 Determine o centroide das áreas planas a seguir.

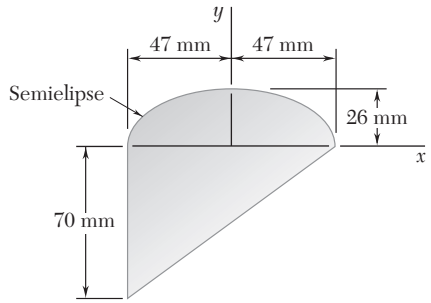


Figura P5.10

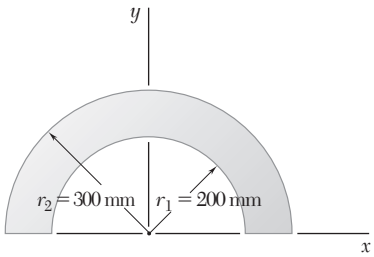


Figura P5.11

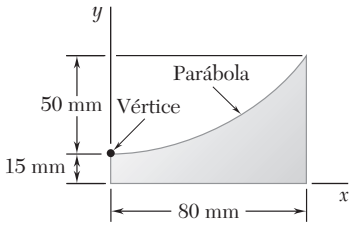


Figura P5.12

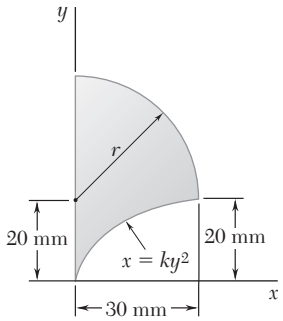


Figura *P5.13*

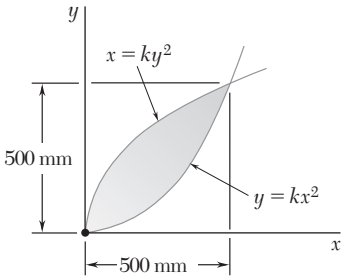


Figura P5.14

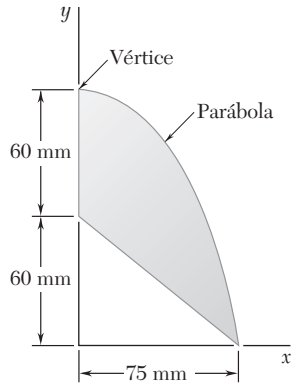


Figura *P5.15*

5.16 Determine a coordenada do centroide da área sombreada em termos de r_1, r_2 e α.

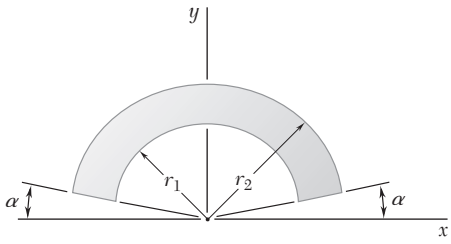


Figura P5.16 e 5.17

5.17 Demostre que à medida que r_1 aproxima de r_2, a localização do centroide, por sua vez, o aproxima de um arco circular de raio $(r_1 + r_2)/2$.

5.18 Para a área mostrada, determine a razão a/b para que $\bar{x} = \bar{y}$.

5.19 Para a área semianular do Problema 5.11, determine a razão r_2/r_1 tal que $\bar{y} = 3r_1/4$.

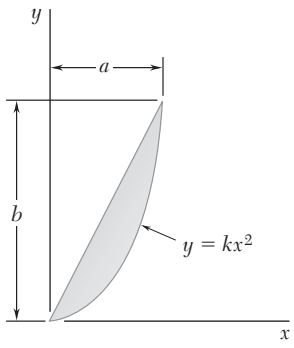


Figura P5.18

5.20 Uma viga é composta de quatro placas aparafusadas a quatro cantoneiras de 60 × 60 × 12 mm, como mostra a figura. Os parafusos são igualmente espaçados ao longo da viga, que sustenta uma carga vertical. Em mecânica dos materiais, demonstra-se que as forças de cisalhamento exercidas sobre os parafusos em A e B são proporcionais aos momentos de primeira ordem em relação ao eixo centroide x das áreas sombreadas em vermelho, mostradas nas partes a e b da figura. Sabendo que a força exercida sobre o parafuso em A é de 280 N, determine a força exercida sobre o parafuso em B.

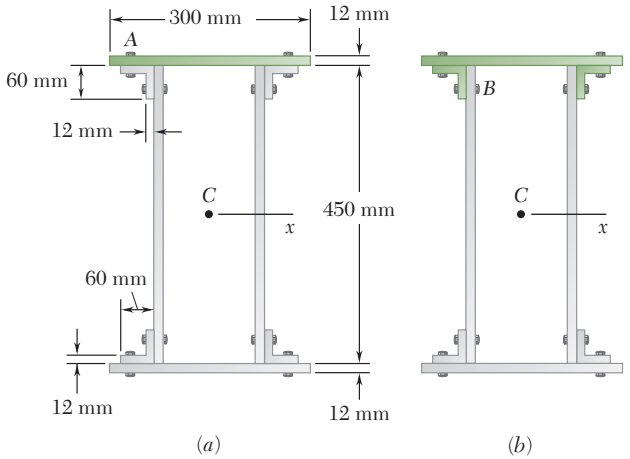


Figura P5.20

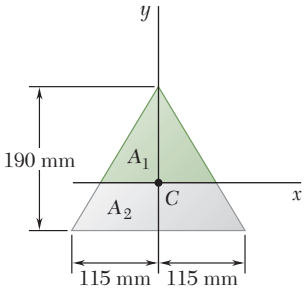


Figura P5.21

5.21 e 5.22 O eixo x horizontal passa pelo centroide C da área mostrada na figura e divide a superfície em duas áreas componentes, A_1 e A_2. Determine o momento de primeira ordem de cada componente de superfície em relação ao eixo x e explique os resultados obtidos.

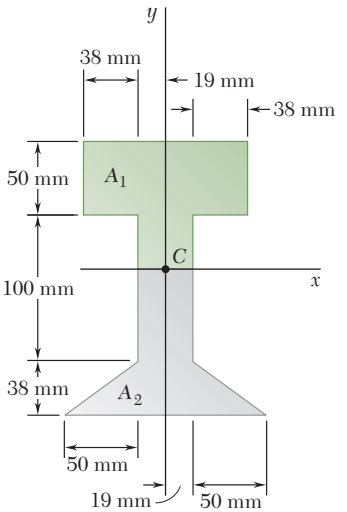


Figura P5.22

5.23 O momento de primeira ordem da superfície sombreada em relação ao eixo x é representado por Q_x. (*a*) Determine Q_x em termos de b, c e a distância y da base da área sombreada até o eixo x. (*b*) Para qual valor de y o valor de Q_x é máximo e qual é esse valor máximo?

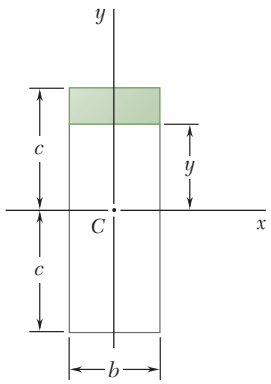


Figura *P5.23*

5.24 a *5.27* Um arame homogêneo e fino é dobrado de modo a formar o perímetro da figura indicada. Determine o seu centro de gravidade.

5.24 Fig. P5.1.
5.25 Fig. P5.2.
5.26 Fig. P5.3.
5.27 Fig. P5.7.

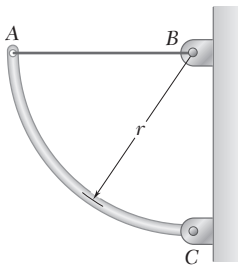


Figura P5.28

5.28 Uma haste circular uniforme de peso 35 N e raio 250 mm é fixada pelo pino C e pelo cabo AB. Determine (*a*) a tração no cabo, (*b*) a reação em C.

5.29 O elemento $ABCDE$ é um componente de um móbile e é formado a partir de uma única peça de tubo de alumínio. Sabendo que o elemento é suportado em C e que $l = 2$ m, determine a distância d de modo que a parte BCD do elemento seja horizontal.

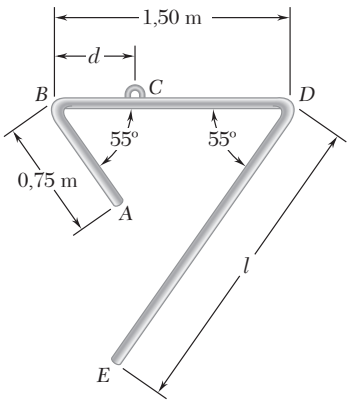


Figura P5.29 e P5.30

5.30 O elemento $ABCDE$ é um componente de um móbile e é formado a partir de uma única peça de tubo de alumínio. Sabendo que o elemento é suportado em C e que $d = 0{,}50$ m, determine o comprimento l do braço DE de modo que esse trecho do elemento seja horizontal.

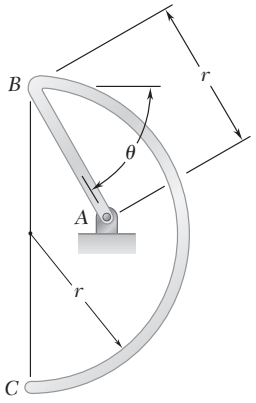


Figura P5.31

5.31 O arame homogêneo *ABC* é dobrado em forma de arco semicircular e uma seção reta, como mostrado na figura, e é apoiado na articulação em *A*. Determine o valor do ângulo θ para que o arame esteja em equilíbrio na posição indicada.

5.32 Determine a distância h para qual o centroide da área sombreada fique o mais distante possível da linha BB', quando (*a*) $k = 0{,}10$, (*b*) $k = 0{,}80$.

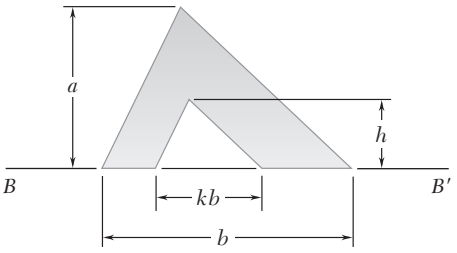


Figura P5.32 e P5.33

5.33 Sabendo que a distância h foi escolhida para maximizar a distância $\bar{y}$, que vai da linha BB' ao centroide da área sombreada, mostre que $\bar{y} = 2h/3$.

5.6 Determinação de centroides por integração

O centroide de uma área limitada por curvas analíticas (isto é, curvas definidas por equações algébricas) é geralmente determinado pelo cálculo das integrais nas Eqs. (5.3) da Seção 5.3.

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \tag{5.3}$$

Se o elemento de área dA é um pequeno retângulo de lados dx e dy, o cálculo de cada uma dessas integrais requer uma *integração dupla* em relação a x e y. Também será necessária uma integração dupla ao usar coordenadas polares nas quais dA é um pequeno elemento de lados dr e $r\,d\theta$.

No entanto, em muitos casos é possível determinar as coordenadas do centroide de uma superfície efetuando-se uma integração simples. Consegue-se isso escolhendo dA como sendo um retângulo estreito (ou uma tira) ou um setor circular estreito (ou em forma de fatia de bolo) (Fig. 5.12); o centroide do retângulo estreito é localizado em seu centro e o centroide do setor estreito, a uma distância $\frac{2}{3}r$ do vértice (como se fosse um triângulo). As coordenadas do centroide da área sob consideração são obtidas demonstrando que o momento de primeira ordem de toda área em relação a cada um dos eixos de coordenadas é igual à soma (ou integral) dos momentos correspondentes dos elementos de superfície. Representando por $\bar{x}_{el}$ e $\bar{y}_{el}$ as momentos coordenadas do centroide do elemento dA, temos:

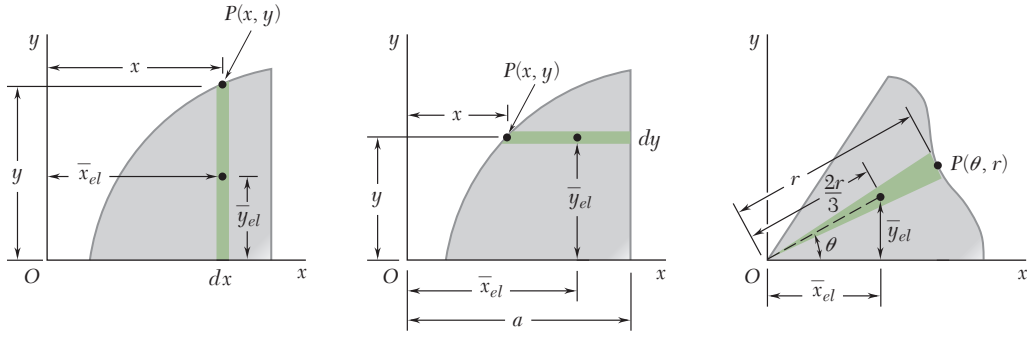
$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA$$
$$Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA \tag{5.9}$$

Se a área A não for ainda conhecida, também poderá ser calculada com esses elementos.

As coordenadas $\bar{x}_{el}$ e $\bar{y}_{el}$ do centroide do elemento de área dA devem ser expressas em termos das coordenadas de um ponto localizado sobre a curva que limita a área sob consideração. Além disso, a área dA do elemento deve ser expressa em termos das coordenadas desse ponto e dos diferenciais apropriados. Isso foi feito na Fig. 5.12 para três tipos mais comuns de elementos; o elemento do setor circular da parte c deve ser usado quando a equação da curva que limita a área é dada em coordenadas polares. As expressões apropriadas devem ser substituídas nas fórmulas (5.9) e a equação da curva limite deve ser usada para expressar uma das coordenadas em termos da outra. Assim, a integração dupla ficará reduzida a uma integração simples. Uma vez determinada a área e calculadas as integrais nas Eqs. (5.9), essas equações podem ser resolvidas para as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centroide da área.

Quando uma curva é definida por uma equação algébrica, seu centroide pode ser determinado pelo cálculo das integrais nas Eqs. (5.4) da Seção 5.3.

$$\bar{x}L = \int x\, dL \qquad \bar{y}L = \int y\, dL \tag{5.4}$$



$\bar{x}_{el} = x$ $\quad \bar{y}_{el} = y/2$ $\quad dA = y\,dx$ $\quad (a)$

$\bar{x}_{el} = \dfrac{a + x}{2}$ $\quad \bar{y}_{el} = y$ $\quad dA = (a - x)\,dy$ $\quad (b)$

$\bar{x}_{el} = \dfrac{2r}{3}\cos\theta$ $\quad \bar{y}_{el} = \dfrac{2r}{3}\operatorname{sen}\theta$ $\quad dA = \dfrac{1}{2}r^2\,d\theta$ $\quad (c)$

Figura 5.12 Centroides e áreas de elementos diferenciais.

O diferencial de comprimento dL deve ser substituído por uma das expressões a seguir, dependendo de qual coordenada, x, y ou θ, for escolhida como variável independente da equação, usada para definir essa linha (pode-se deduzir essas expressões aplicando o teorema de Pitágoras):

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Após usar a equação da linha para expressar uma das coordenadas em termos da outra, pode-se efetuar a integração e resolver as Eqs. (5.4) para as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centroide da linha.

5.7 Teorema de Pappus-Guldinus

Foto 5.2 Os tanques de armazenagem mostrados na foto são todos corpos sólidos de revolução. Logo, é possível determinar as áreas de suas superfícies e seus volumes aplicando-se os teoremas de Pappus-Guldinus.

Esses teoremas que foram formulados inicialmente pelo geômetra grego Pappus no século III d.C. e retomados posteriormente pelo matemático suíço Guldinus, ou Guldin (1577-1643), tratam de superfícies e corpos de revolução.

Uma *superfície de revolução* é uma superfície que pode ser gerada pela rotação de uma curva no plano (curva geratriz) em torno de um eixo fixo.

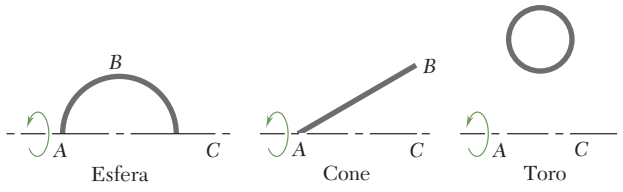


Figura 5.13

Por exemplo, na (Fig. 5.13), a superfície de uma esfera pode ser obtida pela rotação de um arco semicircular ABC em torno do diâmetro AC, a superfície de um cone pela rotação de uma linha reta AB em torno do eixo AC e a superfície de um toro ou anel pela rotação de uma circunferência de um círculo em torno de um eixo que não o intercepte. Um *sólido de revolução* é um sólido que pode ser criado pela rotação de uma superfície plana em torno de um eixo fixo. Conforme mostra a Fig. 5.14, uma esfera, um cone e um toro podem ser gerados pela rotação da forma apropriada em torno do eixo indicado.

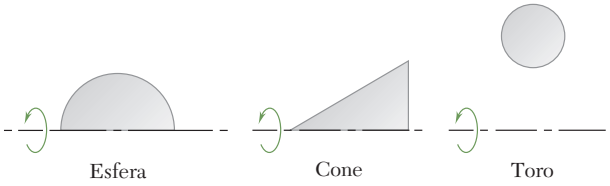


Figura 5.14

TEOREMA I *A área de uma superfície de revolução é igual ao produto do comprimento da curva geratriz pela distância percorrida pelo centroide da curva durante a geração da superfície.*

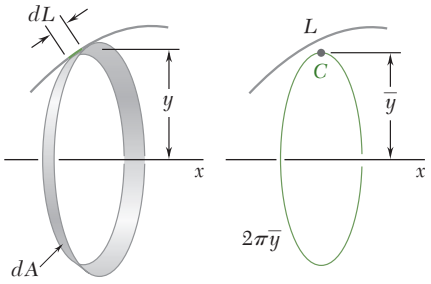


Figura 5.15

Demonstração. Considere um elemento dL da curva L (Fig. 5.15), girado em torno do eixo x. A área dA gerada pelo elemento dL é igual a $2\pi y\,dL$. Logo, a área total gerada por L é $A = \int 2\pi y\,dL$. Voltando à Seção 5.3, onde determinamos que a integral $\int \bar{y}\,dL$ é igual a yL, temos, então:

$$A = 2\pi \bar{y} L \tag{5.10}$$

onde $2\pi\bar{y}$ é a distância percorrida pelo centroide de L (Fig. 5.15). Deve-se observar que a curva geratriz não deve cruzar o eixo em torno do qual está sendo girada; nesse caso, as duas seções de curva em cada lado do eixo criariam áreas de sinais opostos e o teorema não se aplicaria.

TEOREMA II *O volume de um sólido de revolução é igual ao produto da área da superfície geratriz pela distância percorrida pelo centroide da superfície durante a geração do sólido.*

Demonstração. Considere um elemento dA da superfície A girado em torno do eixo x (Fig. 5.16). O volume dV gerado pelo elemento dA é igual a $2\pi y\,dA$. Logo, o volume total gerado por A é $V = \int 2\pi y\,dA$ e sendo a integral $\int y\,dA$ igual a $\bar{y}A$ (Seção 5.3), temos:

$$V = 2\pi \bar{y} A \tag{5.11}$$

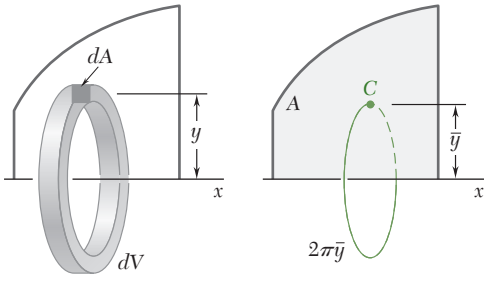
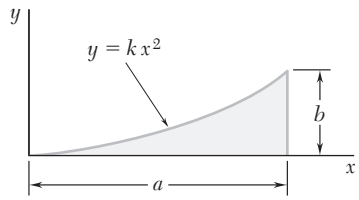


Figura 5.16

onde $2\pi\bar{y}$ é a distância percorrida pelo centroide de A. Novamente, é importante observar que o teorema não se aplica caso o eixo de rotação intercepte a supercífie geratriz.

Os teoremas de Pappus-Guldinus proporcionam um modo simples de se calcularem as áreas de superfícies de revolução e os volumes de sólidos de revolução. Reciprocamente, podem ser usados para se determinar o centroide de uma curva plana quando a área da superfície gerada pela curva for conhecida ou para se determinar o centroide de uma área plana quando o volume do sólido gerado for conhecido (ver o Problema Resolvido 5.8).



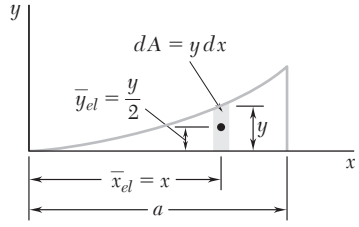
PROBLEMA RESOLVIDO 5.4

Determine por integração direta a localização do centroide de um arco parabólico.

SOLUÇÃO

Determinação da constante k. O valor de k é determinado por substituição de $x = a$ e $y = b$ na equação dada. Temos $b = ka^2$ ou $k = b/a^2$. Logo, a equação da curva fica:

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}$$



Elemento diferencial vertical. Escolhemos o elemento diferencial mostrado na figura e encontramos sua área total.

$$A = \int dA = \int y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{ab}{3}$$

O momento de primeira ordem do elemento diferencial em relação ao eixo y é $\bar{x}_{el}dA$; assim, o momento de primeira ordem de toda a área em relação ao eixo y é

$$Q_y = \int \bar{x}_{el}\,dA = \int xy\,dx = \int_0^a x\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^2b}{4}$$

Uma vez que $Q_y = \bar{x}A$, temos:

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA \qquad \bar{x}\frac{ab}{3} = \frac{a^2b}{4} \qquad \bar{x} = \tfrac{3}{4}a \;\blacktriangleleft$$

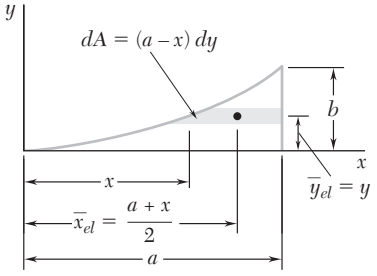
De modo análogo, o momento de primeira ordem do elemento diferencial em relação ao eixo x é $\bar{y}_{el}dA$ e o momento de primeira ordem de toda a superfície é:

$$Q_x = \int \bar{y}_{el}\,dA = \int \frac{y}{2}y\,dx = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^2 dx = \left[\frac{b^2}{2a^4}\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

Uma vez que $Q_x = \bar{y}A$, temos:

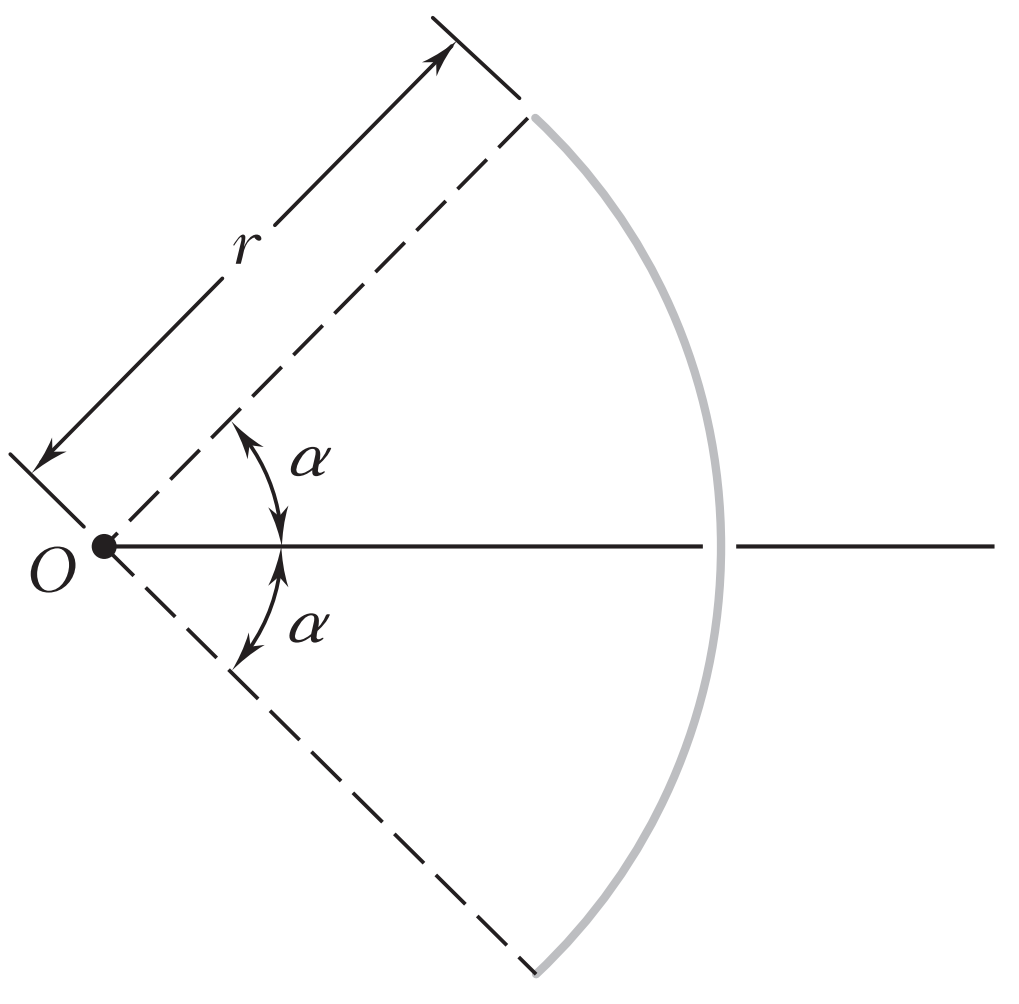
$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA \qquad \bar{y}\frac{ab}{3} = \frac{ab^2}{10} \qquad \bar{y} = \tfrac{3}{10}b \;\blacktriangleleft$$

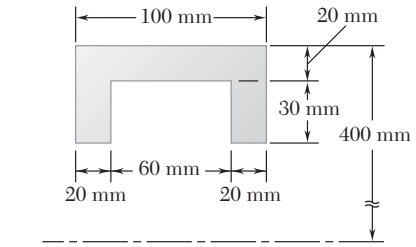
Elemento diferencial horizontal. Podem-se obter os mesmos resultados considerando-se um elemento horizontal. Os momentos de primeira ordem da área são:



$$Q_y = \int \bar{x}_{el}\,dA = \int \frac{a+x}{2}(a-x)\,dy = \int_0^b \frac{a^2-x^2}{2}dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b}y\right)dy = \frac{a^2b}{4}$$
$$Q_x = \int \bar{y}_{el}\,dA = \int y(a-x)\,dy = \int y\left(a - \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}\right)dy =$$
$$= \int_0^b \left(ay - \frac{a}{b^{1/2}}y^{3/2}\right)dy = \frac{ab^2}{10}$$

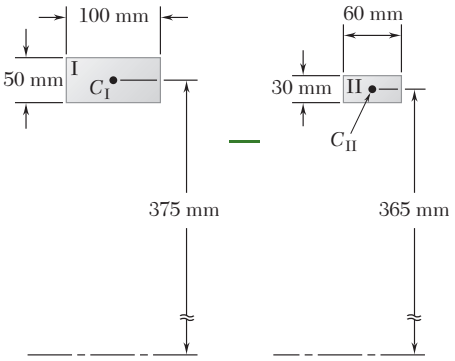
Para determinar $\bar{x}$ e $\bar{y}$, substitua novamente as expressões obtidas nas aquações de definição do centroide de área.


r
α
O
α



PROBLEMA RESOLVIDO 5.7

O diâmetro externo de uma polia é 0,8 m e a seção transversal da sua borda é mostrada na figura. Sabendo que a polia é feita de aço e que sua massa específica é $\rho = 7{,}85 \times 10^3$ kg/m^3, determine a massa e o peso da borda.



SOLUÇÃO

Pode-se determinar o volume da borda pela aplicação do Teorema II de Pappus-Guldinus, o qual estabelece que o volume é igual ao produto da área da seção transversal pela distância percorrida pelo seu centroide em uma revolução completa. No entanto, pode-se determinar o volume de modo mais fácil se observarmos que a seção transversal pode ser formada pelo retângulo I, cuja área é positiva, e pelo retângulo II, cuja área é negativa.

	Área, mm^2	$\bar{y}$, mm	Distância percorrida por C, mm	Volume, mm^3
I	+5.000	375	$2\pi(375) = 2.356$	$(5.000)(2.356) = 11{,}78 \times 10^6$
II	−1.800	365	$2\pi(365) = 2.293$	$(-1.800)(2.293) = -4{,}13 \times 10^6$
				Volume da borda $= 7{,}65 \times 10^6$

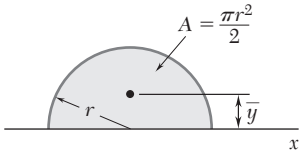
Como 1 mm $= 10^{-3}$ m, temos 1 mm$^3 = (10^{-3}\text{ m})^3 = 10^{-9}$ m^3 e obtemos $V = 7{,}65 \times 10^6$ mm$^3 = (7{,}65 \times 10^6)(10^{-9}\text{ m}^3) = 7{,}65 \times 10^{-3}$ m^3.

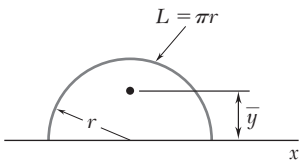
$$m = \rho V = (7{,}85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(7{,}65 \times 10^{-3}\text{ m}^3) \qquad m = 60{,}0 \text{ kg} \blacktriangleleft$$

$$W = mg = (60{,}0 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 589 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \qquad W = 589 \text{ N} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 5.8

Aplicando os teoremas de Pappus-Guldinus, determine (*a*) o centroide de uma superfície semicircular, (*b*) o centroide de um arco semicircular. Lembre-se de que o volume e a área da surpefície de uma esfera são $\frac{4}{3}\pi r^3$ e $4\pi r^2$, respectivamente.





SOLUÇÃO

O volume de uma esfera é igual ao produto da área de um semicírculo pela distância percorrida pelo centroide do semicírculo em uma revolução em torno do eixo x.

$$V = 2\pi\bar{y}A \qquad \tfrac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\bar{y}(\tfrac{1}{2}\pi r^2) \qquad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \blacktriangleleft$$

De modo análogo, a área de uma esfera é igual ao produto do comprimento do semicírculo geratriz pela distância percorrida pelo seu centroide em uma revolução.

$$A = 2\pi\bar{y}L \qquad 4\pi r^2 = 2\pi\bar{y}(\pi r) \qquad \bar{y} = \frac{2r}{\pi} \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas propostos para esta seção aplicaremos as equações

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \tag{5.3}$$

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \tag{5.4}$$

para determinar os centroides de áreas e linhas planas, respectivamente. Aplicaremos também os teoremas de Pappus-Guldinus (Seção 5.7) para determinar as áreas de superfícies de revolução e os volumes de sólidos de revolução.

1. Determinação dos centroides de áreas e linhas por integração direta. Ao resolver problemas desse tipo, devemos seguir o método de resolução adotado nos Problemas Resolvidos 5.4 e 5.5: calcular A ou L, determinar os momentos de primeira ordem da área ou linha e resolva as Eqs. (5.3) ou (5.4) para as coordenadas do centroide. Além disso, devemos dar atenção especial aos seguintes pontos:

a. Iniciar a solução definindo ou determinando cuidadosamente cada termo nas fórmulas integrais aplicáveis. Recomendamos totalmente mostrar em um esboço da superfície ou linha dada sua escolha para dA ou dL e as distâncias do centroide.

b. Conforme explicamos na Seção 5.6, os símbolos x e y nas equações acima representam as *coordenadas do centroide* dos elementos diferenciais dA e dL. É importante reconhecer que as coordenadas do centroide de dA não são iguais às coordenadas de um ponto localizado sobre a curva que limita a área que está em destaque. Deve-se estudar a Fig. 5.12 criteriosamente até compreender por completo esse ponto importante.

c. Buscando talvez simplificar ou reduzir seus cálculos, examinar sempre a forma da superfície ou curva dada antes de definir o elemento diferencial que será usado. Por exemplo, às vezes é preferível usar elementos retangulares horizontais em vez de verticais. Além disso, em geral é vantajoso usar coordenadas polares quando uma linha ou área apresenta simetria circular.

d. Embora a maioria das integrações desta seção sejam diretas, às vezes pode ser necessário empregar técnicas mais avançadas, tais como substituições trigonométricas ou integração por partes. Como é lógico, o método mais rápido para se determinar integrais difíceis é usando uma tabela de integrais.

2. Aplicação dos teoremas de Pappus-Guldinus. Conforme mostramos nos Problemas Resolvidos 5.6 a 5.8, esses teoremas simples, mas bastante úteis, possibilitam que apliquemos nosso conhecimento sobre centroides no cálculo de áreas e volumes. Embora os teoremas façam referência à distância percorrida pelo centroide e ao comprimento da curva geratriz ou à área da superfície geratriz, as equações resultantes [(5.10) e (5.11)] contêm os produtos dessas grandezas, que nada mais são que os momentos de primeira ordem de uma linha (yL) ou de uma área (yA). Logo, para problemas em que a linha ou área geratriz é composta de várias formas mais comuns, precisamos somente determinar $\bar{y}L$ ou $\bar{y}A$; não é preciso calcular o comprimento da linha geratriz nem o valor da área da geratriz.

PROBLEMAS

5.34 a 5.36 Determine por integração direta os centroides das áreas a seguir. Determine sua resposta em termos de a e h.

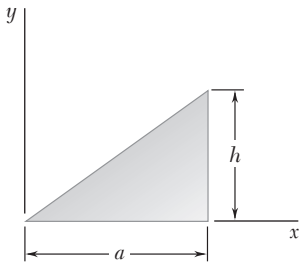


Figura P5.34

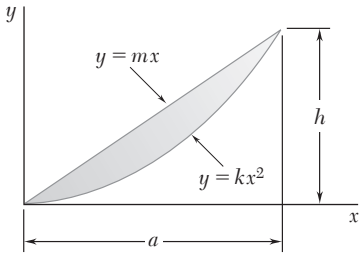


Figura P5.35

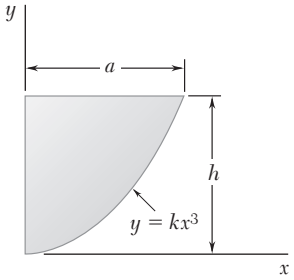


Figura P5.36

5.37 a 5.39 Determine por integração direta o centroide da área mostrada na figura.

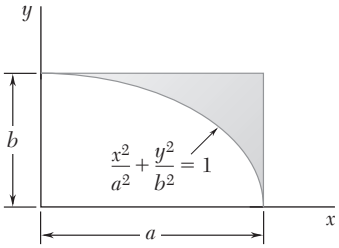


Figura P5.37

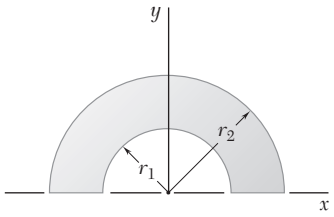


Figura P5.38

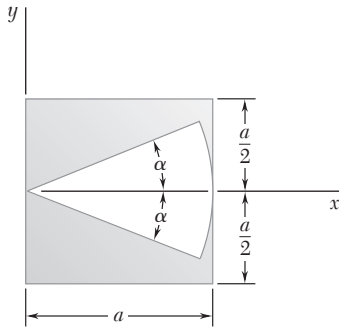


Figura P5.39

5.40 e 5.41 Determine por integração direta os centroides das áreas a seguir. Determine sua resposta em termos de a e b.

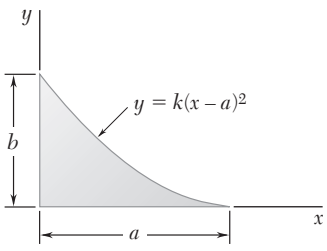


Figura P5.40

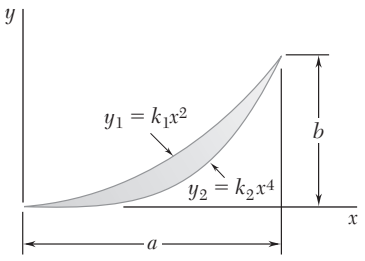


Figura P5.41

5.42 Determine por integração direta o centroide da área mostrada na figura.

5.43 e 5.44 Determine por integração direta os centroides das áreas a seguir. Determine sua resposta em termos de a e b.

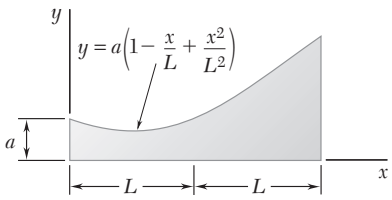


Figura P5.42

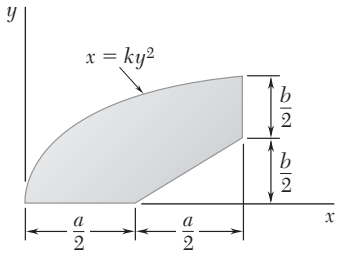


Figura P5.43

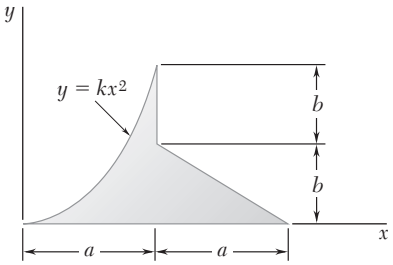


Figura P5.44

5.45 e 5.46 Um arame homogêneo é dobrado nas formas a seguir. Determine por integração direta a coordenada x de seu centroide.

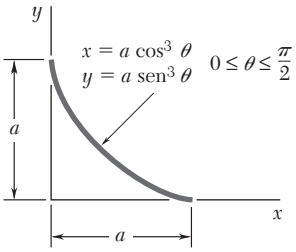


Figura P5.45

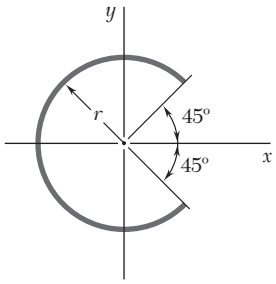


Figura P5.46

***5.47** Um arame homogêneo é dobrado na forma mostrada na figura. Determine por integração direta a coordenada x de seu centroide. Expresse sua resposta em termos de a.

***5.48 e *5.49** Determine por integração direta os centroides das áreas a seguir.

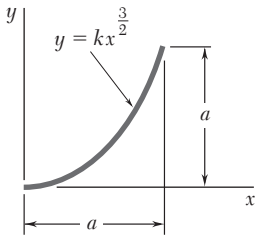


Figura P5.47

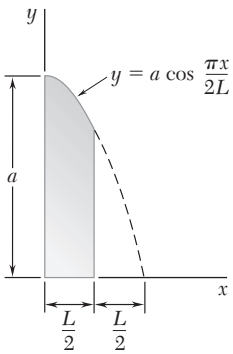


Figura P5.48

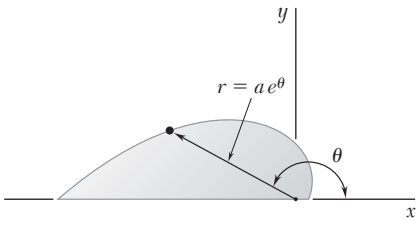


Figura P5.49

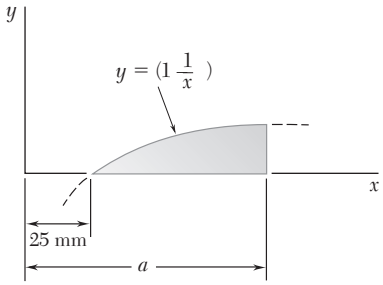


Figura P5.50 e P5.51

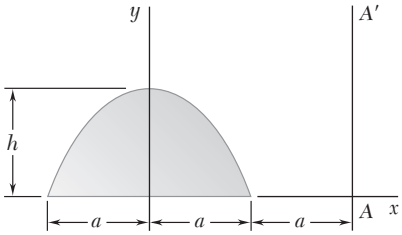


Figura *P5.55*

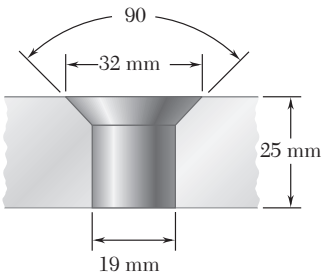


Figura P5.58

5.50 Determine o centroide da área mostrada na figura quando $a = 50$ mm

5.51 Determine o valor de a para que a razão $\bar{x} / \bar{y}$ seja 9.

5.52 Determine o volume e a área da superfície do sólido obtido pela rotação da área do Problema 5.1 em torno (*a*) da linha $x = 240$ mm, (*b*) do eixo y.

5.53 Determine o volume e a área da superfície do sólido obtido pela rotação da área do Problema 5.2 em torno (*a*) da linha $y = 60$ mm, (*b*) do eixo y.

5.54 Determine o volume e a área da superfície do sólido obtido pela rotação da área do Problema 5.8 em torno (*a*) do eixo x, (*b*) do eixo y.

5.55 Determine o volume do sólido gerado pela rotação da área parabólica mostrado na figura em torno (*a*) do eixo x, (*b*) do eixo AA'.

5.56 Determine o volume e a área da superfície do elo de corrente mostrado na figura, que é feito de uma barra de 6 mm de diâmetro, se $R = 10$ mm e $L = 30$ mm.

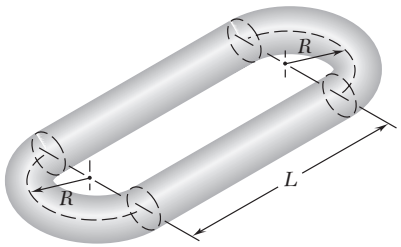


Figura P5.56

5.57 Verifique se as expressões para os volumes das quatro primeiras formas na Fig. 5.21 estão corretas.

5.58 Um furo de 19 mm de diâmetro é feito em uma peça de aço de 25 mm de espessura. Em seguida, o furo é escareado como mostrado na figura. Determine o volume de aço removido durante o processo de escareamento.

5.59 Determine a capacidade, em litros, da poncheira mostrada se $R = 250$ mm.

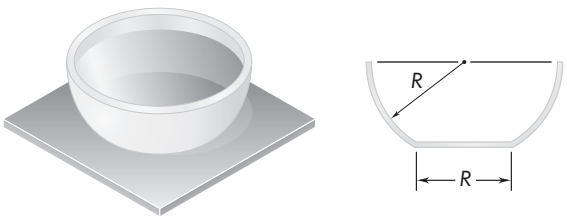


Figura P5.59

5.60 Três diferentes perfis de correia de acionamento devem ser estudados. Se em todas as situações cada correia fizer contato com metade da circunferência de sua polia, determine a *área de contato* entre correia e polia para cada projeto.

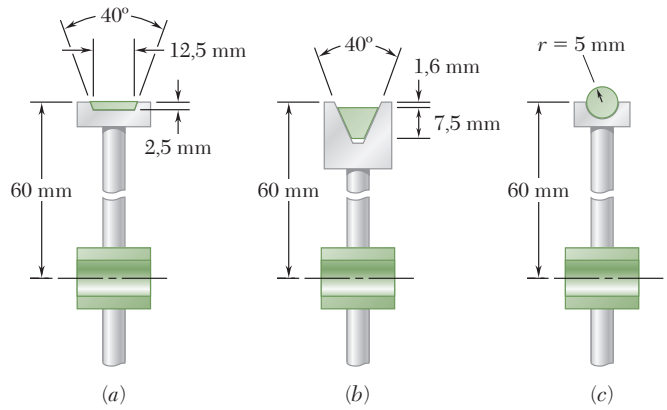


Figura *P5.60*

5.61 O quebra-luz de alumínio de uma pequena luminária de alta intensidade tem espessura uniforme de 1 mm. Sabendo que a densidade do alumínio é de 2.800 kg/m^3, determine a massa do quebra-luz.

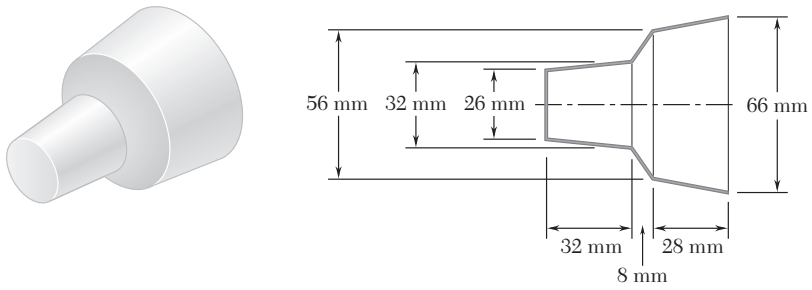


Figura P5.61

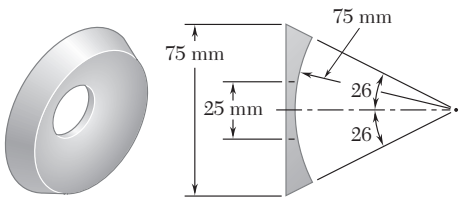


Figura *P5.62*

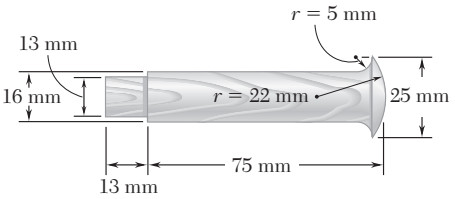


Figura P5.63 e P5.64

5.62 A figura mostra um anel de acabamento (uma peça decorativa colocada em um tubo que sai de uma parede) fundido em latão. Sabendo que a densidade do latão é de 8.470 kg/m^3, determine a massa da peça.

5.63 Um fabricante planeja produzir 20.000 cavilhas de madeira, como mostrado na figura. Determine quantos galões de tinta deverão ser pedidos, sabendo que cada cavilha leva duas demãos de tintas e que cada galão de tinta cobre 93 m^2.

5.64 A cavilha de madeira mostrada na figura é torneada para 25 mm de diâmetro e 100 mm de comprimento. Determine a porcentagem do volume inicial da cavilha que será desperdiçada.

***5.65** A máscara de uma luminária de parede é feita de uma placa fina de plástico translúcido. Determine a área de sua superfície externa, sabendo que ela tem uma seção transversal parabólica como mostrado na figura.

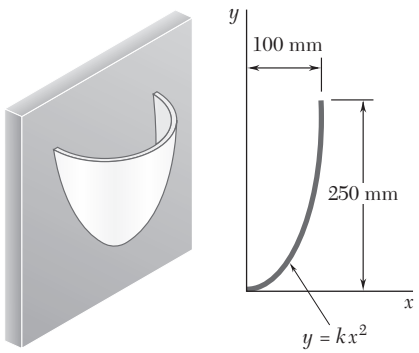


Figura *P5.65*

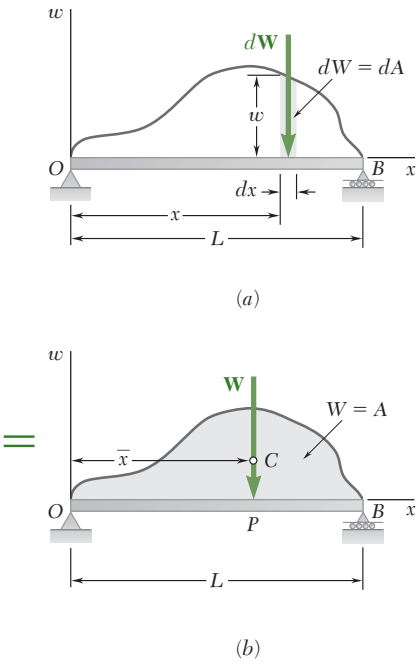


Figura 5.17

*5.8 Cargas distribuídas sobre vigas

O conceito de centroide de uma área pode ser usado na resolução de outros problemas além daqueles que envolvem pesos de placas planas. Por exemplo, considere uma viga que sustenta uma *carga distribuída*; essa carga pode advir do peso de materiais sustentados direta ou indiretamente pela viga ou pode ser causada pelo vento ou por pressões hidrostáticas. A carga distribuída pode ser caracterizada por uma curva representando a carga w sustentada por unidade de comprimento (Fig. 5.17); essa carga é medida em N/m. A intensidade da força exercida sobre um elemento de viga de comprimento dx é $dW = w\,dx$ e a carga total sustentada pela viga é:

$$W = \int_0^L w\,dx$$

Observamos que o produto $w\,dx$ é igual em intensidade ao elemento de área dA mostrado na Fig. 5.17*a*. Logo, a carga W equivale em intensidade à área total A sob a curva de carga:

$$W = \int dA = A$$

Vamos determinar agora onde uma *carga concentrada única* **W**, de intensidade W igual à da carga total distribuída, deve ser aplicada sobre â viga para produzir as mesmas reações de apoio (Fig. 5.17*b*). Todavia, essa carga concentrada **W**, que representa a resultante do carregamento distribuído dado, é equivalente ao carregamento apenas quando se considera o diagrama de corpo livre de toda a viga. O ponto de aplicação P de uma carga concentrada equivalente **W** é obtido escrevendo-se que o momento de **W** em relação ao ponto O é igual à soma dos momentos das cargas elementares $d\mathbf{W}$ em relação ao ponto O.

$$(OP)W = \int x\,dW$$

Ou, uma vez que $dW = w\,dx = dA$ e $W = A$:

$$(OP)A = \int_0^L x\,dA \tag{5.12}$$

Por representar o momento de primeira ordem, em relação ao eixo w, da área sob a curva de carga, a integral pode ser substituída pelo produto $\bar{x}A$. Logo, temos que $OP = \bar{x}$, sendo $\bar{x}$ a distância do eixo w ao centroide C da área A (*não* se trata do centroide da viga).

Uma carga distribuída sobre uma viga pode ser substituída por uma carga concentrada; a intensidade dessa carga única é igual à área sob a curva de carga e sua linha de ação passa pelo centroide dessa área. Deve-se notar, porém, que a carga concentrada é equivalente à carga dada quando se consideram forças externas. Essa carga pode ser usada para determinar reações, mas não deve ser usada no cálculo de forças internas e deformações.

Foto 5.3 Os telhados das construções mostradas na foto devem ter capacidade de suportar não apenas o peso total da neve, mas também as cargas distribuídas assimétricas resultantes da camada depositada de neve.

*5.9 Forças em superfícies submersas

A abordagem que adotamos na seção precedente pode ser adotada para se determinar a resultante das forças de pressão hidrostática exercidas sobre uma *superfície retangular* submersa em um líquido. Considere a placa retangular mostrada na Fig. 5.18, cujo comprimento é L e largura é b, sendo b medida perpendicularmente ao plano da figura. Como observamos na Seção 5.8, uma carga exercida sobre um elemento da placa de comprimento dx é $w\,dx$, sendo w a carga por unidade de comprimento. Todavia, essa carga também pode ser determinada como $p\,dA = pb\,dx$, sendo p a pressão manométrica do líquido* e b a largura da placa; logo, $w = bp$. Uma vez que a pressão manométrica em um líquido é $p = \gamma h$, sendo γ o peso específico do líquido e h a distância vertical da superfície livre, resulta na equação

$$w = bp = b\gamma h \tag{5.13}$$

a qual mostra que a carga por unidade de comprimento w é proporcional a h e, portanto, varia linearmente com x.

Recordando os resultados da Seção 5.8, observamos que a resultante **R** das forças hidrostáticas exercidas em um lado da placa é igual em intensidade à área trapezoidal sob a curva de carga e sua linha de ação passa pelo centroide C dessa área. O ponto P da placa no qual **R** é aplicado é conhecido como *centro de pressão*.**

Em seguida, consideramos as forças exercidas por um líquido sobre uma superfície curva de largura constante (Fig. 5.19*a*). Uma vez que a determinação da resultante **R** dessas forças por integração direta não seria fácil, consideramos o corpo livre obtido pela separação do volume de líquido ABD limitado pela superfície curva AB e pelas duas superfícies planas AD e DB mostradas na Fig. 5.19*b*. As forças atuantes sobre o corpo livre ABD são o peso **W** do volume de líquido destacado, a resultante $\mathbf{R}_1$ das forças exercidas sobre AD, a resultante $\mathbf{R}_2$ das forças exercidas sobre BD e a resultante $-\mathbf{R}$ das forças exercidas *pela superfície curva sobre o líquido*. A resultante $-\mathbf{R}$ tem igual intensidade, sentido oposto e a mesma linha de ação da resultante **R** das forças *exercidas pelo líquido sobre a superfície curva*. As forças **W**, $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ podem ser determinadas por métodos padrões; encontrados seus valores, a força $-\mathbf{R}$ é obtida pela solução das equações de equilíbrio para o corpo livre da Fig. 5.19*b*. A resultante **R** das forças hidrostáticas exercidas sobre a superfície curva é, então, obtida revertendo-se o sentido de $-\mathbf{R}$.

Os métodos delineados nesta seção podem ser adotados para determinar a resultante das forças hidrostáticas exercidas sobre superfícies de barragens e comportas retangulares. As resultantes das forças sobre superfícies submersas de largura variável serão determinadas no Cap. 9.

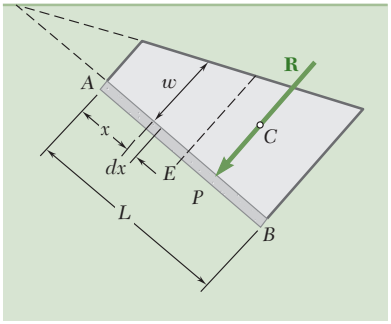
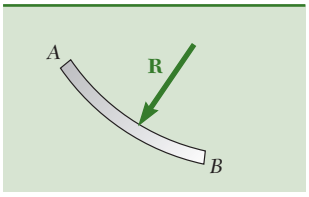
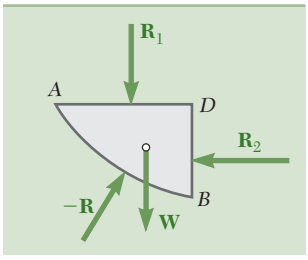


Figura 5.18



(*a*)



(*b*)

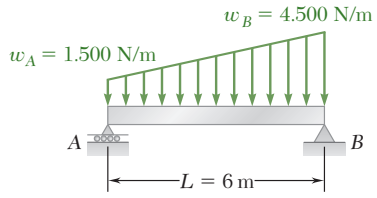
Figura 5.19

* A pressão p, que representa uma carga por unidade de área, é expressa em N/m^2. Esta unidade é chamada *pascal* (Pa).

** Observe-se que a área sob a curva de carga á igual a $w_E L$, sendo w_E a carga por unidade e de comprimento no centro E da placa e, retomando a Eq. (5.13), podemos escrever

$$R = w_E L = (bp_E)L = p_E(bL) = p_E A$$

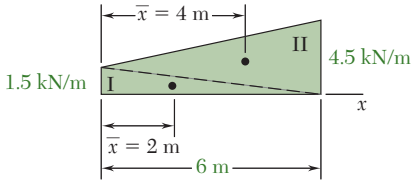
sendo que A representa a área da placa. Logo, a intensidade de **R** pode ser obtida pelo produto da área da placa pela pressão em seu centro E. A resultante **R**, porém, *deve ser aplicada* em P, *não em* E.



PROBLEMA RESOLVIDO 5.9

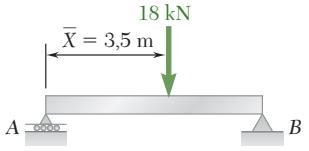
Uma viga sustenta a carga distribuída mostrada na figura. (*a*) Determine a carga concentrada equivalente. (*b*) Determine as reações de apoio.

SOLUÇÃO



a. Carga concentrada equivalente. A intensidade da resultante da carga é igual à área sob a curva de carga e a linha de ação da resultante passa pelo centroide dessa área. Dividimos a superfície sob a curva de carga em dois triângulos e construímos a tabela mostrada a seguir. Para simplificar os cálculos e a tabulação, as cargas fornecidas por unidade de comprimento foram convertidas para kN/m.

Componente	A, kN	$\bar{x}$, m	$\bar{x}A$, kN · m
Triângulo I	14,5	2	9
Triângulo II	13,5	4	54
	$\Sigma A = 18{,}0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$



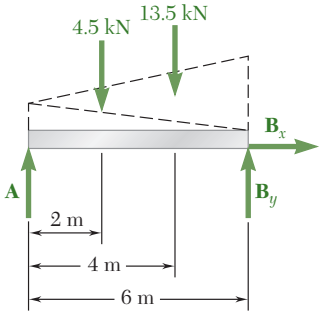
Logo, $\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A$: $\quad \bar{X}(18\text{ kN}) = 63\text{ kN} \cdot \text{m} \quad \bar{X} = 3{,}5\text{ m}$

A carga concentrada equivalente é

$$\mathbf{W} = 18\text{ kN} \downarrow \blacktriangleleft$$

e a sua linha de ação está localizada a uma distância

$$\bar{X} = 3{,}5\text{ m à direita de } A \blacktriangleleft$$



b. Reações. A reação em A é vertical, sendo representada por $\mathbf{A}$; a reação em B é representada pelo seus componentes $\mathbf{B}_x$ e $\mathbf{B}_y$. A carga fornecida pode ser considerada como a soma das duas cargas triângulares mostradas na figura. A resultante de cada carga triangular é igual à área do triângulo e atua em seu centroide. Escrevemos as seguintes equações de equilíbrio para o corpo livre mostrado:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad \mathbf{B}_x = 0 \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad -(4{,}5\text{ kN})(2\text{ m}) - (13{,}5\text{ kN})(4\text{ m}) + B_y(6\text{ m}) = 0$$

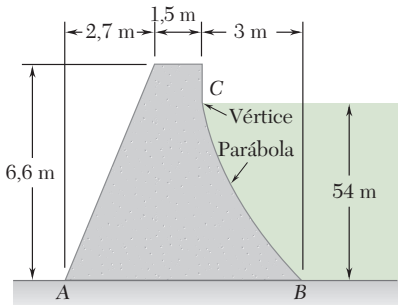
$$\mathbf{B}_y = 10{,}5\text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad +(4{,}5\text{ kN})(4\text{ m}) + (13{,}5\text{ kN})(2\text{ m}) - A(6\text{ m}) = 0$$

$$\mathbf{A} = 7{,}5\text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

Solução alternativa. Pode-se substituir a carga distribuída dada pela sua resultante, encontrada na alternativa *a*. As reações podem ser determinadas escrevendo-se as equações de equílibrio $\Sigma F_x = 0, \Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$ Novamente, obtemos:

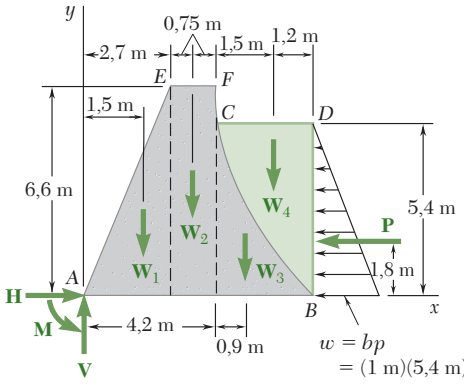
$$\mathbf{B}_x = 0 \qquad \mathbf{B}_y = 10{,}5\text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{A} = 7{,}5\text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 5.10

A figura mostra a seção transversal de uma barragem de concreto. Considere uma seção da barragem com 1 m de largura e determine: (*a*) a resultante das forças de relação exercidas pelo solo sobre a base *AB* da barragem, (*b*) a resultante das forças de pressão exercidas pela água sobre a face *BC* da barragem. Os pesos específicos do concreto e da água são, respectivamente, 24.000 N/m^3 e 10.000 N/m^3.

SOLUÇÃO



a. Reação do solo. Escolhemos como corpo livre a seção de 1 m de largura *AEFCDB* da barragem e da água. As forças de reação exercidas pelo solo sobre a base *AB* são representadas por um sistema força-binário equivalente em *A*. Outras forças atuantes sobre o corpo livre são o peso da barragem, representado pelos pesos de seus componentes $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ e $\mathbf{W}_3$, peso da água $\mathbf{W}_4$ e a resultante **P** das forças de pressão exercidas sobre a seção *BD* pela água à direita dessa seção. Temos:

$$W_1 = \tfrac{1}{2}(2{,}7\text{ m})(6{,}6\text{ m})(1\text{ m})(24.000\text{ N/m}^3) = 213.840\text{ N}$$
$$W_2 = (1{,}5\text{ m})(6{,}6\text{ m})(1\text{ m})(24.000\text{ N/m}^3) = 237.600\text{ N}$$
$$W_3 = \tfrac{1}{3}(3\text{ m})(5{,}4\text{ m})(1\text{ m})(24.000\text{ N/m}^3) = 129.600\text{ N}$$
$$W_4 = \tfrac{2}{3}(3\text{ m})(5{,}4\text{ m})(1\text{ m})10.000\text{ N/m}^3) = 108.000\text{ N}$$
$$P = \tfrac{1}{2}(5{,}4)(1\text{ m})(5{,}4\text{ m})(10.000\text{ N/m}^3) = 145.800\text{ N}$$

Equações de equilíbrio

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad H - 145.800\text{ N} = 0 \qquad \mathbf{H} = 145.800\text{ N} \rightarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V - 213.840\text{ N} - 237.600\text{ N} - 129.600\text{ N} - 108.000\text{ N} = 0$$

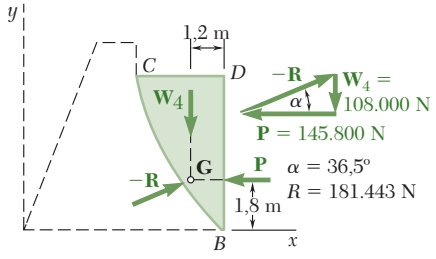
$$\mathbf{V} = 689.040\text{ N} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0:$$
$$-(213.840\text{ N})(1{,}8\text{ m}) - (237.600\text{ N})(3{,}45\text{ m}) - (129.600\text{ N})(5{,}1\text{ m})$$
$$-(108.000\text{ N})(6\text{ m}) + (145.800\text{ N})(1{,}8\text{ m}) + M = 0$$

$$\mathbf{M} = 2.251.152\text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowleft \blacktriangleleft$$

Podemos substituir o sistema força-binário obtido por uma força única atuante a uma distância *d* à direita de *A*, sendo:

$$d = \frac{2.251.152\text{ N} \cdot \text{m}}{689.040\text{ N}} = 3{,}27\text{ m}$$



b. Resultante R das forças da água. A seção parabólica de água *BCD* é escolhida como corpo livre. As forças envolvidas são a resultante $-\mathbf{R}$ das forças exercidas pela barragem sobre a água, o peso $\mathbf{W}_4$ e a força **P**. Como essas forças devem ser concorrentes, $-\mathbf{R}$ passa pelo ponto de interseção *G* de $\mathbf{W}_4$ e **P**. Na figura desenha-se um triângulo de forças do qual são determinados a intensidade, a direção e o sentido de $-\mathbf{R}$. A resultante **R** das forças exercidas pela água sobre a face *BC* tem igual intensidade e sentido oposto:

$$\mathbf{R} = 181.443\text{ N} \measuredangle 36{,}5^\circ \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os problemas desta seção envolvem dois tipos comuns e muito importantes de carregamento: cargas distribuídas sobre vigas e forças sobre superfícies submersas de largura constante. Conforme discutimos nas Seções 5.8 e 5.9 e exemplificamos nos Problemas Resolvidos 5.9 e 5.10, a determinação da força única equivalente para cada um desses carregamentos requer conhecimento sobre centroides.

1. Análise de vigas sujeitas a cargas distribuídas. Na Seção 5.8, mostramos que uma carga distribuída sobre uma viga pode ser substituída por uma força única equivalente. A intensidade dessa força é igual à área sob a curva de carga distribuída, e sua linha de ação passa pelo centroide dessa superfície. Logo, devemos iniciar sua solução substituindo as diversas cargas distribuídas sobre uma dada viga pelas suas respectivas forças únicas equivalentes. As reações de apoio da viga podem ser determinadas por meio dos métodos do Cap. 4.

Sempre que possível, cargas distribuídas complexas devem ser divididas nas superfícies de formas mais comuns mostradas na Fig. 5.8A [Problema Resolvido 5.9]. Cada uma dessas superfícies pode, então, ser substituída por uma força única equivalente. Se necessário, pode-se ainda reduzir o sistema de forças equivalentes a uma força única equivalente. Ao estudar o Problema Resolvido 5.9, observamos como se usar a analogia entre força e área e as técnicas para localizar o centroide de uma superfície composta a fim de analisar uma viga sujeita a uma carga distribuída.

2. Resolução de problemas que envolvam forças sobre corpos submersos. Ao resolver problemas desse tipo, devemos nos lembrar dos seguintes pontos e técnicas:

a. A pressão p a uma profundidade h abaixo de uma superfície livre de um líquido é igual a γh ou $\rho g h$, sendo γ e ρ o peso específico e a massa específica do líquido, respectivamente. Logo, a carga por unidade de comprimento w atuante sobre uma superfície submersa de largura constante b é:

$$w = bp = b\gamma h = b\rho g h$$

b. A linha de ação da força resultante **R** exercida sobre uma superfície plana submersa é perpendicular a essa superfície.

c. Para uma superfície plana retangular de largura b vertical ou inclinada, o carregamento sobre a superfície pode ser representado por uma carga distribuída linearmente, de forma trapezoidal (Fig. 5.18). Além disso, a intensidade de **R** é dada por

$$R = \gamma h_E A$$

sendo h_E a distância vertical (profundidade) até o centro da superfície e A a área da superfície.

d. A curva de carga será triangular (em vez de trapezoidal) quando a aresta superior da superfície plana retangular coincidir com a superfície livre do líquido, pois a pressão manométrica do líquido na superfície livre é nula. Nesse caso, a linha de ação de **R** é facilmente determinada e passa pelo centroide de uma carga distribuída *triangular*.

e. No caso geral, em vez de analisar um trapézio, sugerimos adotar o método indicado na parte *b* do Problema Resolvido 5.9. Primeiro, dividamos a carga distribuída trapezoidal em dois triângulos e, em seguida, calculemos a intensidade da resultante de cada carga triangular. (A intensidade é igual à área do triângulo multiplicada pela largura da placa.) Observemos que a linha de ação de cada força resultante passa pelo centroide do triângulo correspondente e que a soma dessas forças é equivalente a **R**. Logo, em vez de usar **R**, podemos usar as duas forças resultantes equivalentes, cujos pontos de aplicação são facilmente calculados. De forma evidente, a equação dada para *R* no parágrafo *c* deve ser usada apenas quando a intensidade de **R** for necessária.

f. Quando a superfície submersa de largura constante for curva, obtém-se a força resultante exercida sobre a superfície considerando-se o equilíbrio do volume de líquido limitado pela superfície curva e elos planos horizontal e vertical (Fig. 5.19). Observemos que a força $\mathbf{R}_1$ da Fig. 5.19 é igual ao peso de líquido que fica acima do plano *AD*. O método de solução para problemas que envolvem superfícies curvas é demonstrado na parte *b* do Problema Resolvido 5.10.

Em cursos subsequentes de mecânica (em particular, mecânica dos materiais e mecânica dos fluidos), haverá muitas oportunidades de empregar as ideias apresentadas nesta seção.

PROBLEMAS

5.66 e 5.67 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a intensidade e a localização da resultante da carga distribuída, (*b*) as reações de apoio da viga.

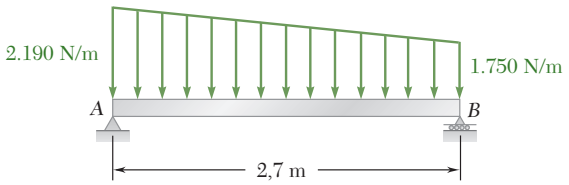


Figura P5.66

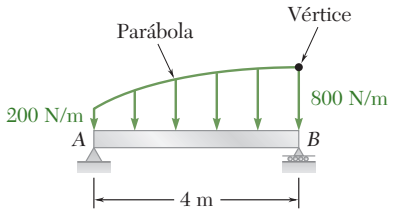


Figura P5.67

5.68 a 5.73 Determine as reações de apoio da viga para a carga dada.

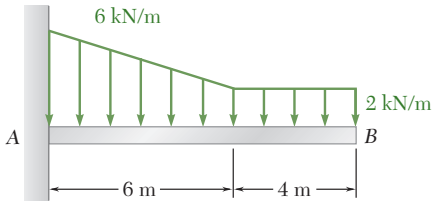


Figura P5.68

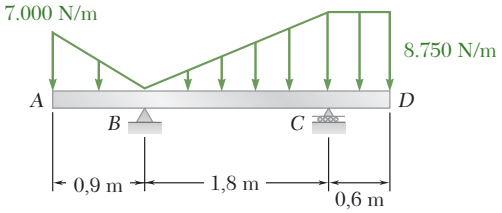


Figura P5.69

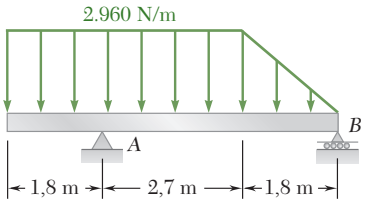


Figura *P5.70*

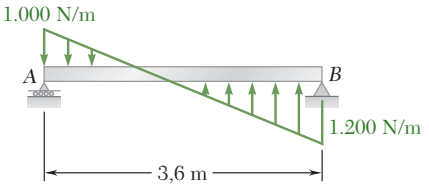


Figura P5.71

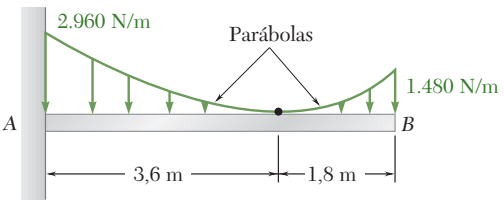


Figura *P5.72*

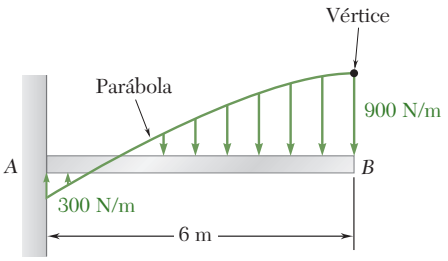


Figura P5.73

5.74 Determine (*a*) a distância *a* tal que as reações verticais dos apoios *A* e *B* sejam iguais, (*b*) as reações de apoio correspondentes.

5.75 Determine (*a*) a distância *a* tal que a reação vertical do apoio *B* seja mínima, (*b*) as reações de apoio correspondentes.

5.76 Determine as reações de apoio da viga para o carregamento dado quando $w_0 = 2.190$ N/m.

5.77 Determine (*a*) a carga distribuída w_0 na extremidade *D* da viga *ABCD* tal que a reação em *B* seja nula, (*b*) as reações correspondentes em *C*.

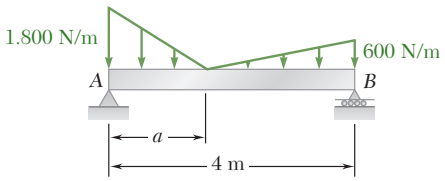


Figura P5.74 e P5.75

5.78 Uma viga *AB* sustenta duas cargas concentradas e repousa sobre o solo que exerce uma carga distribuída para cima como mostrado na figura. Determine os valores de w_A e w_B correspondentes ao equilíbrio.

5.79 Para a viga do Problema 5.78, determine (*a*) a distância *a* para que $w_A = 20$ kN/m, (*b*) o valor correspondente de w_B.

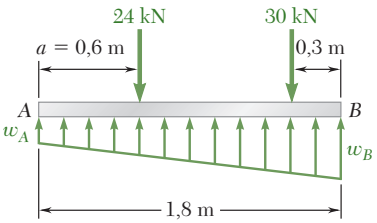


Figura P5.78

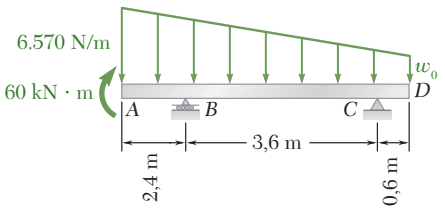


Figura P5.76 e P5.77

Nos próximos problemas, utilize $\rho = 10^3$ kg/m^3 para a massa específica da água doce e $\rho_c = 2{,}4 \times 10^3$ kg/m^3 para a massa específica do concreto. (Ver a nota de rodapé da página 224 para saber como determinar o peso específico de um material, sendo sua massa específica dada).

5.80 A seção transversal de uma barragem de concreto é mostrada na figura. Para uma seção de barragem de largura de 1 m, determine (*a*) as forças de reação exercidas pelo solo sobre a base *AB* da barragem, (*b*) o ponto de aplicação da resultante das forças de reação da alternativa *a*, (*c*) a resultante das forças de pressão exercidas pela água sobre a face *BC* da barragem.

5.81 A seção transversal de uma barragem de concreto é mostrada na figura. Para uma seção de barragem largura 0,3 m, determine (*a*) as forças de reação exercidas pelo solo sobre a base *AB* da barragem, (*b*) o ponto de aplicação da resultante das forças de reação da alternativa *a*, (*c*) a resultante das forças de pressão exercidas pela água sobre a face *BC* da barragem.

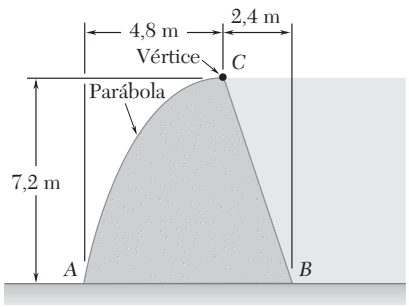


Figura P5.80

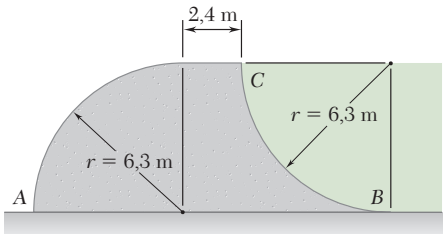


Figura P5.81

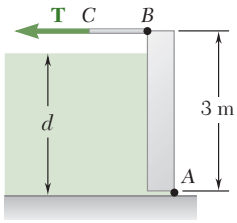


Figura P5.82 e P5.83

5.82 A lateral *AB* de um tanque aberto mede 3m × 4 m, está articulada no fundo em *A* e é mantida no lugar por meio de uma haste fina *BC*. A força máxima de tração que a haste pode suportar sem quebrar é de 200 kN, e as especificações do projeto exigem que a força na haste não exceda a 20% desse valor. Se o tanque for cheio lentamente com água, determine a máxima profundidade admissível *d* no tanque.

5.83 A lateral *AB* de um tanque aberto mede 3m × 4 m, está articulada no fundo em *A* e é mantida no lugar por meio de uma barra fina *BC*. O tanque é cheio com glicerina, cuja densidade é de 1.263 kg/m^3. Determine a força **T** na barra e as reações na articulação após o enchimento do tanque a uma profundidade de 2,9 m.

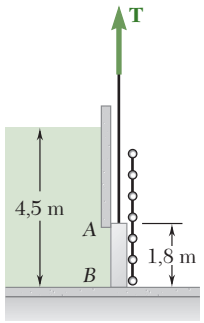


Figura P5.84

5.84 A força de atrito entre uma comporta de fundo quadrada *AB* de 1,2 × 1,2 m e sua guia é igual a 10% da resultante das forças de pressão exercidas pela água sobre a face da comporta. Determine a força inicial necessária para se levantar a comporta sabendo que seu peso é de 4.450 N.

5.85 A água doce do pântano é drenada para o oceano através de uma comporta automática de 1,2 m de largura e 0,9 m de altura. A comporta é mantida por articulações localizadas ao longo da aresta superior em *A* e anteparos na soleira em *B*. Se o nível da água no pântano é $h = 1{,}8$ m, determine o nível do oceano *d* para que a comporta possa ser aberta. (O peso específico da água salgada é 10.050 N/m^3).

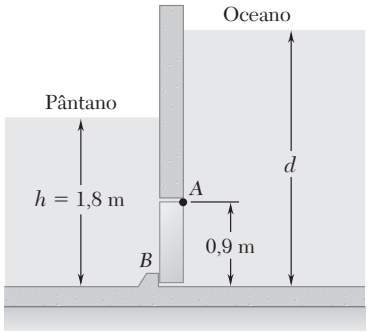


Figura P5.85

5.86 A barragem de um lago é projetada para suportar a força adicional causada pelo lodo depositado no fundo do lago. Admitindo que o lodo é equivalente a um líquido de densidade $\rho_s = 1{,}76 \times 10^3$ kg/m^3 e considerando uma seção da barragem de 1 m de largura, determine o aumento percentual da força exercida sobre a face da barragem para um acúmulo de lodo de 2 m de profundidade.

5.87 A base da barragem de um lago é projetada para resistir a até 120% da força horizontal da água. Após a construção, verificou-se a deposição de lodo (que é equivalente a um líquido de densidade $\rho_s = 1{,}76 \times 10^3$ kg/m^3) no fundo do lago a uma taxa de 12 mm/ano. Considerando uma seção da barragem de 1 m de largura, determine quantos anos se passarão até a barragem deixar de ser segura.

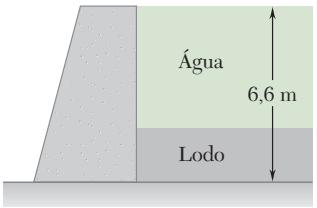


Figura P5.86 e P5.87

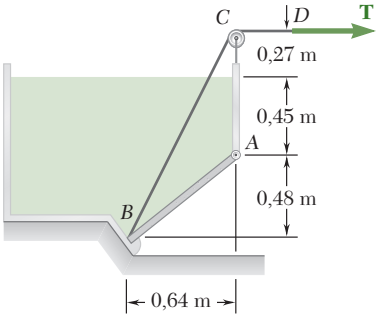


Figura P5.88 e P5.89

5.88 Uma comporta *AB* de 0,5 m × 0,8 m é localizada no fundo de um tanque cheio de água. A comporta é articulada ao longo da aresta superior em *A* e descansa sem atrito em um batente em *B*. Determine as reações em *A* e *B* quando o cabo *BCD* é solto.

5.89 Uma comporta *AB* de 0,5 m × 0,8 m está localizada no fundo de um tanque cheio de água. A comporta é articulada ao longo da aresta superior em *A* e repousa sem atrito em um batente em *B*. Determine a tensão mínima requerida no cabo *BCD* para abrir a comporta.

5.90 Uma calha longa é suportada por uma dobradiça contínua ao longo da aresta inferior e por uma série de cabos horizontais fixados na aresta superior. Determine a tensão em cada um dos cabos no momento em que a calha esteja completamente cheia.

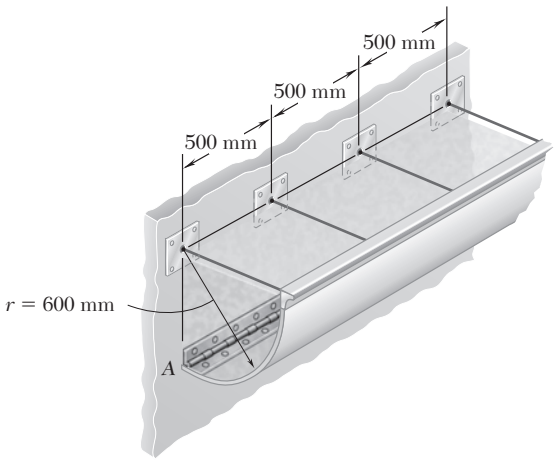


Figura P5.90

5.91 Uma comporta de 1,2m × 0,6 m está articulada em *A* e é mantida pela barra *CD*. A extremidade *D* apoia-se em uma mola cuja constante é 12 kN/m. Não há deformação na mola quando a comporta está na vertical. Considerando que a força exercida pela barra *CD* sobre a comporta permanece na horizontal, determine a mínima profundidade de água *d* para a qual o fundo *B* da comporta irá se deslocar até o final da porção cilíndrica do chão.

5.92 Resolva o Problema 5.91 se a comporta pesa 4.450 N.

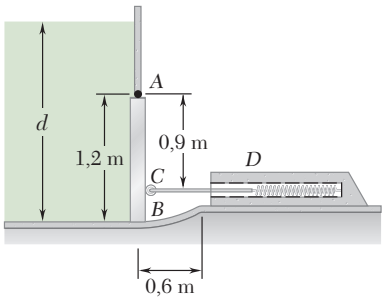


Figura P5.91

5.93 Uma comporta de forma prismática é colocada no fim de um canal de água doce. É mantida por um pino e um suporte em *A* e repousa no apoio *B* sem atrito. O pino está a uma distância $h = 0{,}1$ m abaixo do centro de gravidade *C* da comporta. Determine a profundidade de água *d* para que a comporta seja aberta.

5.94 Uma comporta de forma prismática é colocada no final de um canal de água doce. É suportado por um pino e suporte em *A* e repousa no apoio *B* sem atrito. Determine a distância *h* se a comporta é aberta com $d = 0{,}75$ m.

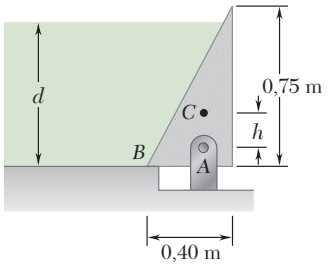


Figura P5.93 e P5.94

5.95 Um tambor de 200 litros com diâmetro de 580 mm é colocado de lado para atuar como uma barragem em um canal de água doce com 750 mm de largura. Sabendo que o tambor é ancorado nos lados do canal, determine a resultante das forças de pressão atuantes no tambor.

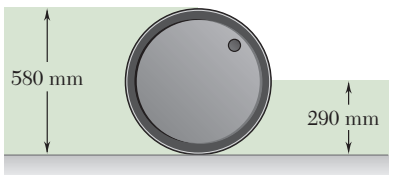


Figura *P5.95*

Foto 5.4 Para se prever as características de voo do Boeing 747 modificado, usado para transportar um ônibus espacial, foi preciso determinar o centro de gravidade de cada nave.

SÓLIDOS

5.10 Centro de gravidade de um corpo tridimensional e centroide de um sólido

O *centro de gravidade* G de um corpo tridimensional é obtido dividindo-se o corpo em pequenos elementos e, em seguida, demonstrando que o peso $\mathbf{W}$ do corpo, atuando em G, é equivalente ao sistema de forças distribuídas $\Delta\mathbf{W}$ que representa os pesos dos pequenos elementos. Escolhendo o eixo y na vertical, com sentido positivo para cima (Fig. 5.20) e representado por $\bar{\mathbf{r}}$ o vetor posição de G, temos que $\mathbf{W}$ é igual à soma dos pesos elementares $\Delta\mathbf{W}$ e que seu momento em relação a O é igual à soma dos momentos em relação a O dos pesos elementares:

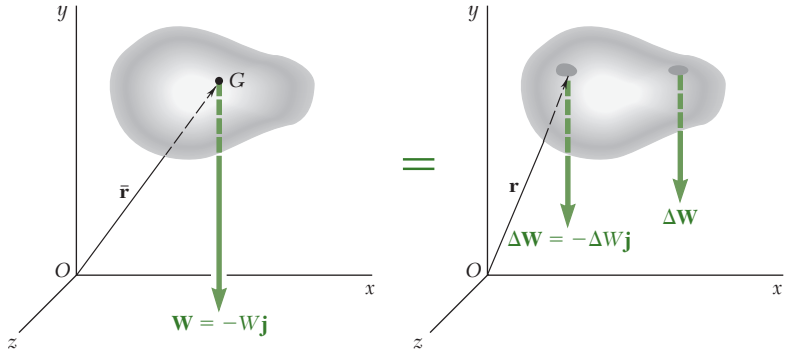


Figura 5.20

$$\Sigma\mathbf{F}: \quad -W\mathbf{j} = \Sigma(-\Delta W\mathbf{j})$$
$$\Sigma\mathbf{M}_O: \quad \bar{\mathbf{r}} \times (-W\mathbf{j}) = \Sigma[\mathbf{r} \times (-\Delta W\mathbf{j})] \tag{5.14}$$

Reescrevendo a última equação da seguinte maneira

$$\bar{\mathbf{r}}W \times (-\mathbf{j}) = (\Sigma\mathbf{r}\,\Delta W) \times (-\mathbf{j}) \tag{5.15}$$

observamos que o peso $\mathbf{W}$ do corpo será equivalente ao sistema dos pesos elementares $\Delta\mathbf{W}$ se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$W = \Sigma\,\Delta W \qquad \bar{\mathbf{r}}W = \Sigma\mathbf{r}\,\Delta W$$

Aumentando o número de elementos e diminuindo, simultaneamente, o tamanho de cada elemento, obtemos, no limite:

$$W = \int dW \qquad \bar{\mathbf{r}}W = \int \mathbf{r}\,dW \tag{5.16}$$

Note que as relações obtidas são independentes da orientação do corpo. Por exemplo, se o corpo e os eixos coordenados fossem girados de tal modo que o eixo z aponte para cima, o vetor unitário $-\mathbf{j}$ seria substituído por $-\mathbf{k}$ nas Eqs. (5.14) e (5.15), mas as relações (5.16) permaneceriam inalteradas. Decompondo os vetores $\bar{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{r}$ em seus componentes retangu-

lares, observamos que a segunda das relações (5.16) é equivalente às três equações escalares:

$$\bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad \bar{z}W = \int z\,dW \tag{5.17}$$

Se o corpo é feito de um material homogêneo de peso específico γ, a intensidade dW do peso de um elemento infinitesimal pode ser expressa em função do volume dV do elemento, e a intensidade W do peso total pode ser expressa em termos do volume total V. Temos:

$$dW = \gamma\,dV \qquad W = \gamma V$$

Substituindo dW e W na segunda das relações (5.16), temos:

$$\bar{\mathbf{r}}V = \int \mathbf{r}\,dV \tag{5.18}$$

ou em forma escalar:

$$\bar{x}V = \int x\,dV \qquad \bar{y}V = \int y\,dV \qquad \bar{z}V = \int z\,dV \tag{5.19}$$

O ponto cujas coordenadas são $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ é também conhecido como *centroide C do volume V* do corpo. Se o corpo não for homogêneo, as Eqs. (5.19) não podem ser usadas para determinar o centro de gravidade do corpo; no entanto, as Eqs. (5.19) ainda definem o centroide do sólido.

A integral $\int x\,dV$ é conhecida como *momento de primeira ordem do sólido em relação ao plano yz*. De forma análoga, as integrais $\int y\,dV$ e $\int z\,dV$ definem os momentos de primeira ordem do sólido em relação ao plano zx e ao plano xy, respectivamente. Pode-se ver, a partir das Eqs. (5.19), que, se o centroide do sólido está localizado em um plano coordenado, o momento de primeira ordem do sólido em relação a esse plano é nulo.

Diz-se que o sólido é simétrico com relação a um plano dado se para cada ponto P do sólido existe um ponto P' do mesmo sólido, tal que o segmento PP' é perpendicular ao dado plano e dividido em duas partes iguais por esse plano. O plano é chamado de *plano de simetria* para o dado sólido. Quando um sólido V tem um plano de simetria, o momento de primeira ordem de V com relação a esse plano é nulo, e o centroide do sólido está localizado no plano de simetria. Quando o sólido apresenta dois planos de simetria, o centroide do sólido fica na linha de interseção dos dois planos. Finalmente, quando o sólido apresenta três planos de simetria que se interceptam em um ponto definido (isto é, não ao longo de uma reta comum), o ponto de interseção dos três planos coincide com o centroide do sólido. Essa propriedade nos possibilita determinar imediatamente a localização dos centroides de esferas, elipsoides, cubos, paralelepípedos retangulares, etc.

Os centroides de sólidos não simétricos ou de sólidos que apresentem apenas um ou dois planos de simetria devem ser determinados por integração (Seção 5.12). Os centroides de vários sólidos comuns são mostrados na Fig. 5.21. Deve-se observar que geralmente o centroide de um sólido de revolução *não coincide* com o centroide de sua seção transversal. Portanto, o centroide de um hemisfério é diferente do de uma área semicircular, e o centroide de um cone é diferente do de um triângulo.

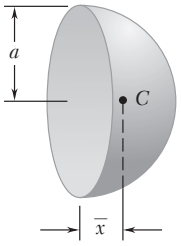
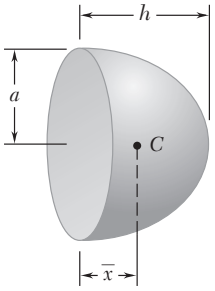
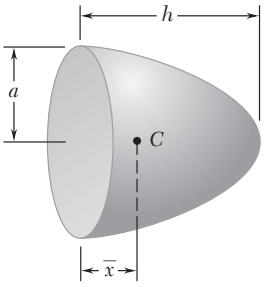
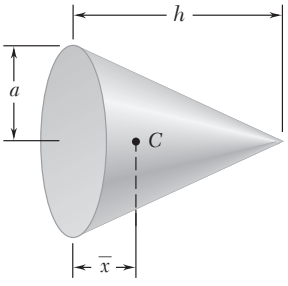
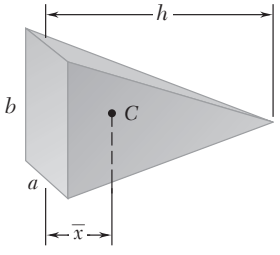
Formato		$\bar{x}$	Volume
Hemisfério		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Semielipsoide de revolução		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Paraboloide de revolução		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
Cone		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pirâmide		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

Figura 5.21 Centroides com formatos e volumes mais comuns.

5.11 Corpos compostos

Se um corpo pode ser dividido em várias das formas mais comuns mostradas na Fig. 5.21, pode-se determinar seu centro de gravidade G demonstrando que o momento em relação a O de seu peso total é igual à soma dos momentos em relação a O dos pesos das várias partes componentes. Procedendo como na Seção 5.10, obtemos as seguintes equações, que definem as coordenadas $\bar{X}$, $\bar{Y}$ e $\bar{Z}$ do centro de gravidade G.

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z} W \tag{5.20}$$

Se o corpo é feito de um material homogêneo, seu centro de gravidade coincide com o centroide de seu volume. Assim, obtemos:

$$X\Sigma V = \Sigma \bar{x} V \qquad Y\Sigma V = \Sigma \bar{y} V \qquad Z\Sigma V = \Sigma \bar{z} V \tag{5.21}$$

5.12 Determinação de centroides de sólidos por integração

Pode-se determinar o centroide de um sólido limitado por superfícies analíticas avaliando-se as integrais dadas na Seção 5.10:

$$xV = \int x\, dV \qquad \bar{y}V = \int y\, dV \qquad \bar{z}V = \int z\, dV \tag{5.22}$$

Se o elemento de volume dV é escolhido como sendo igual a um pequeno cubo de lados dx, dy e dz, a avaliação de cada uma dessas integrais requer uma *integração tripla*. Porém, é possível determinar as coordenadas do centroide da maioria dos sólidos por *integração dupla* se dV for escolhido como sendo igual ao volume de um filamento delgado (Fig. 5.22). As coordenadas do centroide do sólido são, então, obtidas reescrevendo-se as Eqs. (5.22) como

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \qquad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\, dV \qquad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el}\, dV \tag{5.23}$$

e, em seguida, substituindo-se as expressões dadas na Fig. 5.22 pelo volume dV e as coordenadas $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$, $\bar{z}_{el}$. Aplicando-se a equação da superfície para expressar z em termos de x e y, a integração é reduzida a uma integração dupla em x e y.

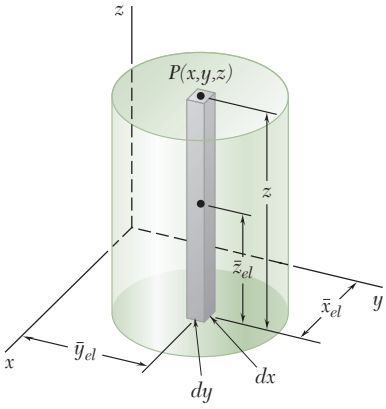
Se o sólido sob consideração apresentar *dois planos de simetria*, seu centroide deve estar sobre a linha de interseção dos dois planos. Escolhendo o eixo x ao longo dessa linha, temos

$$\bar{y} = z = 0$$

e a única coordenada a ser determinada é $\bar{x}$. Isso pode ser feito com uma *integração simples* dividindo-se o volume dado em elementos delgados paralelos ao plano yz e demonstrando dV em termos de x e dx na equação:

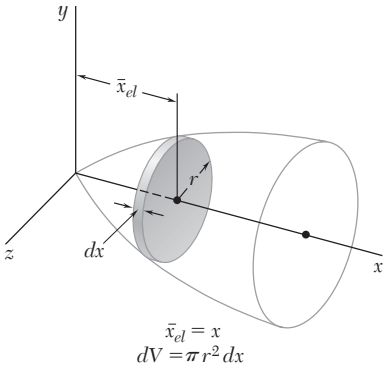
$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \tag{5.24}$$

Para um corpo de revolução, os elementos são circulares e seu volume é dado na Fig. 5.23.



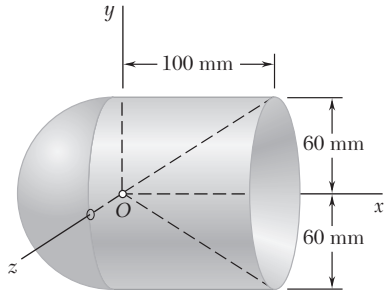
$\bar{x}_{el} = x,\ \bar{y}_{el} = y,\ \bar{z}_{el} = \frac{z}{2}$
$dV = z\, dx\, dy$

Figura 5.22 Determinação do centroide de um sólido por integração dupla.



$\bar{x}_{el} = x$
$dV = \pi r^2\, dx$

Figura 5.23 Determinação do centroide de um corpo de revolução.

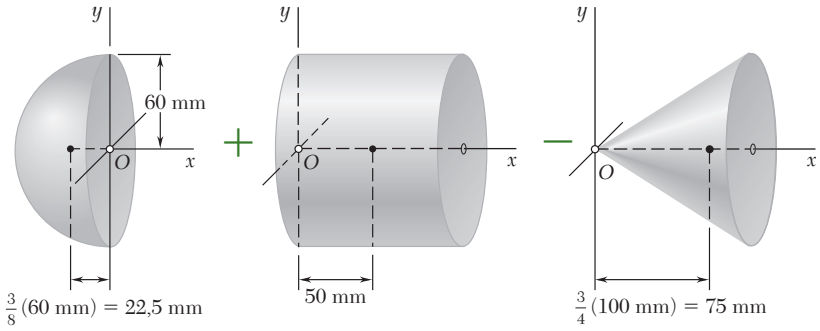


PROBLEMA RESOLVIDO 5.11

Determine a localização do centro de gravidade do corpo de revolução homogêneo mostrado na figura, que foi obtido adicionando-se um hemisfério e um cilindro e extraindo-se um cone.

SOLUÇÃO

Por causa da simetria, o centro de gravidade situa-se sobre o eixo x. Como mostra a figura a seguir, pode-se obter o corpo adicionando-se um hemisfério a um cilindro e depois extraindo-se um cone. O sólido e a abscissa do centroide de cada um desses componentes são obtidos a partir da Fig. 5.21 e registrados na tabela a seguir. O volume total do corpo e o momento de primeira ordem do sólido com relação ao plano yz são, então, determinados.

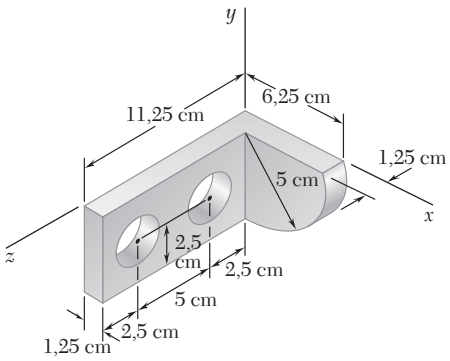


Componente	Volume, mm^3	$\bar{x}$, mm	$\bar{x}V$, mm^4
Hemisfério	$\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}(60)^3 = 0{,}4524 \times 10^6$	−22,5	$-10{,}18 \times 10^6$
Cilindro	$\pi(60)^2(100) = 1{,}1310 \times 10^6$	+50	$+56{,}55 \times 10^6$
Cone	$-\frac{\pi}{3}(60)^2(100) = -0{,}3770 \times 10^6$	+75	$-28{,}28 \times 10^6$
	$\Sigma V = 1{,}206 \times 10^6$		$\Sigma\bar{x}V = 18{,}09 \times 10^6$

Então:

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V: \quad \bar{X}(1{,}206 \times 10^6\ \text{mm}^3) = 18{,}09 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

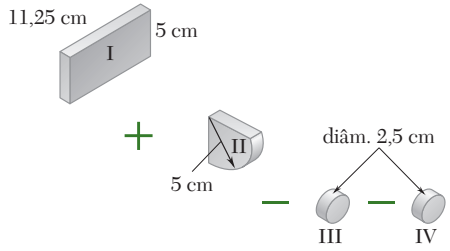
$$\bar{X} = 15\ \text{mm} \quad \blacktriangleleft$$



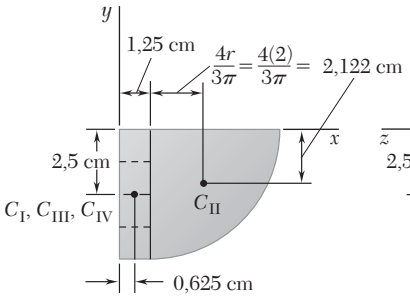
PROBLEMA RESOLVIDO 5.12

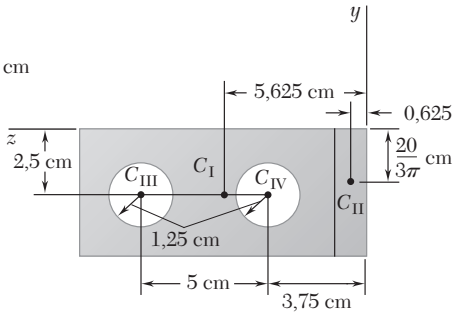
Determine o centro de gravidade do elemento da máquina de aço mostrada na figura. O diâmetro de cada furo é 2,5 cm.

SOLUÇÃO



O elemento da máquina pode ser obtido adicionado-se um paralelepípedo retangular (I) a um quarto de cilindro (II), e, em seguida extraindo-se de dois cilindros (III e IV) de 2,5 cm de um diâmetro. O volume e as coordenadas do centro de gravidade de cada componente são determinados e anotados na tabela a seguir. Usando os dados da tabela, determinamos, então, o volume total e os momentos de cada volume com relação a cada um dos planos coordenados.





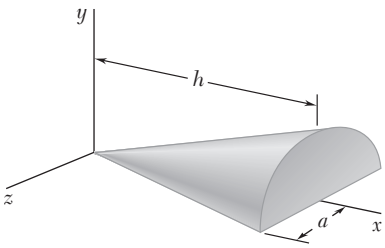
	V, cm^3	$\bar{x}$, cm	$\bar{y}$, cm	$\bar{z}$, cm	$\bar{x}V$, cm^4	$\bar{y}V$, cm^4	$\bar{z}V$, cm^4
I	$(11{,}25)(5)(1{,}25) = 70{,}31$	0,625	−2,5	5,625	43,94	175,78	395,49
II	$\frac{1}{4}\pi(5)^2(1{,}25) = 24{,}54$	3,372	−2,122	0,625	82,75	52,07	15,34
III	$-\pi(1{,}25)2(1{,}25) = -6{,}14$	0,625	−2,5	8,75	−3,84	15,35	−53,73
IV	$-\pi(1{,}25)2(1{,}25) = -6{,}14$	0,625	−2,5	3,75	−3,84	15,35	−23,03
	$\Sigma V = 82{,}57$				$\Sigma\bar{x}V = 119{,}01$	$\Sigma\bar{y}V = -197{,}15$	$\Sigma\bar{z}V = 334{,}07$

Então:

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V: \quad \bar{X}(82{,}57\text{ cm}^3) = 119{,}01\text{ cm}^4 \quad \bar{X} = 1{,}44\text{ cm} \blacktriangleleft$$

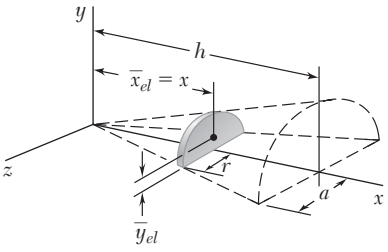
$$\bar{Y}\Sigma V = \Sigma\bar{y}V: \quad \bar{Y}(82{,}57\text{ cm}^3) = -197{,}15\text{ cm}^4 \quad \bar{Y} = -2{,}39\text{ cm} \blacktriangleleft$$

$$\bar{Z}\Sigma V = \Sigma\bar{z}V: \quad \bar{Z}(82{,}57\text{ cm}^3) = 334{,}07\text{ cm}^4 \quad \bar{Z} = 4{,}05\text{ cm} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 5.13

Determine a localização do centroide da metade do cone circular reto mostrada na figura.



SOLUÇÃO

Como o plano *xy* é um plano de simetria, o centroide está situado nesse plano e $\bar{z} = 0$. Um elemento de espessura *dx* é escolhido como um elemento diferencial. O volume desse elemento é:

$$dV = \tfrac{1}{2}\pi r^2\,dx$$

As coordenadas $\bar{x}_{el}$ e $\bar{y}_{el}$ do centroide de elemento são obtidas da Fig. 5.8 (área semicircular)

$$\bar{x}_{el} = x \qquad \bar{y}_{el} = \frac{4r}{3\pi}$$

Observamos que *r* é proporcional a *x*. Assim temos

$$\frac{r}{x} = \frac{a}{h} \qquad r = \frac{a}{h}x$$

O volume do corpo é:

$$V = \int dV = \int_0^h \tfrac{1}{2}\pi r^2\,dx = \int_0^h \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h}{6}$$

O momento do elemento diferencial em relação ao plano *yz* é $\bar{x}_{el}\,dV$; o momento total do corpo em relação a esse plano é:

$$\int \bar{x}_{el}\,dV = \int_0^h x(\tfrac{1}{2}\pi r^2)\,dx = \int_0^h x(\tfrac{1}{2}\pi)\left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h^2}{8}$$

Então:

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\,dV \qquad \bar{x}\frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{\pi a^2 h^2}{8} \qquad \bar{x} = \tfrac{3}{4}h \;\blacktriangleleft$$

Do mesmo modo, o momento do elemento diferencial em relação ao plano *zx* é $\bar{y}_{el}\,dV$; o momento total é:

$$\int \bar{y}_{el}\,dV = \int_0^h \frac{4r}{3\pi}(\tfrac{1}{2}\pi r^2)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^h \left(\frac{a}{h}x\right)^3 dx = \frac{a^3 h}{6}$$

Portanto:

$$\bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\,dV \qquad \bar{y}\frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{a^3 h}{6} \qquad \bar{y} = \frac{a}{\pi} \;\blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas para esta seção, será pedido que determinemos os centros de gravidade de corpos tridimensionais ou os centroides de seus volumes. Todas as técnicas discutidas anteriormente para corpos bidimensionais – utilizando-se simetria, dividindo-se o corpo em formas mais comuns, escolhendo-se o elemento diferencial mais eficiente, etc. – podem ser aplicadas também ao caso geral tridimensional.

1. Determinação dos centros de gravidade de corpos compostos. Em geral, devem ser usadas as Eqs. (5.20):

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z} W \tag{5.20}$$

No entanto, para o caso de um *corpo homogêneo*, o centro de gravidade do corpo coincide com o *centroide de seu volume*. Por isso, para esse caso especial, também se pode achar o centro de gravidade do corpo aplicando-se as Eqs. (5.21):

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x} V \qquad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y} V \qquad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z} V \tag{5.21}$$

Deve-se perceber que essas equações são simplesmente uma extensão das equações usadas para os problemas bidimensionais considerados anteriormente neste capítulo. Como ilustram as soluções dos Problemas Resolvidos 5.11 e 5.12, os métodos de solução para problemas bi e tridimensionais são idênticos. Portanto, novamente é aconselhável construir diagramas e tabelas apropriados quando analisarmos corpos compostos. Além disso, quando estudarmos o Problema Resolvido 5.12, observemos como as coordenadas x e y do centroide do quarto de cilindro foram obtidas por meio das equações para o centroide de um quarto de círculo.

Observamos que *dois casos especiais* de interesse ocorrem quando o corpo dado consiste em arames uniformes ou em placas uniformes feitos do mesmo material.

a. Para um corpo feito de *vários elementos de arame da mesma seção transversal uniforme*, a área A da seção transversal dos elementos de arame será fatorada para fora das Eqs. (5.21), quando V for substituído pelo produto AL, sendo L o comprimento de um dado elemento. Dessa forma, as equações (5.21) serão reduzidas a:

$$\bar{X}\Sigma L = \Sigma \bar{x} L \qquad \bar{Y}\Sigma L = \Sigma \bar{y} L \qquad \bar{Z}\Sigma L = \Sigma \bar{z} L$$

b. Para um corpo feito de *várias placas* da *mesma espessura uniforme*, a espessura t das placas será fatorada para fora das Eqs. (5.21), quando V for substituído pelo produto tA, sendo A a área de uma dada placa. Dessa forma, as Eqs. (5.21) serão reduzidas a:

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A \qquad \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A \qquad \bar{Z}\Sigma A = \Sigma \bar{z} A$$

2. Localização dos centroides de sólidos por integração direta. Como explicamos na Seção 5.12, a avaliação das integrais das Eqs. (5.22) pode ser simplificada escolhendo-se um elemento delgado (Fig. 5.22) ou uma fatia delgada (Fig. 5.23) para o elemento de volume dV. Portanto, a solução deve ser iniciada identificando-se, se possível, o dV que produz as integrais simples ou duplas que forem as mais fáceis de calcular. Para corpos de revolução, isso pode ser uma fatia delgada (como no Problema Resolvido 5.13) ou uma casca cilíndrica delgada. Porém, é importante lembrar que a relação que você estabelecer entre as variáveis (assim como a relação entre r e x no Problema Resolvido 5.13) vai afetar diretamente a complexidade das integrais que você vai ter que calcular. Por fim, lembremos novamente que x_{el}, y_{el} e z_{el} nas Eqs. (5.23) são as coordenadas do centroide de dV.

PROBLEMAS

5.96 Determine a posição do centroide do corpo composto mostrado na figura, quando (*a*) $h = 2b$, (*b*) $h = 2{,}5b$.

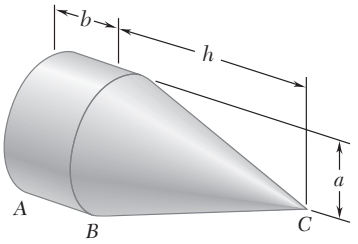


Figura P5.96

5.97 Determine a coordenada y do centroide do corpo mostrado na figura.

5.98 Determine a coordenada z do centroide do corpo mostrado na figura. (*Dica*: use o resultado do Problema Resolvido 5.13.)

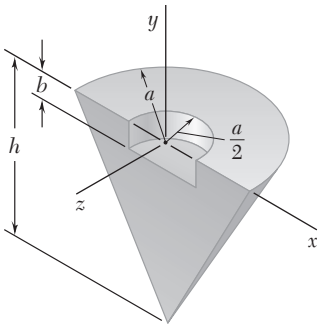


Figura P5.97 e P5.98

5.99 O corpo composto mostrado na figura é formado pela remoção de um semielipsoide de revolução de semieixo maior h e semieixo menor $a/2$ a partir de um hemisfério de raio a. Determine (*a*) a coordenada y do centroide quando $h = a/2$, (*b*) a razão h/a para a qual $y = -0{,}4a$.

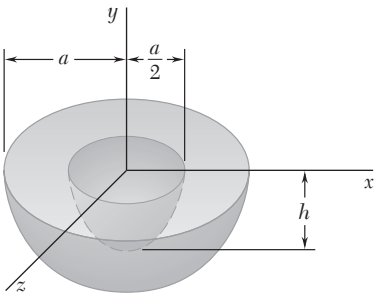


Figura P5.99

5.100 Para o suporte de batente mostrado na figura, determine a coordenada x do centro de gravidade.

5.101 Para o suporte de batente mostrado na figura, determine a coordenada x do centro de gravidade.

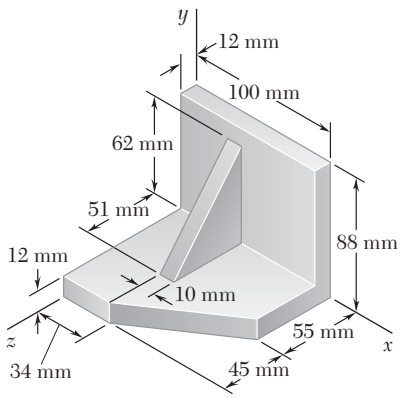


Figura P5.100 e P5.101

***5.102* e 5.103** Para o elemento mecânico mostrado na figura, determine a coordenada y do centro de gravidade.

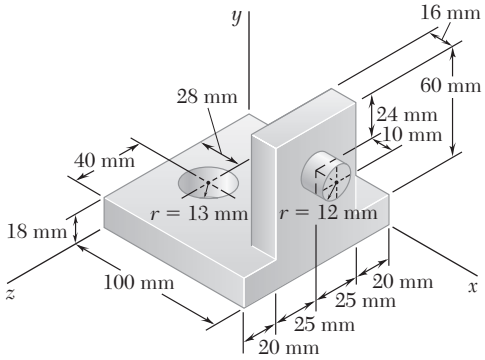


Figura *P5.102* e *P5.105*

5.104 Para o elemento mecânico mostrado na figura, determine a coordenada z do centro de gravidade.

5.105 Para o elemento mecânico mostrado na figura, determine a coordenada x do centro de gravidade.

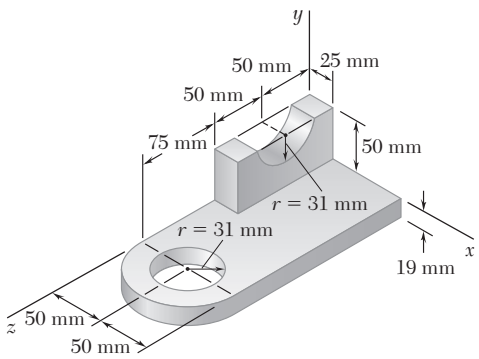


Figura P5.103 e P5.104

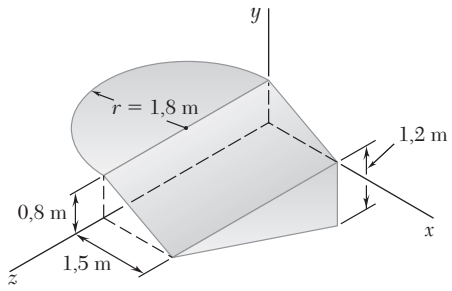


Figura P5.106

5.106 e 5.107 Determine o centro de gravidade da chapa metálica conformada mostrada na figura.

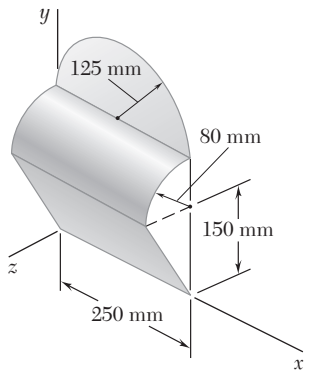


Figura P5.107

5.108 Um cesto de lixo projetado para ser colocado no canto de um cômodo tem 400 mm de altura e a base em forma de um quarto de círculo de raio 250 mm. Determine o centro de gravidade do cesto de lixo, sabendo que ele é feito de uma chapa de metal de espessura uniforme.

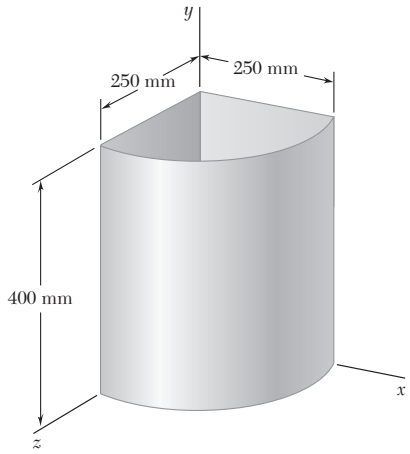


Figura P5.108

5.109 Um suporte de montagem para componentes eletrônicos é conformado a partir de uma chapa de metal de espessura uniforme. Determine o centro de gravidade do suporte.

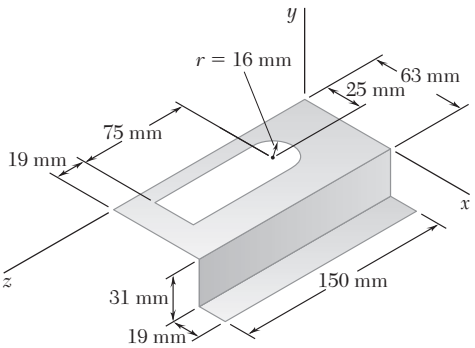


Figura *P5.109*

5.110 Uma chapa fina de plástico de espessura uniforme é dobrada na forma de porta-arquivo. Determine o centro de gravidade do organizador.

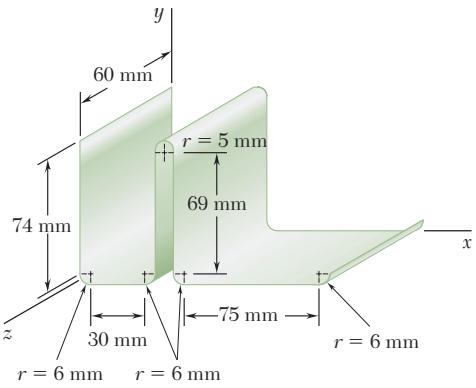


Figura P5.110

5.111 Um toldo de janela é fabricado a partir de uma chapa metálica de espessura uniforme. Determine o centro de gravidade do toldo.

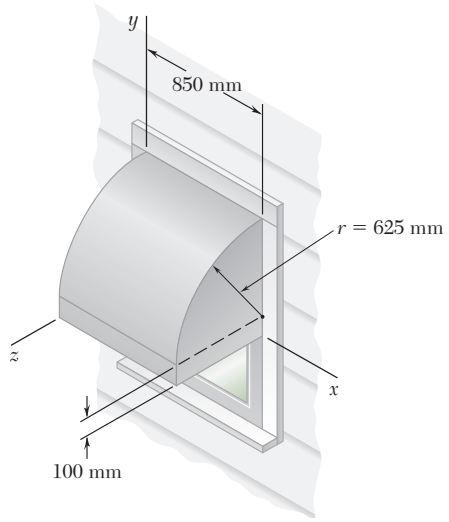


Figura P5.111

5.112 Um cotovelo para o duto de um sistema de ventilação é feito de chapa metálica de espessura uniforme. Determine o centro de gravidade do cotovelo.

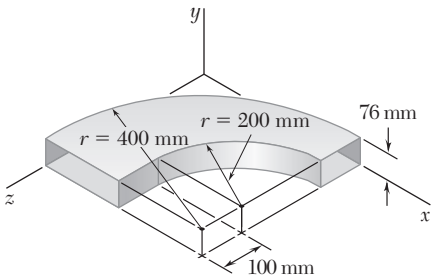


Figura P5.112

5.113 Um duto cilíndrico de 200 mm de diâmetro e um duto retangular de 100 × 200 mm devem ser unidos tal como indica a figura. Sabendo que os dutos são fabricados a partir da mesma chapa de metal, que tem espessura uniforme, determine o centro de gravidade do conjunto.

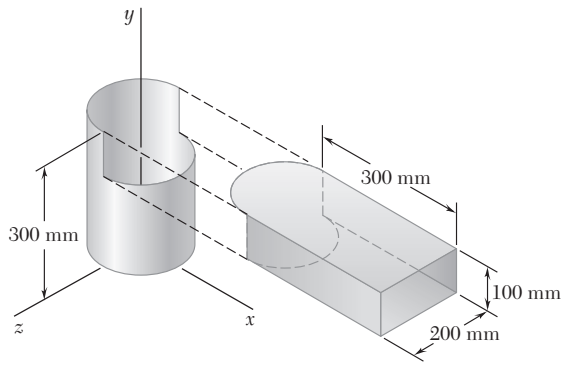


Figura *P5.113*

5.114 Um arame de aço fino de seção reta uniforme é dobrado na forma mostrada na figura. Determine seu centro de gravidade.

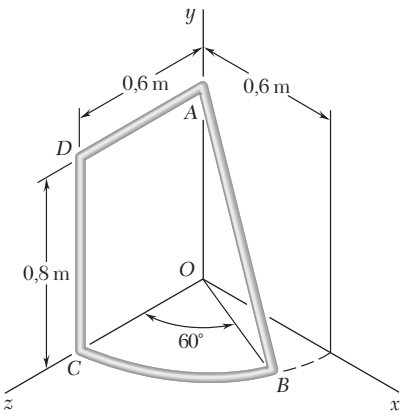


Figura P5.114

5.115 **e** ***5.116*** Determine o centro de gravidade mostrada na figura, sabendo que ela é feita de barras finas de latão de diâmetro uniforme.

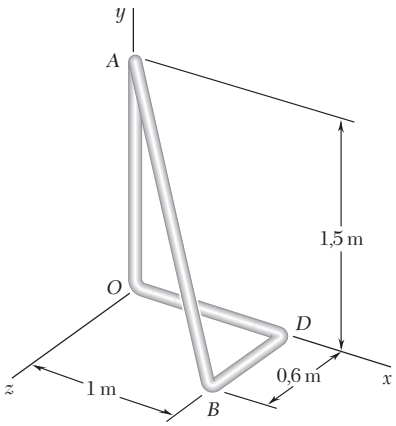


Figura P5.115

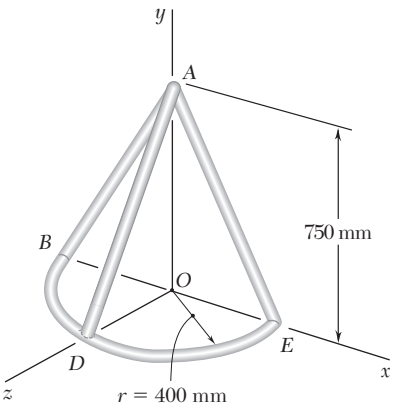


Figura *P5.116*

5.117 A estrutura de uma estufa de plantas é construída a partir de tubos uniformes de alumínio. Determine o centro de gravidade da parte da estrutura mostrada na figura.

5.118 Um cinzel tem um punho de plástico e uma lâmina e haste de aço. Sabendo que a densidade do plástico é 1.030 kg/m^3 e o do aço é 7.860 kg/m^3, determine o centro de gravidade dessa ferramenta.

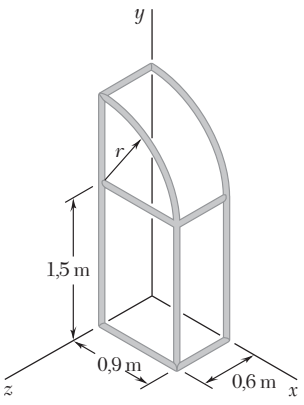


Figura P5.117

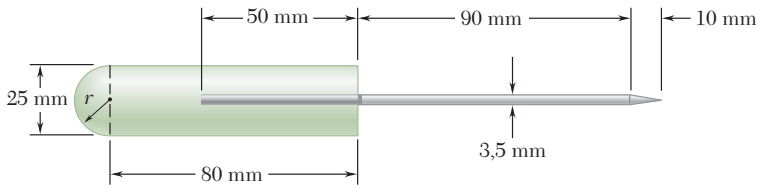


Figura P5.118

5.119 Uma bucha de bronze é montada na parte interior de uma luva de aço. Sabendo que o peso específico do bronze é 57.240 N/m^3 e a do aço é 51.120 N/m^3, determine o centro de gravidade do conjunto.

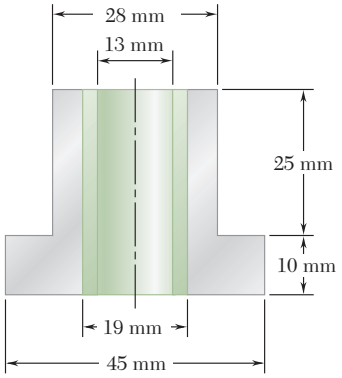


Figura P5.119

5.120 Um colar de bronze de comprimento 60 mm é montado em uma barra de alumínio de comprimento 100 mm. Determine o centro de gravidade do corpo composto. (Peso específico do latão 55.080 N/m^3, alumínio 18.180 N/m^3.)

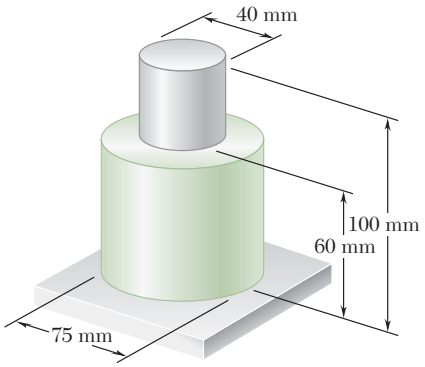


Figura *P5.120*

5.121 Uma pequena mesa com tampo de vidro de três pernas igualmente espaçadas feitas em tubos de aço cujo diâmetro externo é 24 mm e a área da seção transversal de 150 mm^2. O diâmetro e a espessura do tampo de vidro é 600 mm e 10 mm, respectivamente. Sabendo que a densidade do aço é 7.860 kg/m^3 e do vidro é 2.190 kg/m^3, determine o centro de gravidade da mesa.

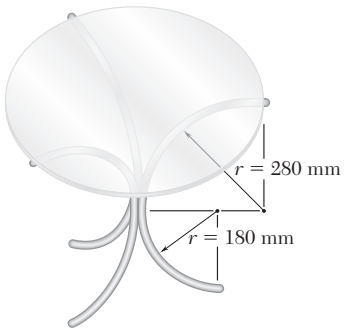


Figura P5.121

5.122 a 5.124 Determine por integração direta os valores de $\bar{x}$ para os dois sólidos obtidos passando-se um plano de corte vertical através da forma dada na Fig. 5.21. O plano de corte é paralelo à base da forma dada e divide-se em dois sólidos de mesma altura.

5.122 Um hemisfério.

5.123 Um semielipsoide de revolução.

5.124 Uma paraboloide de revolução.

5.125 e *5.126* Determine o centroide do volume obtido pela rotação da área sombreada da figura sobre o eixo x.

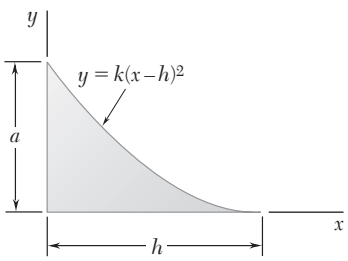


Figura P5.125

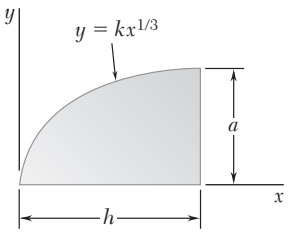


Figura *P5.126*

5.127 Determine o centroide do sólido obtido pela rotação da área sombreada da figura em tomo da linha $x = h$.

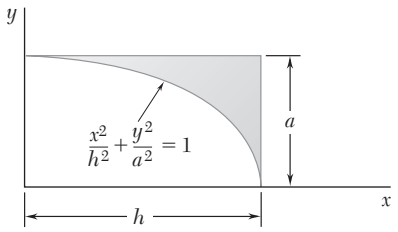


Figura *P5.127*

***5.128** Determine o centroide do sólido gerado pela revolução da parte da curva senoidal mostrada na figura em torno do eixo x.

***5.129** Determine o centroide do sólido gerado pela revolução da parte da curva senoidal mostrada na figura em torno do eixo y. (*Dica*: use uma casca cilíndrica delgada de raio r e espessura dr como elemento do sólido.).

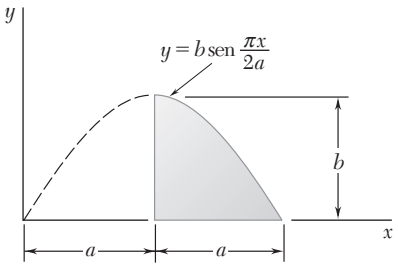


Figura P5.128 e P5.129

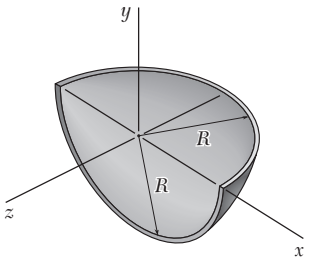


Figura *P5.131*

***5.130** Mostre que, para uma pirâmide regular de altura h e n lados ($n = 3, 4, \ldots$), o centroide do volume da pirâmide está localizado a uma distância $h/4$ acima da base.

***5.131** Determine por integração direta a localização do centroide de metade de uma casca hemisférica delgada uniforme de raio R.

5.132 Os lados e a base de uma poncheira têm espessura uniforme t. Se $t << R$ e $R = 250$ mm, determine a localização do centro de gravidade (*a*) da poncheira, (*b*) do ponche.

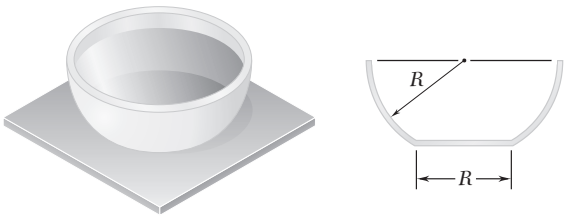


Figura P5.132

5.133 Depois de nivelar um lote, um construtor coloca quatro estacas para indicar os cantos da base para uma casa. Para prover uma base nivelada firme, o construtor coloca um mínimo de 75 mm de brita abaixo da base. Determine o volume de brita necessário e a coordenada x do centroide do volume de brita. (*Dica*: o fundo da brita é um plano inclinado, que pode ser representado pela equação $y = a + bx + cz$.)

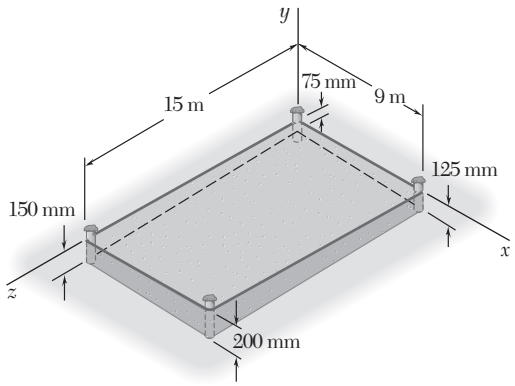


Figura P5.133

5.134 Determine por integração direta a localização do centroide do sólido limitado pelo plano xz e pela parte mostrada da superfície $y = 16h(ax - x^2)(bz - z^2)/a^2b^2$.

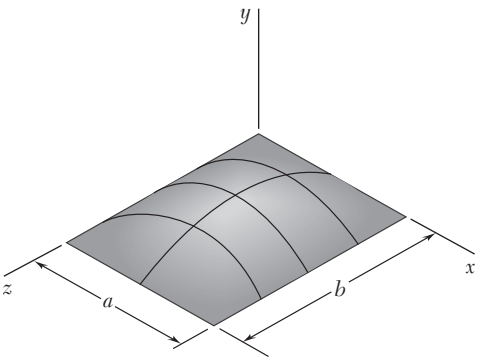


Figura P5.134

5.135 Determine o centroide da seção mostrada na figura, que foi obtida pelo corte de um tubo circular fino por dois planos inclinados.

***5.136** Determine o centroide da seção mostrada na figura, que foi obtida pelo corte de um cilindro elíptico por um plano inclinado.

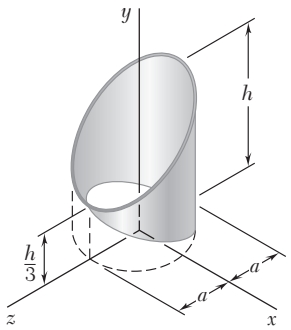


Figura *P5.135*

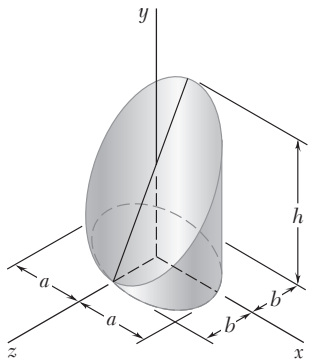


Figura P5.136

REVISÃO E RESUMO

Este capítulo foi dedicado principalmente à determinação do *centro de gravidade* de um corpo rígido, ou seja, à determinação do ponto G no qual uma única força $\mathbf{W}$, chamada de *peso* do corpo, pode ser aplicada para representar o efeito da atração da Terra sobre o corpo.

Centro de gravidade de um corpo bidimensional

Na primeira parte do capítulo, consideramos *corpos bidimensionais*, tais como placas planas e arames contidos no plano xy. Somando-se, os componentes de força na direção vertical z e os momentos em relação aos eixos horizontais x e y [Seção 5.2], deduzimos as relações

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \tag{5.2}$$

que definem o peso do corpo e as coordenadas x e y do seu centro de gravidade.

Centroide de uma área ou linha

No caso de uma *placa plana homogênea de espessura uniforme* [Seção 5.3], o centro de gravidade G da placa coincide com o *centroide* C *da área* A da placa, cujas coordenadas são definidas pelas relações

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \tag{5.3}$$

Momentos de primeira ordem

De forma análoga, a determinação do centro de gravidade de um *arame homogêneo de seção transversal uniforme* contido em um plano se reduz à determinação do *centroide* C *da linha* L representando o arame. Temos:

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \tag{5.4}$$

As integrais nas Eqs. (5.3) são chamadas de *momentos de primeira ordem* da área A em relação aos eixos y e x e são representadas por Q_y e Q_x, respectivamente [Seção 5.4]. Temos:

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A \tag{5.6}$$

Os momentos de primeira ordem de uma linha podem ser definidos de maneira análoga.

Propriedades de simetria

A determinação do centroide C de uma área ou linha é simplificada quando a área ou linha apresenta certas *propriedades de simetria*. Se a área ou linha for simétrica em relação a um eixo, seu centroide C está nesse eixo; se for simétrica em relação a dois eixos, C está na interseção dos dois eixos; se for simétrica em relação ao centro O, C coincide com O.

Centro de gravidade de um corpo composto

As *áreas e os centroides de várias formas comuns* estão tabelados na Fig. 5.8. Quando for possível dividir uma placa plana em várias dessas formas, poderemos determinar as coordenadas $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ do seu centro de gravidade G a partir das coordenadas $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., e $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, ... dos centros de gravidade G_1, G_2 ..., das várias partes [Seção 5.5]. Igualando os momentos em relação aos eixos y e x, respectivamente (Fig. 5.24), temos:

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \tag{5.7}$$

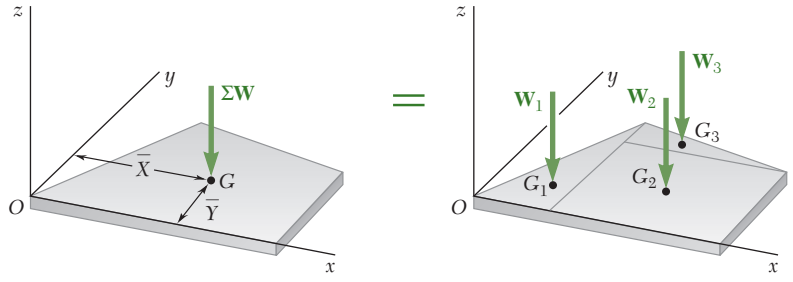


Figura 5.24

Se a placa for homogênea e de espessura uniforme, seu centro de gravidade coincide com o centroide C da área da placa, e as Eqs. (5.7) se reduzem a:

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A \tag{5.8}$$

Essas equações fornecem os momentos de primeira ordem da área composta ou podem ser resolvidas para as coordenadas $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ do seu centroide [Problema Resolvido 5.1]. A determinação do centro de gravidade de um arame composto é efetuada de maneira semelhante [Problema Resolvido 5.2].

Determinação do centroide por integração

Quando uma superfície está limitada por curvas analíticas, podem-se determinar as coordenadas do seu centroide por *integração* [Seção 5.6]. Isso pode ser feito avaliando-se as integrais duplas nas Eqs. (5.3) ou uma *integral simples* que usa um dos elementos de área delgadas, retangulares ou em forma de torta, mostradas na Fig. 5.12. Representadas por $\bar{x}_{el}$ e $\bar{y}_{el}$ as coordenadas do centroide do elemento dA, temos

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA \qquad Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA \tag{5.9}$$

É vantajoso usar o mesmo elemento de área para calcular os dois momentos de primeira ordem Q_y e Q_x; o mesmo elemento pode também ser usado para se determinar a área A [Problema Resolvido 5.4].

Teorema de Pappus-Guldinus

Os *teoremas de Pappus-Guldinus* relacionam a determinação da área de uma superfície de revolução ou o volume de um sólido de revolução à determinação do centroide da curva ou superfície geratriz [Seção 5.7]. A área A da superfície gerada pela rotação de uma curva de comprimento L em torno de um eixo fixo (Fig. 5.25*a*) é

$$A = 2\pi \bar{y} L \tag{5.10}$$

onde $\bar{y}$ representa a distância do centroide C da curva até o eixo fixo. De modo semelhante, o volume V do sólido gerado pela rotação de uma área A em torno de um eixo fixo (Fig. 5.25*b*) é

$$V = 2\pi \bar{y} A \tag{5.11}$$

onde $\bar{y}$ representa a distância do centroide C da área até o eixo fixo.

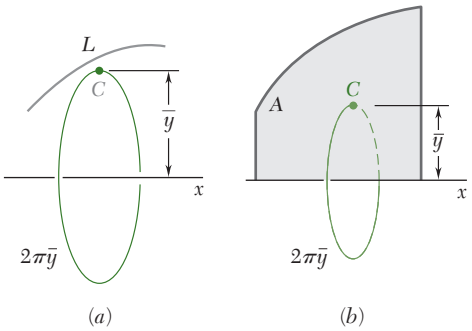


Figura 5.25

Cargas distribuídas

Pode-se também usar o conceito de centroide de uma superfície para resolver outros problemas além daqueles que envolvem o peso de placas planas. Por exemplo, para se determinar as reações nos apoios de uma viga [Seção 5.8], podemos substituir uma *carga distribuída* w por uma carga concentrada $\mathbf{W}$ igual em intensidade à área A sob a curva de carregamento e passando pelo centroide C dessa área (Fig. 5.26). Pode-se adotar a mesma abordagem para se determinar a resultante das forças hidrostáticas exercidas em uma placa retangular submersa em um líquido [Seção 5.9].

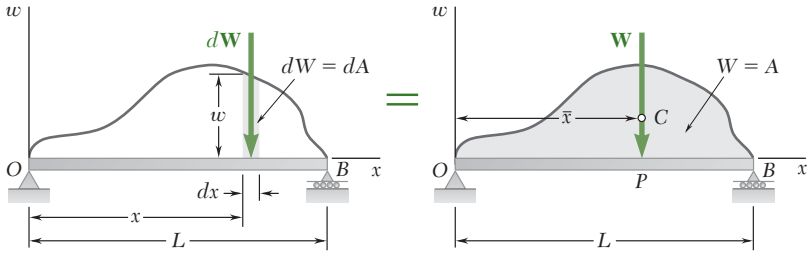


Figura 5.26

Centro de gravidade de um corpo tridimensional

A última parte do capítulo foi dedicada à determinação do *centro de gravidade G de um corpo tridimensional*. As coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ de G foram definidas pelas relações

$$\bar{x}W = \int x\, dW \qquad \bar{y}W = \int y\, dW \qquad \bar{z}W = \int z\, dW \tag{5.17}$$

Centroide de um sólido

No caso de um *corpo homogêneo*, o centro de gravidade G coincide com o *centroide C do volume V* do corpo; as coordenadas de C são definidas pelas relações:

$$\bar{x}V = \int x\, dV \qquad \bar{y}V = \int y\, dV \qquad \bar{z}V = \int z\, dV \tag{5.19}$$

Se o sólido apresenta um *plano de simetria*, seu centroide C estará nesse plano; se apresenta dois planos de simetria, C será localizado na linha de interseção dos dois planos; se apresenta três planos de simetria que se interceptam em um único ponto, C coincidirá com esse ponto [Seção 5.10].

Centro de gravidade de um corpo composto

Os *volumes e centroides de várias formas tridimensionais comuns* estão tabelados na Fig. 5.21. Quando é possível dividir um corpo em várias dessas formas, podem-se determinar as coordenadas $\overline{X}$, $\overline{Y}$, e $\overline{Z}$ do seu centro de gravidade G a partir das coordenadas correspondentes dos centros de gravidade de suas várias partes [Seção 5.11]. Temos

$$\overline{X}\Sigma W = \Sigma \overline{x}\, W \qquad \overline{Y}\Sigma W = \Sigma \overline{y}\, W \qquad \overline{Z}\Sigma W = \Sigma \overline{z}\, W \tag{5.20}$$

Se o corpo é feito de um material homogêneo, seu centro de gravidade coincide com o centroide C do seu volume, e escrevemos [Problemas Resolvidos 5.11 e 5.12]

$$\overline{X}\Sigma V = \Sigma \overline{x}\, V \qquad \overline{Y}\Sigma V = \Sigma \overline{y}\, V \qquad \overline{Z}\Sigma V = \Sigma \overline{z}\, V \tag{5.21}$$

Determinação do centroide por integração

Quando um volume é limitado por superfícies analíticas, as coordenadas do seu centroide podem ser determinadas por *integração* [Seção 5.12]. Para se evitar o cálculo de integrais triplas nas Eqs. (5.19), podemos usar elementos de volume no formato de elementos delgados, como mostra a Fig. 5.27.

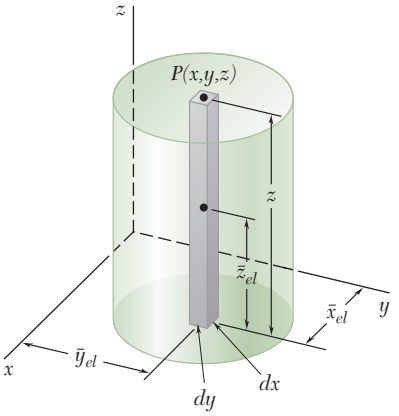


Figura 5.27

Representadas por $\overline{x}_{el}$, $\overline{y}_{el}$ e $\overline{z}_{el}$ as coordenadas do centroide do elemento dV, reescrevemos as Eqs. (5.19) como

$$\overline{x}V = \int \overline{x}_{el}\, dV \qquad \overline{y}V = \int \overline{y}_{el}\, dV \qquad \overline{z}V = \int \overline{z}_{el}\, dV \tag{5.23}$$

que envolvem somente integrais duplas. Se o sólido apresenta *dois planos de simetria*, seu centroide C está localizado na linha de interseção dos mesmos. Escolhendo-se o eixo x ao longo dessa linha e dividindo-se o sólido em fatias finas paralelas ao plano yz, podemos determinar C a partir da relação

$$\overline{x}V = \int \overline{x}_{el}\, dV \tag{5.24}$$

com uma *integração simples* [Problema Resolvido 5.13]. Para um corpo de revolução, essas fatias são circulares e seu volume é dado na Fig. 5.28.

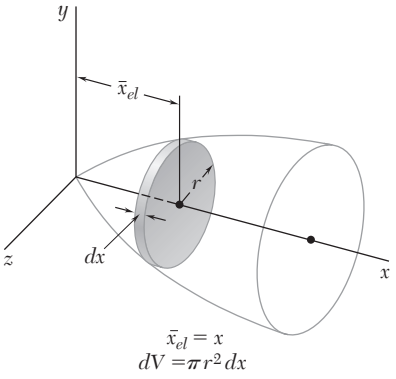


Figura 5.28

5.137 e 5.138 Determine o centroide da área plana das figuras mostradas a seguir.

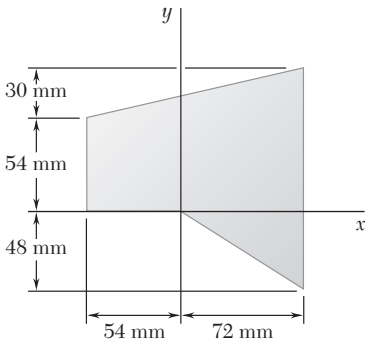


Figura P5.137

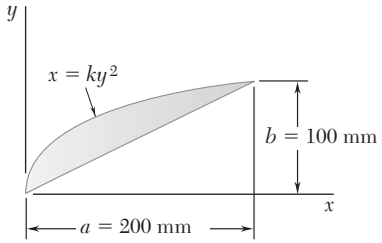


Figura P5.138

5.139 A moldura de um letreiro é fabricada com uma barra chata de aço fina cuja massa por unidade de comprimento é 4,73 kg/m. A moldura é sustentada por um pino em *C* e pelo cabo *AB*. Determine (*a*) a tensão no cabo, (*b*) a reação em *C*.

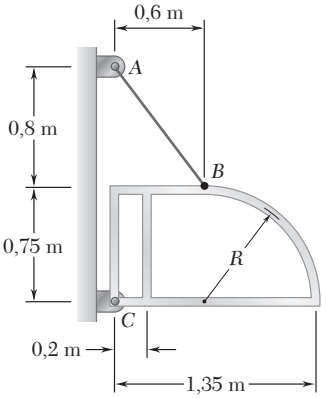


Figura *P5.139*

5.140 Determine por integração direta o centroide da área mostrada na figura. Demonstre sua resposta em termos de *a* e *h*.

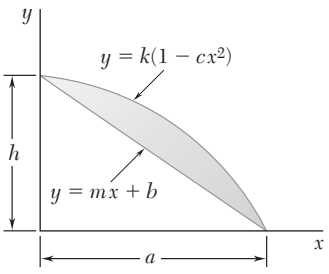


Figura P5.140

5.141 Determine por integração direta o centroide da área mostrada na figura. Demonstre sua resposta em termos de a e b.

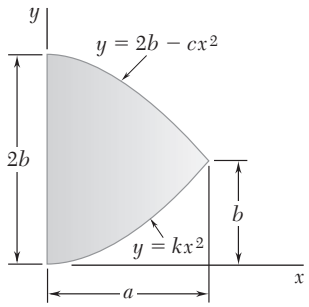


Figura P5.141

5.142 Sabendo que dois topos iguais foram removidos da esfera de madeira de diâmetro 250 mm, determine a área total da superfície da parte restante.

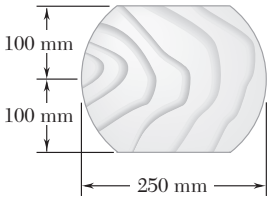


Figura P5.142

5.143 Determine as reações nos apoios da viga para o carregamento mostrado na figura.

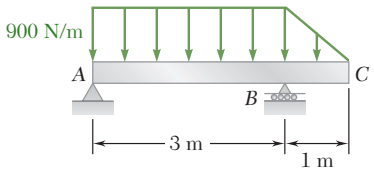


Figura P5.143

5.144 Uma viga é submetida a uma carga distribuída linearmente em ordem decrescente e repousa em dois suportes largos BC e DE, que exercem cargas uniformemente distribuídas para cima como mostrado na figura. Determine os valores de w_{BC} e w_{DE} correspondente ao equilíbrio quando $w_A = 600$ N/m.

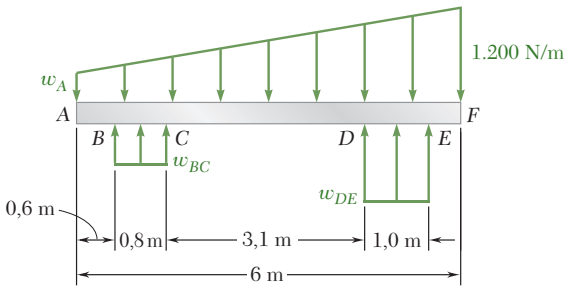


Figura *P5.144*

5.145 A comporta quadrada AB é mantida na posição mostrada na figura por meio de articulações ao longo de sua aresta superior A e por um pino de cisalhamento em B. Para uma profundidade de água $d = 1$ m, determine a força exercida sobre a comporta pelo pino de cisalhamento.

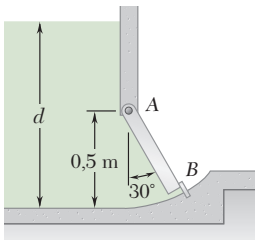


Figura *P5.145*

5.146 Considere o corpo composto mostrado na figura. Determine (*a*) o valor de $\bar{x}$ quando $h = L/2$, (*b*) a razão h/L para a qual $\bar{x} = L$.

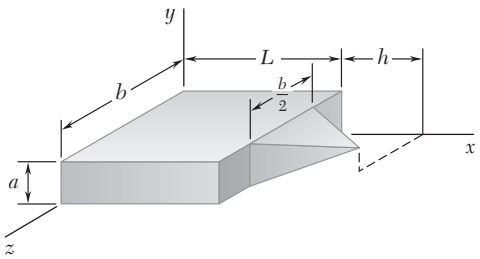


Figura P5.146

5.147 Determine o centro de gravidade da chapa metálica conformada tal como mostra a figura.

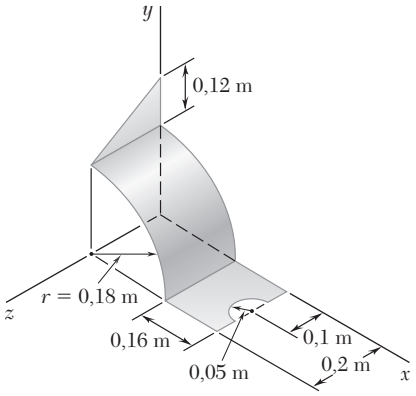


Figura P5.147

5.148 Determine o centroide do sólido obtido pela rotação da área sombreada da figura em torno do eixo *x*.

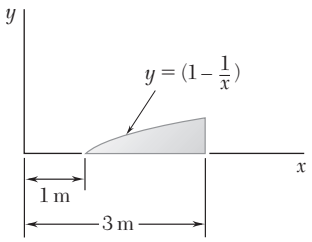


Figura P5.148

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

5.C1 A viga é usada para carregar um conjunto de variadas cargas uniformes ou não distribuídas como mostra a Fig. P5.C1*a*. Divida a área abaixo de cada curva de carga em dois triângulos (ver Problema Resolvida 5.9) e, então, usando um programa de computador, calcule as reações em *A* e *B*. Use o programa para calcular as reações dos apoios das vigas nas Fig. P5.C1*b* e *c*.

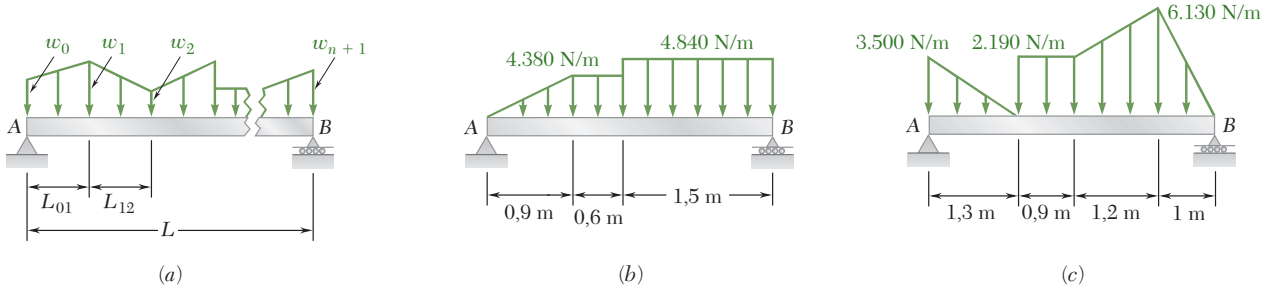


Figura P5.C1

5.C2 A estrutura tridimensional mostrada na figura é fabricada a partir de cinco hastes finas de aço de igual diâmetro. Usando um programa de computador, determine as coordenadas do centro de gravidade da estrutura. Determine, pelo programa, as coordenadas do centro de gravidade quando (*a*) $h = 12$ m, $R = 5$ m, $\alpha = 90°$; (*b*) $h = 570$ mm, $R = 760$ mm, $\alpha = 30°$; (*c*) $h = 21$ m, $R = 20$ m, $\alpha = 135°$.

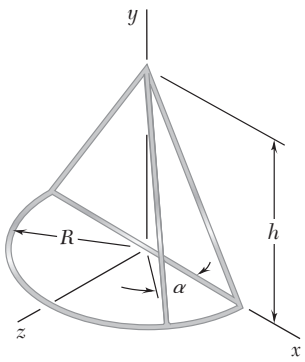


Figura P5.C2

5.C3 Um tanque aberto deve ser lentamente enchido com água. (A densidade da água é 10^3 kg/m^3.) Utilizando um programa de computador, determine a resultante de forças de pressão exercidas pela água em uma seção de 1 m de largura do lado *ABC* do tanque. Determine a resultante da força devido à pressão para valores de *d* entre 0 e 3 m usando incrementos de 0,25 m.

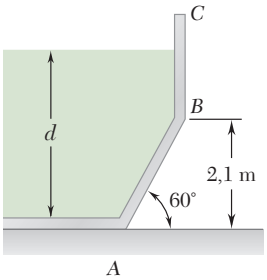


Figura P5.C3

5.C4 Aproximando-se a curva mostrada por 10 segmentos em linha reta e usando um programa de computador, determine a localização do centroide da linha. Utilize esse programa para determine a localização do centroide quando (*a*) $a = 25$ mm, $L = 275$ mm, $h = 50$ mm; (*b*) $a = 50$ mm, $L = 425$ mm, $h = 100$ mm; (*c*) $a = 125$ mm, $L = 300$ mm, $h = 25$ mm.

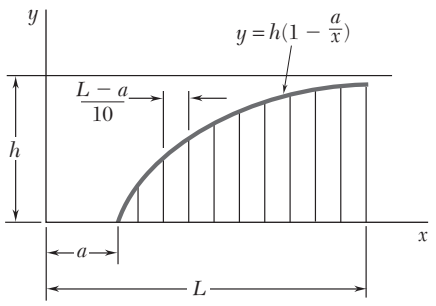


Figura P5.C4

5.C5 Aproxime área sombreada mostrada na figura por uma série de n retângulos, cada um com largura Δa e da forma $bcc'b'$, usando um programa de computador, calcule as coordenadas do centroide da área. Use esse programa para localizar o centroide quando (*a*) $m = 2$, $a = 80$ mm, $h = 80$ mm; (*b*) $m = 2$, $a = 80$ mm, $h = 500$ mm;. (*c*) $m = 5$, $a = 80$ mm, $h = 80$ mm; (*d*) $m = 5$, $a = 80$ mm, $h = 500$ mm. Em cada caso, compare as respostas obtidas com os valores exatos de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ das fórmulas indicadas na Fig. 5.8A e determine a porcentagem de erro.

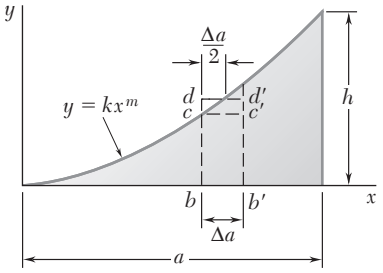


Figura P5.C5

5.C6 Resolva o Problema 5.C5 usando os retângulos $bdd'b'$.

***5.C7** Um fazendeiro pediu a um grupo de estudantes de engenharia para determinar o volume de água em um pequeno tanque. Usando cordas, os estudantes, primeiro dispuseram uma rede de 0,6 × 0,6 m no tanque e, então, registraram a profundidade da água em metros, por cada ponto de interseção

da rede (ver a tabela anexa). Usando um programa de computador determine (*a*) o volume de água do tanque, (*b*) a localização do centro de gravidade da água. Aproxime a profundidade de cada elemento de água 0,6 × 0,6 m pela profundidade média dos quatro cantos do elemento.

Corda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	…	…	…	…	0	0	0	…	…	…
2	…	…	0	0	0	1	0	0	0	…
3	…	0	0	1	3	3	3	1	0	0
4	0	0	1	3	6	6	6	3	1	0
5	0	1	3	6	8	8	6	3	1	0
6	0	1	3	6	8	7	7	3	0	0
7	0	3	4	6	6	6	4	1	0	…
8	0	3	3	3	3	3	1	0	0	…
9	0	0	0	1	1	0	0	0	…	…
10	…	…	0	0	0	0	…	…	…	…

Treliças, tais com estas da ponte em arco tipo Pratt de viga em balanço, localizada no estado de Nova York, fornecem uma solução prática e econômica para muitos problemas de engenharia.

CAPÍTULO 6

Análise de estruturas

6 Análise de estruturas

6.1 Introdução
6.2 Definição de uma treliça
6.3 Treliças simples
6.4 Análise de treliças pelo Método dos nós
6.5 Nós sujeitos a condições especiais de carregamento
6.6 Treliças espaciais
6.7 Análise de treliças pelo método das seções
6.8 Treliças feitas de várias treliças simples
6.9 Estruturas que contêm elementos sujeitos à ação de múltiplas forças
6.10 Análise de uma estrutura
6.11 Estruturas que deixam de ser rígidas quando separadas de seus apoios
6.12 Máquinas

6.1 Introdução

Os problemas estudados nos capítulos precedentes diziam respeito ao equilíbrio de um único corpo rígido, e todas as forças consideradas eram externas a esse corpo. Consideraremos, agora, problemas que tratam do equilíbrio de estruturas feitas de várias partes interligadas. Esses problemas tratam da determinação das forças não apenas externas que agem sobre uma estrutura, mas também daquelas que mantêm unidas as várias partes da estrutura. Do ponto de vista da estrutura como um todo, essas forças são *forças internas.*

Considere, por exemplo, o guindaste ilustrado na Fig. 6.1*a*, que suporta uma carga *W.* O guindaste consiste em três vigas, *AD*, *CF* e *BE*, ligadas por pinos sem atrito. Ele é preso por um pino em *A* e é por um cabo *DG.* O diagrama de corpo livre do guindaste foi desenhado na Fig. 6.1*b*. As forças externas estão indicadas no diagrama e incluem o peso **W**, as duas componentes $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$ da reação em *A* e a força **T** exercida pelo cabo *D.* As forças internas que mantêm unidas as várias partes do guindaste não aparecem no diagrama. Se, contudo, o guindaste fosse desmembrado e um diagrama de corpo livre para cada uma de suas partes componentes fosse traçado, as forças que mantêm as três vigas unidas deveriam também ser representadas, uma vez que são forças externas sob o ponto de vista de cada parte componente (Fig. 6.1*c*).

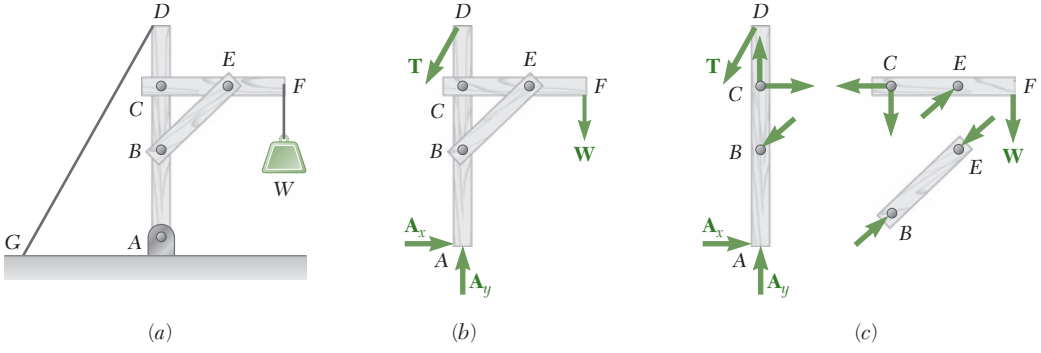


Figura 6.1

Deve-se notar que a força exercida pela barra *BE* sobre o ponto *B* da barra *AD* é igual e oposta à força exercida no mesmo ponto da barra *BE* pela barra *AD;* da mesma forma, a força exercida por *BE* sobre o ponto *E* de *CF* é igual e oposta à força exercida por *CF* sobre *BE;* e as componentes da força exercida por *CF* sobre o ponto *C* de *AD* são iguais e opostas às componentes da força exercida por *AD* sobre *CF*. Isto está de acordo com a terceira lei de Newton, que estabelece que *forças de ação e reação entre corpos em contato têm o mesmo módulo, a mesma linha de ação e sentidos opostos*. Como mencionado no Capítulo 1, essa lei é um dos seis princípios fundamentais da Mecânica clássica e sua aplicação é essencial à solução de problemas envolvendo corpos interligados.

Neste capitulo, serão consideradas três importantes categorias de estruturas em engenharia:

1. *Treliças,* que são projetadas para apoiar cargas e geralmente considerados como fixas e totalmente vinculadas. Treliças são formadas unicamente por elementos retilíneos conectados juntas localizadas nas extremidades de cada elemento. Os elementos de uma treliça são, portanto, *elementos sujeitos a duas forças*, ou seja, elementos que atuam sob duas forças de mesmo módulo mas de sentidos opostos ao elemento.
2. *Estruturas,* que também são projetadas para apoiar cargas e que também são totalmente vinculadas. As estruturas, no entanto, têm, como no guindaste da Fig. 6.1, pelo menos um *elemento sujeito a múltiplas forças*, ou seja, um elemento sobre o qual são aplicadas três ou mais forças que na maioria das vezes não são direcionadas ao longo do elemento.
3. *Máquinas,* que são projetadas para transmitir e modificar forças e são estruturas que contêm partes móveis. As máquinas tais como as estruturas, sempre contêm ao menos um elemento sujeito a múltiplas forças.

Foto 6.1 A foto mostra uma conexão por pinos de um vão de aproximação da ponte San Francisco – Oakland Bay.

TRELIÇAS

6.2 Definição de uma treliça

A treliça é um dos principais tipos de estruturas da engenharia. Ela oferece, ao mesmo tempo, uma solução prática e econômica a muitas situações de engenharia, especialmente no projeto de pontes e edifícios. Uma treliça típica é mostrada na Fig. 6.2*a*. Ela consiste em elementos retos unidos por nós. Elementos de treliça são unidos apenas em suas extremidades; portanto, nenhum deles é contínuo por meio de um nó. Na Fig. 6.2*a*, por exemplo, não existe um elemento *AB*; em vez disso, existem dois elementos distintos *AD* e *DB*. A maioria das estruturas reais é feita de várias treliças unidas para formar uma estrutura espacial. Cada treliça é projetada para sustentar cargas que atuam em seu plano, podendo ser tratada como uma estrutura bidimensional.

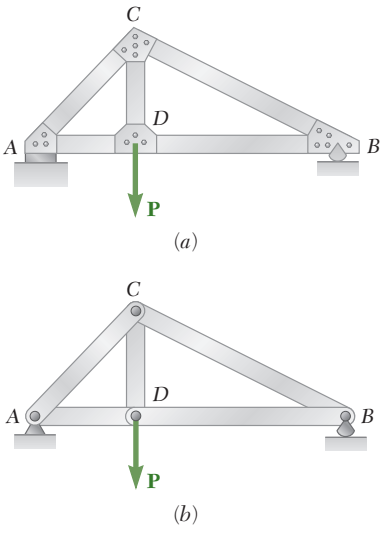


Figura 6.2

Em geral, os elementos de uma treliça são delgados e podem suportar uma pequena carga lateral; todas as cargas, portanto, devem ser aplicadas aos vários nós, e não aos elementos propriamente ditos. Quando uma carga concentrada é aplicada entre dois nós, ou quando uma carga distribuída é suportada pela treliça, como no caso de uma treliça de ponte, é preciso prever um sistema de pavimentação que, por meio do uso de longarinas e vigas transversais, transfere a carga aos nós (Fig. 6.3).

Também supõe-se que os pesos dos elementos da treliça são aplicados nos nós, sendo metade do peso do elemento aplicado a cada um dos dois nós que o une. Embora os elementos sejam, de fato, unidos por meio de conexões aparafusadas, rebitadas ou soldadas, costuma-se considerar que são unidos por meio de pinos; portanto, as forças em cada extremidade de um elemento reduzem-se a uma única força sem nenhum momento. Assim, as únicas forças consideradas, exercidas a um elemento de treliça, reduzem-se a uma única força em cada extremidade do elemento.

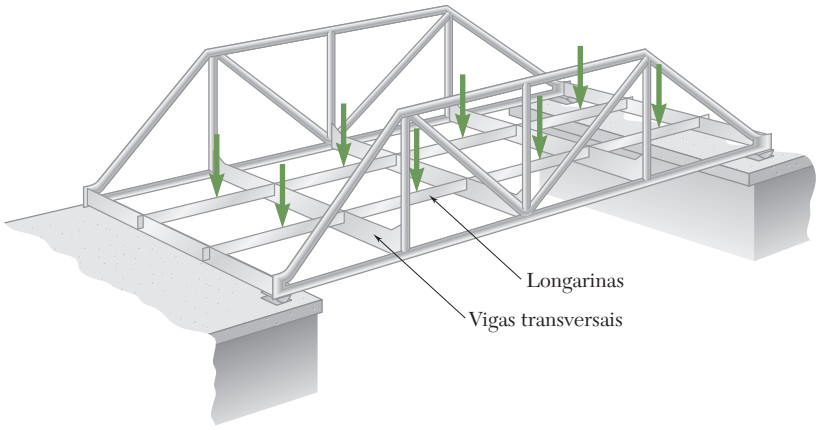


Figura 6.3

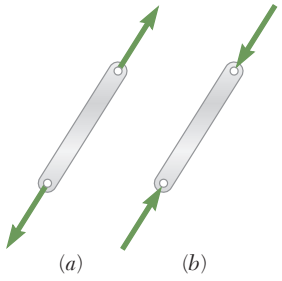


Figura 6.4

Sendo assim, cada elemento pode, ser tratado como um elemento sujeito à ação de duas forças, e a treliça toda pode ser considerada como um grupo de pinos e elementos sujeitos à ação de duas forças (Fig. 6.2*b*). A ação das forças sob um elemento individual pode ocorrer conforme indicado nos dois esboços da Fig. 6.4. Em (*a*), as forças tendem a dividir em pedaços o elemento, que está sob tração, enquanto, em (*b*), as forças tendem a comprimir o elemento, que está sob compressão. Várias treliças típicas são ilustradas na Fig. 6.5.

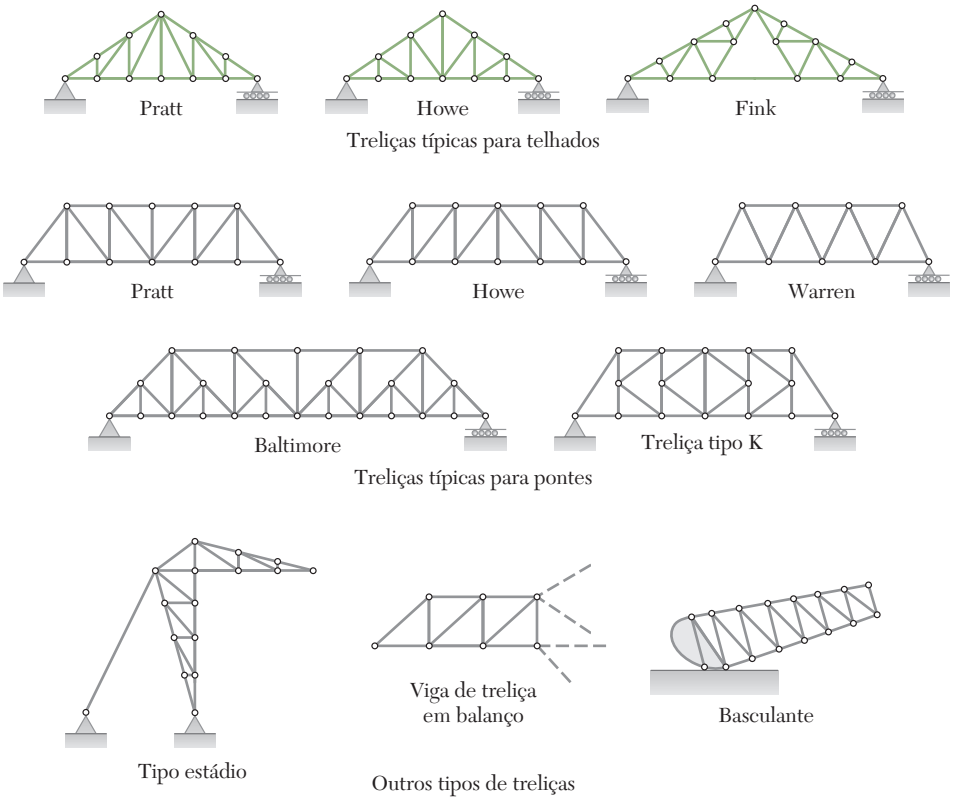


Figura 6.5

6.3 Treliças simples

Considere-se a treliça da Fig. 6.6*a*, constituída de quatro elementos ligados por pinos em *A*, *B*, *C* e *D*. Se uma carga for aplicada em *B*, a treliça sofrerá grande deformação e perderá completamente sua forma original. Por outro lado, a treliça da Fig. 6.6*b*, constituída de três elementos ligados por pinos em A, *B* e *C*, irá deformar-se apenas um pouco sob uma carga aplicada em *B*. A única deformação possível para essa treliça é aquela que envolve pequenas alterações no comprimento de seus elementos. A treliça da Fig. 6.6*b* é chamada de *treliça rígida*, sendo o termo *rígido* usado para indicar que a treliça *não entrará em colapso*.

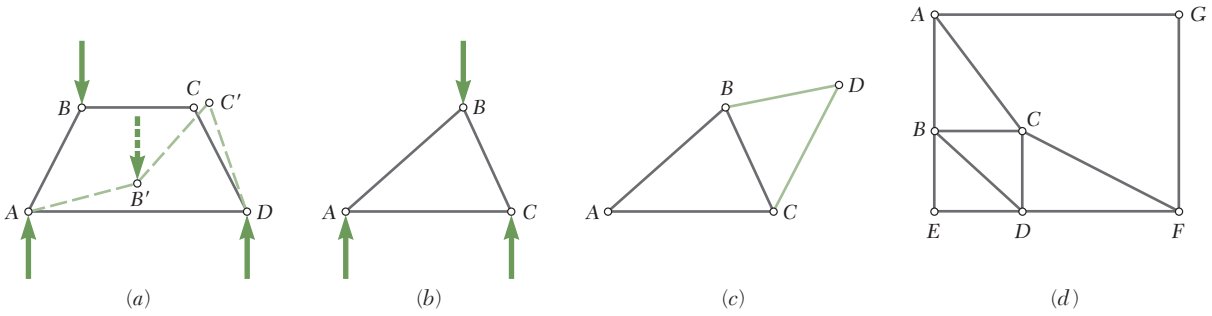


Figura 6.6

Como mostrado na Fig. 6.6*c*, uma extensa treliça rígida pode ser obtida pela adição de dois elementos *BD* e *CD* à treliça triangular básica da Fig. 6.6*b*. Esse procedimento pode ser repetido quantas vezes for preciso, e a treliça resultante será rígida se cada vez que adicionarmos dois novas elementos, estes sejam ligados a diferentes nós existentes e interligados em um novo nó.* Uma treliça que pode ser construída dessa maneira é chamada *treliça simples*.

Deve-se notar que uma treliça simples não é necessariamente composta apenas de triângulos. A treliça da Fig. 6.6*d*, por exemplo, é uma treliça simples que foi construída a partir do triângulo *ABC*, adicionando-se sucessivamente os nós *D*, *E*, *F* e *G*. Por outro lado, treliças rígidas nem sempre são treliças simples, mesmo que pareçam triângulos. As treliças tipo Fink e Baltimore, ilustradas na Fig. 6.5, por exemplo, não são treliças simples, uma vez que não podem ser construídas a partir de um único triângulo da maneira descrita anteriormente. Já todas as outras treliças ilustradas na Fig. 6.5 são simples. (Para a treliça tipo K, começa-se por um dos triângulos centrais.)

Retornando à Fig. 6.6, nota-se que a treliça triangular básica possui três elementos e três nós. A treliça da Fig. 6.6*c* possui dois elementos adicionais e um nó adicional, isto é, ao todo, cinco elementos e quatro nós. Observando que cada vez que dois novos elementos são acrescentados, o número de nós aumenta em um. Deduzimos, então, que em uma treliça simples o número total de elementos é $m = 2n - 3$, onde n é o número total de nós.

Foto 6.2 Duas treliças K foram usadas como componentes principais da ponte móvel da foto, que move sobre uma grande pilha de minério de ferro. A caçamba abaixo das treliças pegava o minério e o despejava novamente até que estivesse completamente misturado. O minério era, então, enviado para a siderurgia para ser processado e transformado em aço.

* Os três nós não podem estar em linha reta.

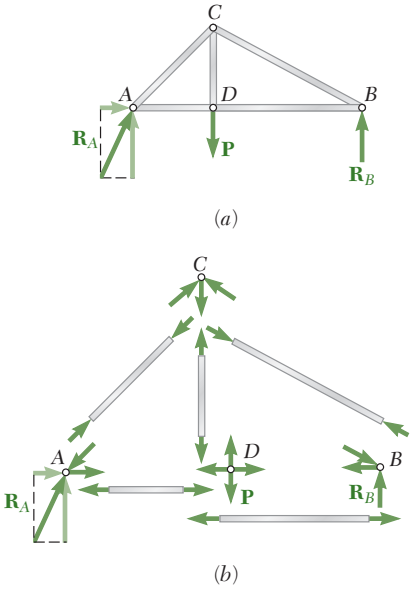


Figura 6.7

6.4 Análise de treliças pelo método dos nós

Foi visto na Seção 6.2 que uma treliça pode ser considerada como um grupo de pinos e elementos sujeitos à ação de duas forças. A treliça da Fig. 6.2, cujo diagrama de corpo livre é ilustrado na Fig. 6.7*a*, pode então ser desmembrada, e um diagrama de corpo livre traçado para cada pino e cada elemento (Fig. 6.7*b*). Cada elemento é submetido a duas forças, uma em cada extremidade, tendo elas mesmo módulo, mesma linha de ação e sentidos opostos (Seção 4.6). Além disso, a terceira lei de Newton indica que as forças de ação e reação entre um elemento e um pino são iguais e opostas. Portanto, as forças exercidas por um elemento sobre os dois pinos que o interliga devem ser dirigidas ao longo desse elemento e ser iguais e opostas. A intensidade comum das forças exercidas por um elemento sobre os dois pinos que o interliga é comumente referida como a *força no elemento* considerada, muito embora essa quantidade seja, na realidade, um escalar. Uma vez que as linhas de ação de todas as forças internas de uma treliça são conhecidas, a análise de uma treliça se reduz ao cálculo das forças em seus vários elementos e à determinação da situação em cada um deles, isto é, se o mesmo está sujeito a tração ou compressão.

Uma vez que a treliça está em equilíbrio, cada pino deve estar em equilíbrio. O fato do pino estar em equilíbrio pode ser demonstrado ao traçar de seu diagrama de corpo livre e por duas equações de equilíbrio (Seção 2.9). Se a treliça contém n pinos, existirão, portanto, $2n$ equações disponíveis, que podem ser resolvidas para $2n$ incógnitas. No caso de uma treliça simples, tem-se $m = 2n - 3$, isto é, $2n = m + 3$, e o número de incógnitas pode ser determinado, a partir dos diagramas de corpo livre dos pinos, pela equação $m + 3$. Isto significa que as forças em todos os elementos, bem como as duas componentes da reação $\mathbf{R}_A$ e da reação $\mathbf{R}_B$, podem ser determinadas considerando-se os diagramas de corpo livre dos pinos.

O fato de a treliça inteira ser um corpo rígido em equilíbrio pode ser usado para escrever três novas equações envolvendo as forças indicadas no diagrama de corpo livre da Fig. 6.7*a*. Uma vez que não contém nenhuma informação extra, essas equações não são independentes das equações associadas com os diagramas de corpo livre dos pinos. Além disso, podem ser usadas para determinar imediatamente os componentes das reações nos apoios. A disposição de pinos e elementos numa treliça simples é tal que será, então, sempre possível encontrar um nó envolvendo apenas duas forças desenvolvidas. Essas forças podem ser determinadas pelos métodos da Seção 2.11, e seus valores transferidos para os nós adjacentes e tratados como quantidades conhecidas nesses nós. Esse procedimento pode ser repetido até que todas as forças desconhecidas tenham sido determinadas.

Foto 6.3 Já que as treliças de telhado, tais como as da foto, requerem apoio somente em suas extremidades, é possível construir edifícios com grandes vãos livres cemtrais.

Como exemplo, a treliça da Fig. 6.7 será analisada considerando-se sucessivamente, o equilíbrio de cada pino, começando por um nó no qual somente duas forças são desconhecidas. Na treliça considerada, todos os pinos são submetidos a pelo menos três forças desconhecidas. Portanto, as reações nos suportes devem primeiramente ser determinadas considerando-se a treliça toda como sendo um corpo livre e usando-se as equações de equilíbrio de um corpo rígido. Dessa maneira, verificamos que $\mathbf{R}_A$ é vertical e determinamos a intensidade de $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$.

O número de forças desconhecidas no nó A é então reduzido para dois, e essas forças podem ser determinadas considerando-se o equilíbrio do

pino *A*. A reação $\mathbf{R}_A$ e as forças $\mathbf{F}_{AC}$ e $\mathbf{F}_{AD}$ exercidas sobre o pino *A* pelos elementos *AC* e *AD*, respectivamente, devem formar um triângulo de forças. Primeiro traçamos $\mathbf{R}_A$ (Fig. 6.8). Ao notar que $\mathbf{F}_{AC}$ e $\mathbf{F}_{AD}$ são dirigidas ao longo de *AC* e *AD*, respectivamente, completamos o triângulo e determinamos a intensidade, a direção e o sentido de $\mathbf{F}_{AC}$ e $\mathbf{F}_{AD}$. As intensidades F_{AC} e F_{AD} representam as forças nos elementos *AC* e *AD*. Como $\mathbf{F}_{AC}$ está direcionada para baixo e para a esquerda, isto é, *em direção ao* nó *A*, o elemento *AC* empurra o pino *A* e fica em compressão. Como $\mathbf{F}_{AD}$ está direcionada *para fora* do nó *A*, o elemento *AD* puxa o pino *A* e está sob tração.

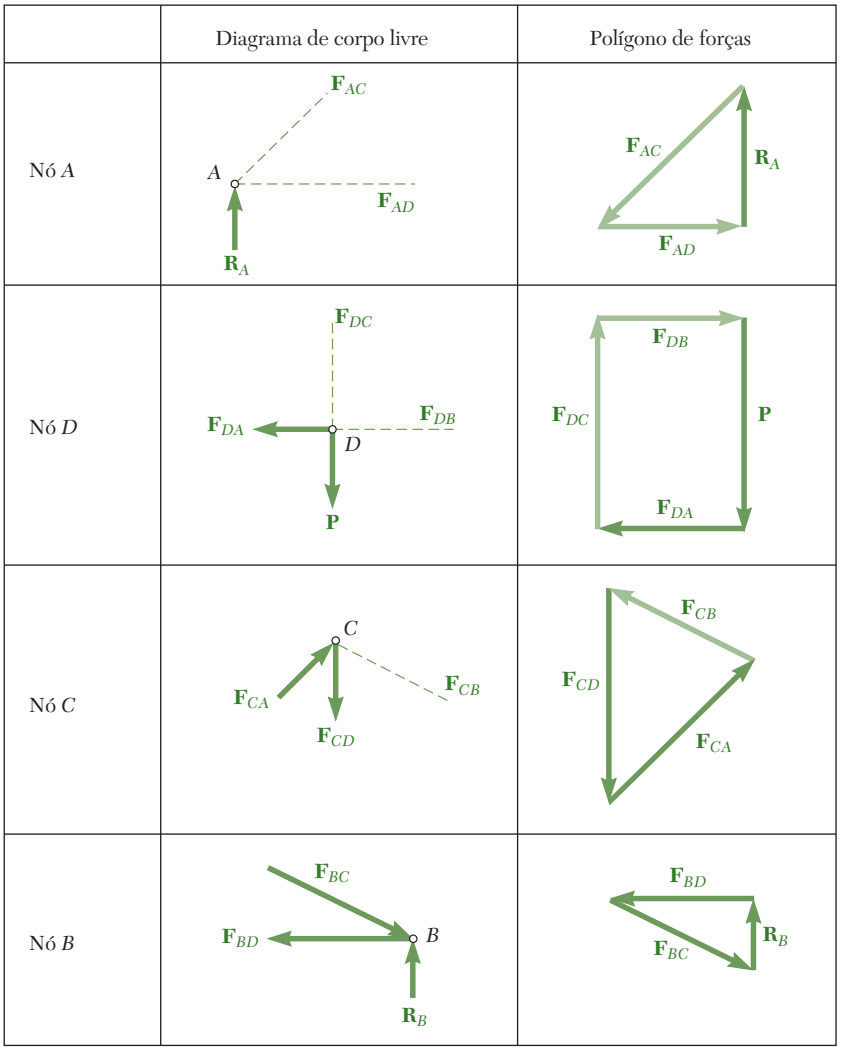


Figura 6.8

Podemos agora prosseguir ao nó *D*, onde somente duas forças, $\mathbf{F}_{DC}$ e $\mathbf{F}_{DB}$, ainda são desconhecidas. As outras forças são a carga **P** dada, e a força $\mathbf{F}_{DA}$ exercida no pino pelo elemento *AD*. Como mencionado anteriormente, essa força é igual e oposta à força $\mathbf{F}_{AD}$ exercida pelo mesmo elemento no pino *A*. Podemos traçar o polígono de forças correspondentes ao nó *D*, como ilustrado na Fig. 6.8, e determinar as forças $\mathbf{F}_{DC}$ e

$\mathbf{F}_{DB}$ por meio desse polígono. Contudo, quando mais de três forças estão envolvidas, em geral é mais conveniente escrever as equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$ e resolvê-las para as duas forças desconhecidas. Uma vez que vimos que ambas as forças movem-se para fora do nó D, os elementos DC e DB puxam o pino e estão sob tração.

A seguir, o nó C é considerado; seu diagrama de corpo livre é mostrado na Fig. 6.8. Observe-se que tanto $\mathbf{F}_{DC}$ como $\mathbf{F}_{CA}$ são conhecidas pela análise de nós precedentes e que somente $\mathbf{F}_{CB}$ é desconhecida. Como o equilíbrio de cada pino possibilita informação suficiente para determinar duas forças desconhecidas, uma verificação de nossa análise é obtida através desse nó. O triângulo de forças é traçado, e a intensidade, direção e sentido de $\mathbf{F}_{CB}$ são determinados. Como $\mathbf{F}_{CB}$ está direcionada para o nó C, o elemento CB empurra o pino C e está sob compressão. A verificação é obtida averiguando-se que a força $\mathbf{F}_{CB}$ e o elemento CB são paralelos.

No nó B, todas as forças são conhecidas. Como o pino correspondente está em equilíbrio, o triângulo de forças deve fechar, e uma verificação adicional da análise é obtida.

Deve-se observar que os polígonos de forças mostrados na Fig. 6.8 não são únicos. Cada um deles pode ser substituído por uma configuração alternativa. Por exemplo, o triângulo de forças correspondente ao nó A pode ser traçado como mostra a Fig. 6.9. O triângulo ilustrado na Fig. 6.8 foi obtido traçando-se as três forças $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{F}_{AC}$ e $\mathbf{F}_{AD}$ pelo padrão ponta-a-cauda pela, ordem em que suas linhas de ação foram encontradas, movendo-se no sentido horário em torno do nó A. Os outros polígonos de força, na Fig. 6.8, são traçados do mesmo modo e podem ser ajustados num diagrama único, como mostra a Fig. 6.10. Tal diagrama, conhecido como *diagrama de Maxwell*, facilita bastante a *análise gráfica* dos problemas de treliças.

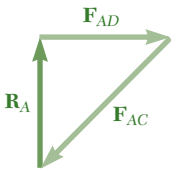


Figura 6.9

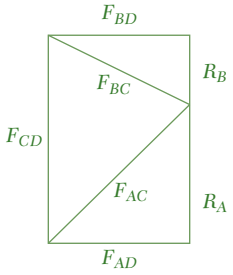


Figura 6.10

*6.5 Nós sujeitos a condições especiais de carregamento

Consideremos o nó ilustrado na Fig. 6.11*a*, o qual interliga quatro elementos situados em duas linhas retas que se interceptam. O diagrama de corpo livre da Fig. 6.11*b* mostra que o pino A está submetido a dois pares de forças diretamente opostas. O correspondente polígono de forças, portanto, deve ser um paralelogramo (Fig. 6.11*c*), e as *forças nos elementos opostos devem ser iguais*.

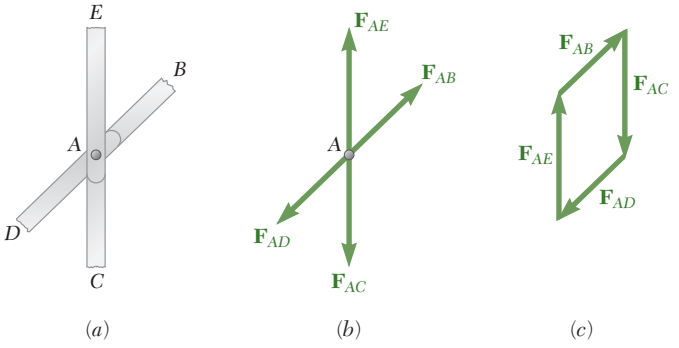


Figura 6.11

Consideremos agora o nó da Fig. 6.12*a*, que interliga três elementos e suporta uma carga **P**. Dois dos elementos se situam sobre a mesma linha reta, e a carga **P** atua ao longo do terceiro elemento. O diagrama de corpo livre do pino *A* e o correspondente polígono de forças serão como os indicados na Fig. 6.11*b* e *c*, com $\mathbf{F}_{AE}$ substituído pela carga **P**. Assim, *as forças em dois elementos opostos devem ser iguais, e a força no outro elemento deve ser igual a P*. Um caso particular de especial interesse é ilustrado na Fig. 6.12*b*. Uma vez que, nesse caso, nenhuma carga externa é aplicada ao nó, tem-se $P = 0$, e a força no elemento *AC* é zero. O elemento *AC* é chamado de *elemento sem força aplicada*.

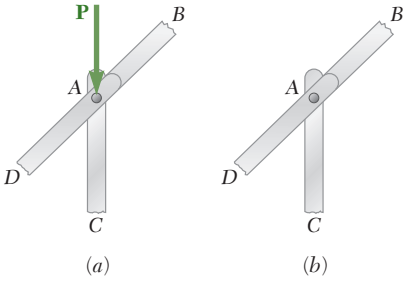


Figura 6.12

Consideremos agora um só nó ligando apenas dois elementos. Sabe-se, da Seção 2.9, que uma partícula submetida a duas forças estará em equilíbrio se as duas forças tiverem a mesma intensidade, a mesma linha de ação e sentidos opostos. No caso do nó da Fig. 6.13*a*, que liga dois elementos, *AB* e *AD*, que estão na mesma linha, as forças nos dois elementos devem ser iguais para o pino *A* estar em equilíbrio. Já no caso do nó da Fig. 6.13*b*, o pino *A* não estará em equilíbrio, a não ser que as forças em ambos os elementos forem zero. Por isso, elementos ligados, tal como indicado na Fig. 6.13*b*, devem ser *elementos sem força aplicada.*

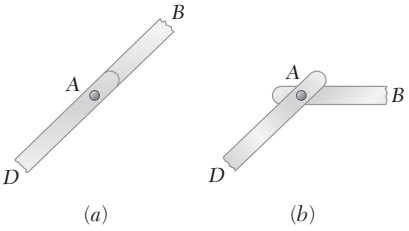


Figura 6.13

Marcar os nós que se encontram sob condições especiais de carregamento, mencionadas anteriormente, facilitará a análise de uma treliça. Consideremos, por exemplo, uma treliça tipo Howe carregada, como mostra a Fig. 6.14. Todos os elementos representados por linhas verdes serão reconhecidas como elementos sem força aplicada. O nó *C* interliga três elementos, dois dos quais se situam ao longo de uma mesma linha, e não se encontra sujeito a nenhuma carga externa; o elemento *BC* é, então, um elemento sem força aplicada. Aplicando o mesmo raciocínio ao nó *K*, verificamos que o elemento *JK* é também um elemento sem força aplicada. Mas o nó *J* está agora na mesma situação que os nós *C* e *K*, e o elemento *IJ* deve ser um elemento sem força aplicada. A análise dos nós *C*, *J* e *K* mostra também que as forças nos elementos *AC* e *CE* são iguais, que as forças nos elementos *HJ* e *JL* são iguais e que as forças nos elementos *IK* e *KL* são iguais. Voltando nossa atenção para o nó *I*, onde uma carga de 20 kN e o elemento *HI* são colineares, notamos que a força no elemento *HI* é 20 kN (tração) e as forças nos elementos *GI* e *IK* são iguais. Dessa forma, as forças nos elementos *GI*, *IK* e *KL* são iguais.

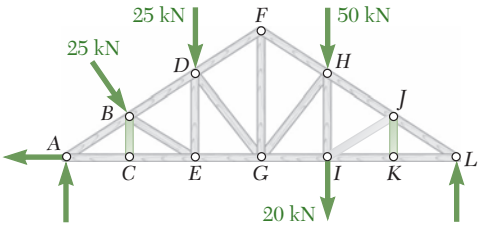


Figura 6.14

Observemos que as condições discutidas anteriormente não se aplicam aos nós *B* e *D* na Fig. 6.14, e seria errado supor que a força no elemento *DE* seja 25 kN em que as forças nos elementos *AB* e *BD* sejam iguais. As forças nesses elementos e em todos os elementos restantes devem ser encontradas por meio da análise dos nós *A*, *B*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* e *L* da maneira usual. Portanto, até que tenha ficado inteiramente

Foto 6.4 Treliças tridimensionais ou espaciais são usadas para torres de radiodifusão, torres de linhas de transmissão de energia, armação de telhados e aplicações em veículos espaciais, tais como componentes da *Estação Espacial Internacional*.

familiarizado com as condições sob as quais as regras estabelecidas nesta seção podem ser aplicadas, você deve traçar os diagramas de corpo livre de todos os pinos e escrever as equações correspondentes de equilíbrio (ou desenhar os polígonos correspondentes de força), estando ou não os nós em destaque sujeitos a uma das condições especiais de carregamento descritas anteriormente.

Uma última observação a respeito dos elementos sem força aplicada: esses elementos não são inúteis. Por exemplo, embora os elementos sem força aplicada da Fig. 6.14 não suportem cargas sob as condições de carregamento consideradas, os mesmos elementos provavelmente iriam suportar cargas se as condições de carregamento forem alteradas. Além disso, mesmo no caso considerado, esses elementos são necessários para suportar o peso da treliça e para manter sua forma desejada.

*6.6 Treliças espaciais

Quando vários elementos retilíneos são unidos por suas extremidades para formar uma configuração tridimensional, a estrutura obtida é chamada de *treliça espacial*.

Recordemos da Seção 6.3 que a treliça rígida bidimensional mais primária consiste em três elementos unidos por suas extremidades para formar os lados de um triângulo; pela adição de dois elementos de cada vez a essa configuração básica, e ligando-os em um novo nó, é possível obter uma estrutura rígida maior, que é chamada de treliça simples. Da mesma forma, a treliça rígida espacial mais primária consiste em seis elementos ligados por suas extremidades para formar as arestas de um tetraedro *ABDC* (Fig. 6.15*a*). Acrescentando três elementos de cada vez a essa configuração básica, tais como *AE*, *BE* e *CE*, fixando-os a três nós existentes e unindo-os em um novo nó*, podemos obter uma estrutura rígida maior, que é definida como uma *treliça espacial simples* (Fig. 6.15*b*). Observando-se que o tetraedro básico possui seis elementos e quatro, nós e que cada vez que três elementos são adicionados, o número de nós é acrescido de um. Concluímos, então, que em uma treliça espacial simples o número total de elementos é $m = 3n - 6$, onde n é o número total de nós.

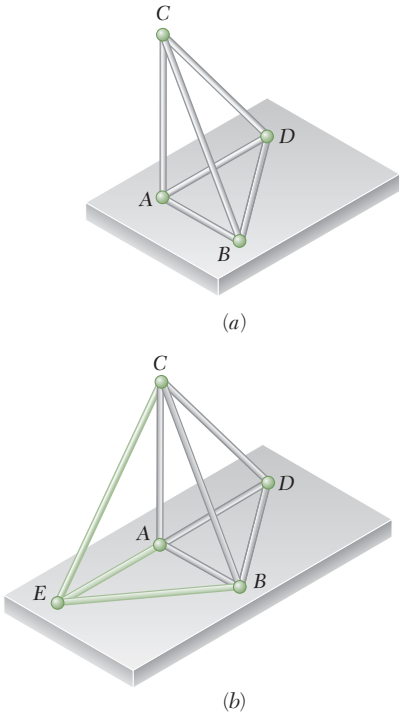
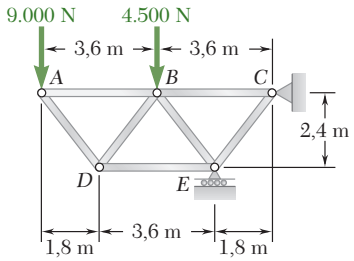


Figura 6.15

Se uma treliça espacial deve estar completamente vinculada e as reações em seus apoios devem ser estaticamente determinadas, os apoios devem consistir em uma combinação de esferas, roletes e rótulas, fornecendo seis reações desconhecidas (ver Seção 4.9). Essas reações desconhecidas podem ser facilmente determinadas resolvendo-se as seis equações que expressam que a treliça tridimensional está em equilíbrio.

Embora os elementos de uma treliça espacial sejam de fato unidas por meio de conexões soldadas ou rebitadas, supõe-se que cada nó consiste em uma conexão em rótula. Dessa forma, nenhum binário será aplicado aos elementos da treliça, e cada elemento pode ser tratado como um corpo sujeito à ação de duas forças. As condições de equilíbrio para cada nó serão expressas pelas três equações $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma F_z = 0$. No caso de uma treliça espacial simples contendo n nós, escrevemos que as condições de equilíbrio para cada nó conduzirão, portanto, a $3n$ equações. Uma vez que $m = 3n - 6$, essas equações são suficientes para determinar todas as forças desconhecidas (forças em m elementos e seis reações nos apoios). Contudo, para evitar resolução de muitas equações simultâneas, deve-se tomar cuidado para selecionar os nós escolhidos em uma ordem tal que nenhum nó selecionado envolva mais que três forças desconhecidas.

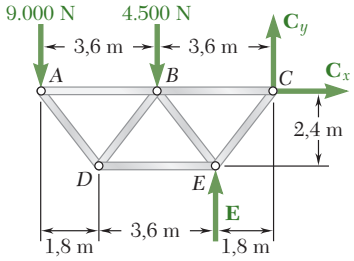
* Os quatro nós não podem estar em um plano.



PROBLEMA RESOLVIDO 6.1

Usando o método de nós, determine a força em cada elemento de treliça mostrada na figura.

SOLUÇÃO



Corpo livre: treliça inteira. Traça-se um diagrama de corpo livre da treliça inteira; as forças externas atuantes nesse corpo livre consistem nas cargas aplicadas e nas reações em *C* e *E*. Podemos escrever as seguintes equações de equilíbrio:

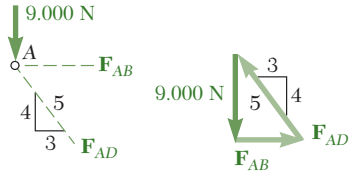
$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0$: $\quad (9.000\ \text{N})(7{,}2\ \text{m}) + (4.500\ \text{N})(3{,}6\ \text{m}) - E(1{,}8\ \text{m}) = 0$

$E = +45.000\ \text{N} \qquad \mathbf{E} = 4.500\ \text{N}\uparrow$

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\qquad \mathbf{C}_x = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad -9.000\ \text{N} - 4.500\ \text{N} + 45.000\ \text{N} + C_y = 0$

$C_y = -31.500\ \text{N} \qquad \mathbf{C}_y = 31.500\ \text{N}\downarrow$

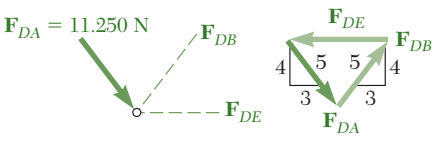


Corpo livre: nó *A*. Esse nó está sujeito a apenas duas forças desconhecidas, a saber, as forças exercidas pelos elementos *AB* e *AD*. Um triângulo de forças é usado para determinar $\mathbf{F}_{AB}$ e $\mathbf{F}_{AD}$. Observamos que o elemento *AB* atua puxando o nó e, portanto, está sob tração, e que o elemento *AD* atua empurrando o nó e, portanto, está sob compressão. As intensidades das duas forças são obtidas a partir da proporção:

$$\frac{9.000\ \text{N}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AD}}{5}$$

$F_{AB} = 6.750\ \text{N}\ T$ ◀

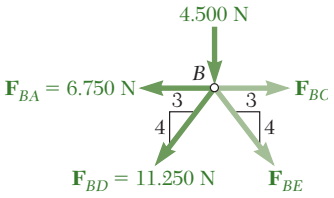
$F_{AD} = 11.250\ \text{N}\ C$ ◀



Corpo livre: nó *D*. Como força a exercida pelo elemento *AD* foi determinada, agora somente duas forças desconhecidas estão envolvidas nesse nó. Novamente, utiliza-se um triângulo de forças para se determinar as forças deconhecidas nos elementos *DB* e *DE*.

$F_{DB} = F_{DA}$ $\qquad F_{DB} = 11.250\ \text{N}\ T$ ◀

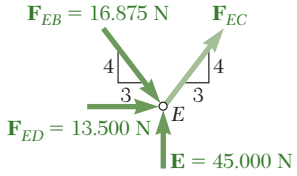
$F_{DE} = 2(\frac{3}{5})F_{DA}$ $\qquad F_{DE} = 13.500\ \text{N}\ C$ ◀



Corpo livre: Nó *B*. Uma vez que mais de três forças atuam nesse nó, determinamos as duas forças desconhecidas $\mathbf{F}_{BC}$ e $\mathbf{F}_{BE}$ resolvendo as equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$. Supomos arbitrariamente que ambas as forças desconhecidas atuam para fora desse nó, ou seja, os elementos estão sob tração. O valor positivo obtido para F_{BC} indica que nossa suposição estava correta: o elemento *BC* está sob tração. O valor negativo de F_{BE} indica que nossa suposição estava errada: o elemento *BE* está sob compressão.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -4.500 - \tfrac{4}{5}(11.250) - \tfrac{4}{5}F_{BE} = 0$$
$$F_{BE} = -16.875 \text{ N} \qquad F_{BE} = 16.875 \text{ N } C \blacktriangleleft$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad F_{BC} - 6.750 - \tfrac{3}{5}(11.250) - \tfrac{3}{5}(16.875) = 0$$
$$F_{BC} = +23.625 \text{ N} \qquad F_{BC} = 23.625 \text{ N } T \blacktriangleleft$$

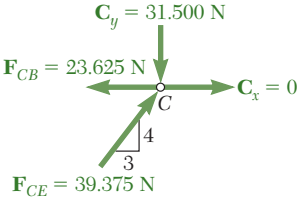


Corpo livre: Nó *E*. Supõe-se que a força desconhecida $\mathbf{F}_{EC}$ exerça para fora do nó. Somando-se os componentes *x*, temos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad \tfrac{3}{5}F_{EC} + 13.500 + \tfrac{3}{5}(16.875) = 0$$
$$F_{EC} = -39.375 \text{ N} \qquad F_{EC} = 39.375 \text{ N } C \blacktriangleleft$$

Somando-se os componentes *y*, obtemos uma verificação para nossos cálculos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 45.000 - \tfrac{4}{5}(16.875) - \tfrac{4}{5}(39.375)$$
$$= 45.000 - 13.500 - 31.500 = 0 \qquad \text{(verificado)}$$



Corpo livre: Nó *C*. Usando valores calculados de $\mathbf{F}_{CB}$ e $\mathbf{F}_{CE}$, podemos determinar as reações $\mathbf{C}_x$ e $\mathbf{C}_y$ considerando o equilíbrio desse nó. Como as reações já foram determinadas a partir do equilíbrio da treliça inteira, obteremos duas verificações para nossos cálculos. Podemos também simplesmente usar os valores calculados de todas as forças atuantes no nó (forças em elementos e reações) e verificar que o nó está em equilíbrio:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = -23.625 + \tfrac{3}{5}(39.375) = -23.625 + 23.625 = 0 \qquad \text{(verificado)}$$
$$+\uparrow \Sigma Fy = -31.500 + \tfrac{4}{5}(39.875) = -31.500 + 31.500 = 0 \qquad \text{(verificado)}$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, aprendemos a usar o *método dos nós* para determinar as forças nos elementos de uma *treliça simples,* ou seja, uma treliça que pode ser construída a partir de uma treliça triangular básica e pelo acréscimo de dois elementos novos de cada vez e pela ligação desses elementos a um novo nó.

A solução consistirá nos seguintes passos:

1. Traçar um diagrama de corpo rígido da treliça inteira e usar esse diagrama para determinar as reações nos apoios.

2. Localizar um nó ligando apenas dois elementos e trace o diagrama de corpo livre desse pino. Usemos esse diagrama de corpo livre para determinar a força desconhecida em cada um dos dois elementos. Se apenas três forças estão envolvidas (as duas forças desconhecidas e uma conhecida), provavelmente acharemos mais conveniente traçar e resolver o triângulo de forças correspondente. Se mais de três forças estiverem envolvidas, devemos escrever e resolver as equações de equilíbrio para o pino, $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, supondo que os elementos estejam sob tração. Uma resposta positiva significa que o elemento está sob tração; uma resposta negativa significa que o elemento está sob compressão. Uma vez que as forças forem encontradas, apliquemos seus valores em um esboço da treliça, com *T* para tração e *C* para compressão.

3. Em seguida, localizar um nó onde as forças em apenas dois dos elementos ligados ainda sejam desconhecidas. Tracemos o diagrama de corpo livre do pino e usemo-o tal como foi indicado anteriormente para determinar as duas forças desconhecidas.

4. Repitir esse procedimento até que tenham sido encontradas as forças em todos os elementos da treliça. Como foi usada anteriormente as três equações de equilíbrio associadas ao diagrama de corpo livre da treliça inteira para determinar as reações nos apoios, acabaremos com três equações adicionais. Essas equações podem ser usadas para verificar seus cálculos.

5. Observar que a escolha do primeiro nó não é única. Depois que tiver determinado as reações nos apoios da treliça, podemos escolher qualquer dos dois nós como ponto de partida da nossa análise. No Problema Resolvido 6.1, começamos pelo nó *A* e prosseguimos pelos nós *D*, *B*, *E* e *C*, mas poderíamos também ter começado pelo nó *C* e prosseguido pelos nós *E*, *B*, *D* e *A*. Por outro lado, tendo selecionado um primeiro nó, podemos, em alguns casos, chegar a um ponto da nossa análise além do qual não é possível prosseguir. Devemos, então, recomeçar de em outro nó para completar sua solução.

Devemos ter em mente que a análise da *treliça simples* sempre pode ser realizada pelo método dos nós. Lembremos também que é útil esboçar a solução *antes* de começar quaisquer cálculos.

PROBLEMAS

6.1 a 6.8 Usando o método dos nós, determine a força em cada elemento da treliça mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

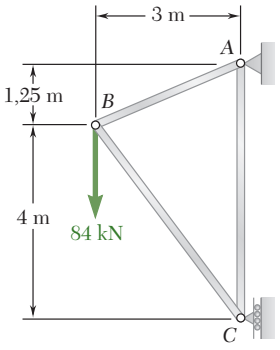


Figura P6.1

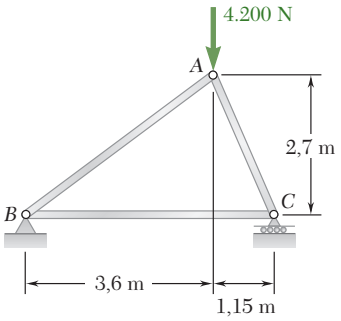


Figura P6.2

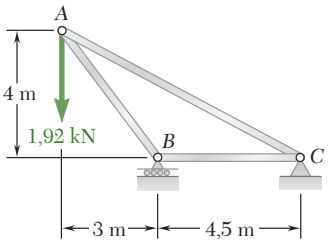


Figura P6.3

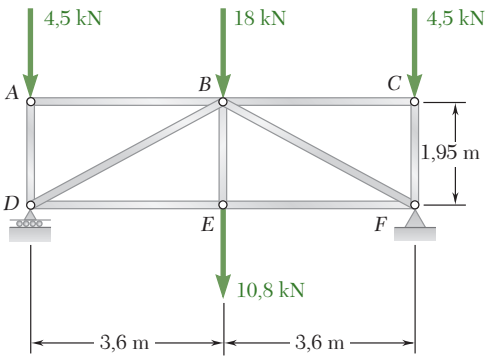


Figura *P6.4*

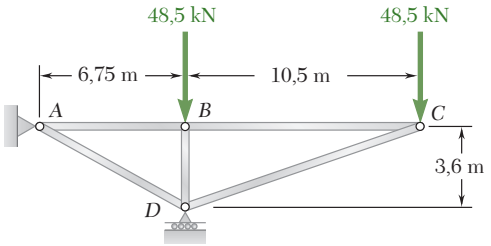


Figura P6.5

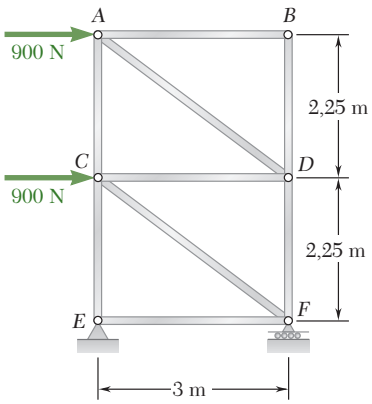


Figura P6.6

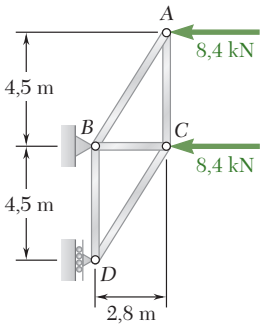


Figura P6.7

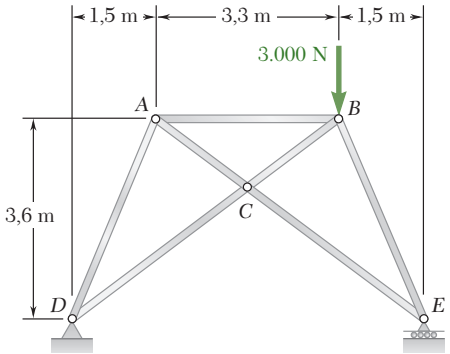


Figura *P6.8*

6.9 Determine a força em cada elemento da treliça de telhado Pratt mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

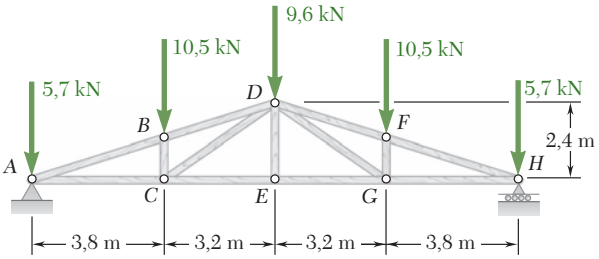


Figura P6.9

6.10 Determine a força em cada elemento da treliça de telhado mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

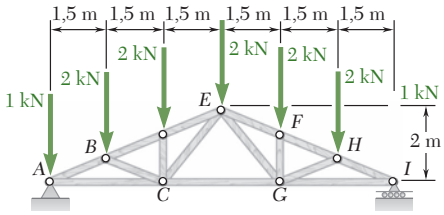


Figura P6.10

6.11 Determine a força em cada elemento da treliça de telhado Howe mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

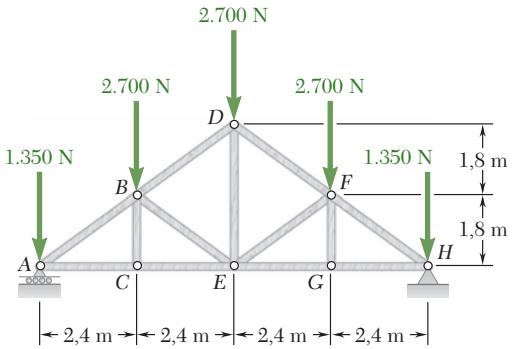


Figura P6.11

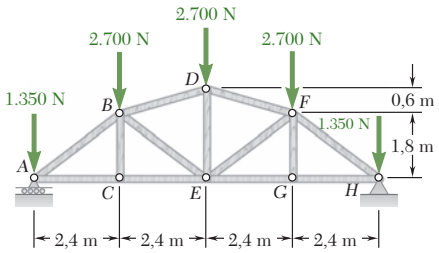


Figura P6.12

6.12 Determine a força em cada elemento da treliça de telhado Gambrel mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

6.13 Determine a força em cada elemento da treliça mostrada na figura.

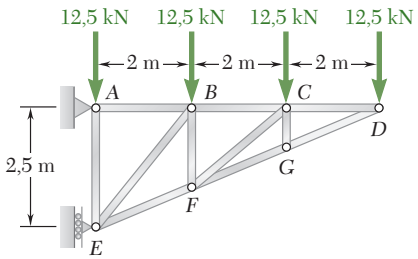


Figura P6.13

6.14 Determine a força em cada elemento da treliça de telhado mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

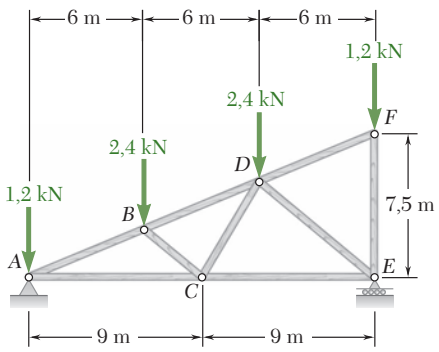


Figura P6.14

6.15 Determine a força em cada elemento da treliça de ponte Warren mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

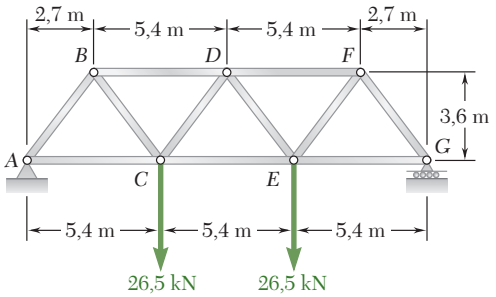


Figura P6.15

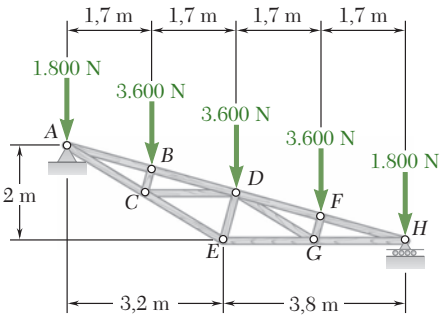


Figura *P6.17* e *P6.18*

6.16 Resolva o Problema 6.15 considerando que a carga aplicada em *E* foi removida.

6.17 Determine a força no elemento *DE* e em cada um dos elementos localizados à esquerda de *DE* para a treliça de telhado tipo Howe invertida mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

6.18 Determine a força em cada um dos elementos localizados à direita de *DE* para a treliça de telhado tipo Howe invertida mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

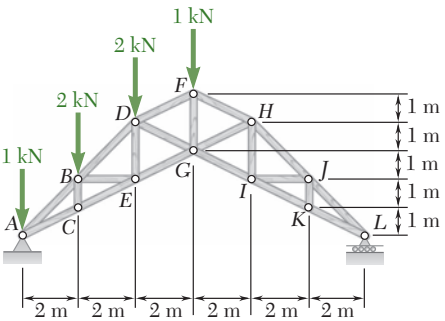


Figura P6.19 e P6.20

6.19 Determine a força em cada um dos elementos localizados à esquerda do elemento *FG* para a treliça de telhado em tesoura mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

6.20 Determine a força em cada um dos elementos localizados à direita do elemento *FG* para a treliça de telhado em tesoura mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

6.21 Determine a força em cada um dos elementos localizados à esquerda da linha *FGH* para a treliça de telhado do estúdio mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

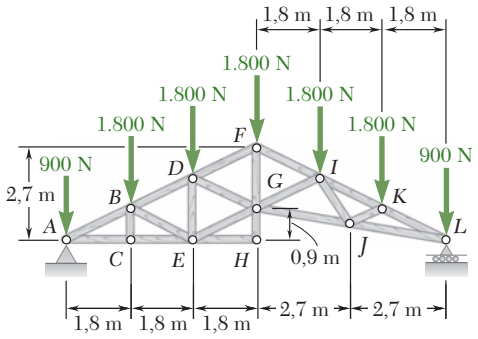


Figura P6.21 e P6.22

6.22 Determine a força no elemento *FG* e em cada um dos elementos localizados à sua direita para a treliça de telhado do estúdio mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

6.23 Determine a força em cada um dos elementos conectados às articulações de *A* até *F* da treliça de telhado abobadado mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

6.24 A porção de treliça mostrada na figura representa a parte superior de uma torre de linha de transmissão de energia elétrica. Para o carregamento dado, determine a força em cada um dos elementos localizados acima de *HJ*. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

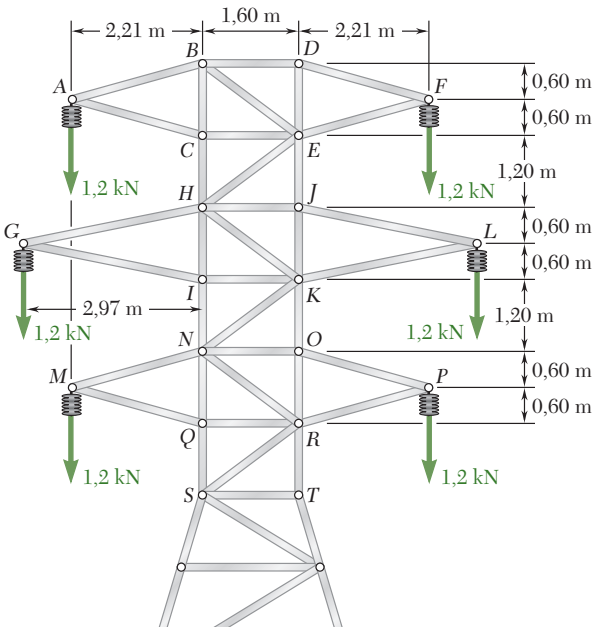


Figura P6.24

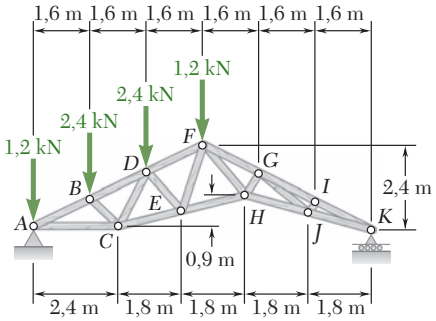


Figura P6.23

6.25 Para a torre e o carregamento do Problema 6.24, sabendo que $F_{CH} = F_{EJ} = 1{,}2$ kN em *C* e $F_{EH} = 0$, determine a força no elemento *HJ* e em cada um dos elementos localizados entre *HJ* e *NO*. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

6.26 Resolva o Problema 6.24 considerando que os cabos pendurados no lado direito da torre tenham caído no solo.

6.27 Determine a força em cada elemento da treliça mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

6.28 Determine a força em cada elemento da treliça mostrada. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

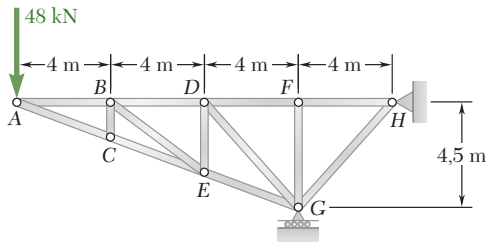


Figura P6.28

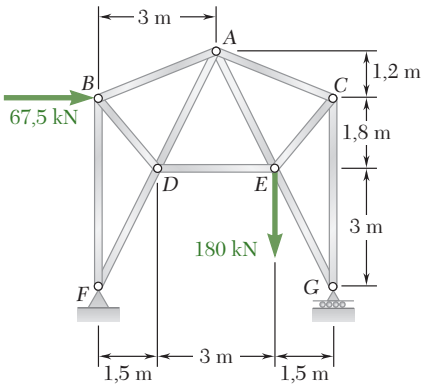


Figura P6.27

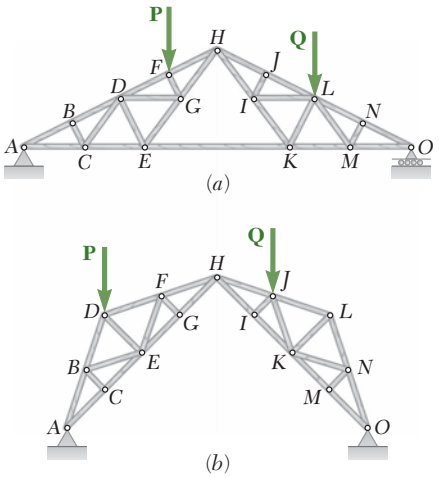


Figura P6.31

6.29 Determine se as treliças dos Problemas 6.31*a*, 6.32*a* e 6.33*a* são treliças simples.

6.30 Determine se as treliças dos Problemas 6.31*b*, 6.32*b* e 6.33*b* são treliças simples.

6.31 Para o carregamento indicado, determine o elemento sem força aplicada em cada uma das duas treliças mostradas.

6.32 Para o carregamento indicado, determine o elemento sem força aplicada em cada uma das duas treliças mostradas na figura.

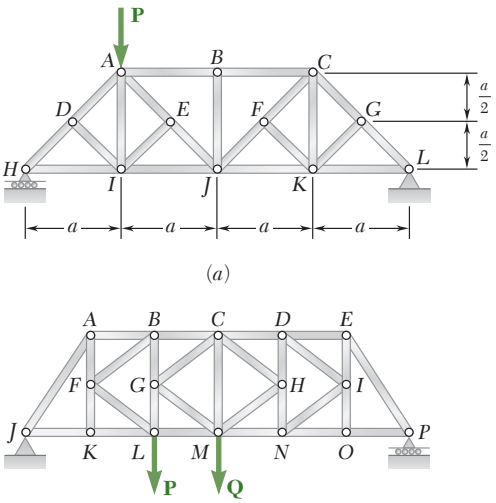


Figura P6.32

6.33 Para o carregamento indicado, determine o elemento sem força aplicada em cada uma das duas treliças mostradas na figura.

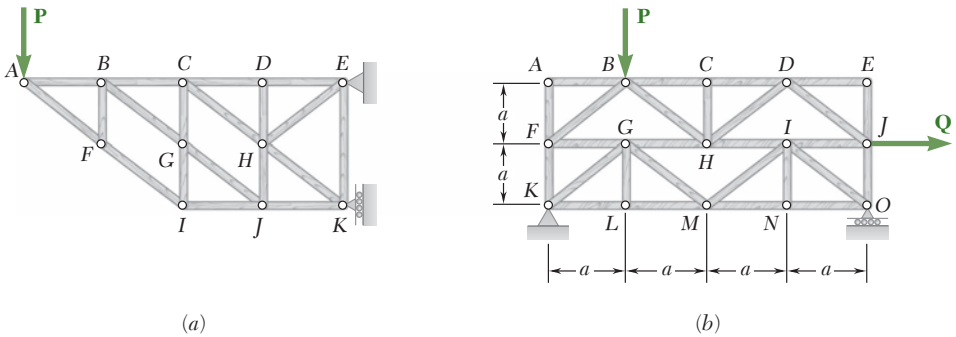


Figura P6.33

6.34 Determine o elemento sem força aplicada na treliça do (*a*) Problema 6.23, (*b*) Problema 6.28.

***6.35** A treliça mostrada na figura consiste em seis elementos e é sustentada por uma pequena haste de conexão em *A*, duas pequenas hastes de

conexão em *B* e por uma rótula em *D*. Determine a força em cada um dos elementos para o carregamento dado.

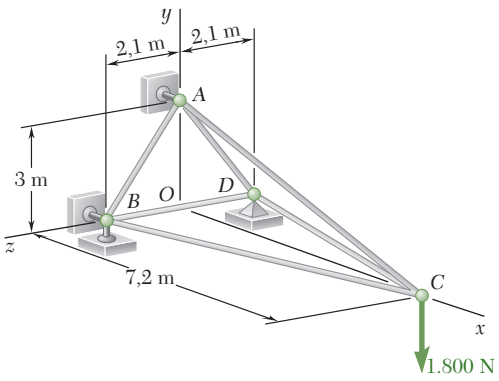


Figura P6.35

***6.36** A treliça mostrada na figura consiste em seis elementos e é sustentada por uma rótula em *B*, uma pequena haste de conexão em *C* e duas pequenas hastes de conexão em *D*. Determine a força em cada um dos elementos para $\mathbf{P} = (-2184\text{ N})\mathbf{j}$ e $\mathbf{Q} = 0$.

***6.37** A treliça mostrada na figura consiste em seis elementos e é sustentada por uma rótula em *B*, uma pequena haste de conexão em *C* e duas pequenas hastes de conexão em *D*. Determine a força em cada um dos elementos para $\mathbf{P} = 0$ e $\mathbf{Q} = (2968\text{ N})\mathbf{i}$.

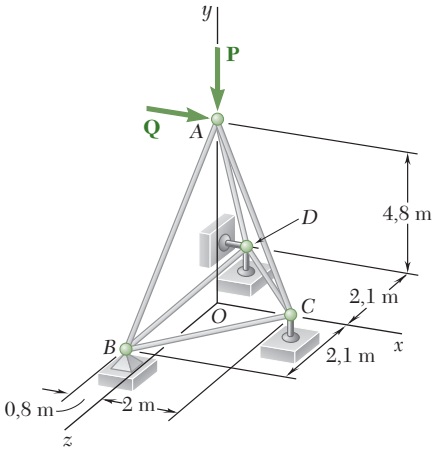


Figura P6.36 e P.37

***6.38** A treliça mostrada na figura consiste em nove elementos e é sustentada por uma rótula em *A*, por duas pequenas hastes de conexão em *B* e uma pequena haste de conexão em *C*. Determine a força em cada membro para o carregamento dado.

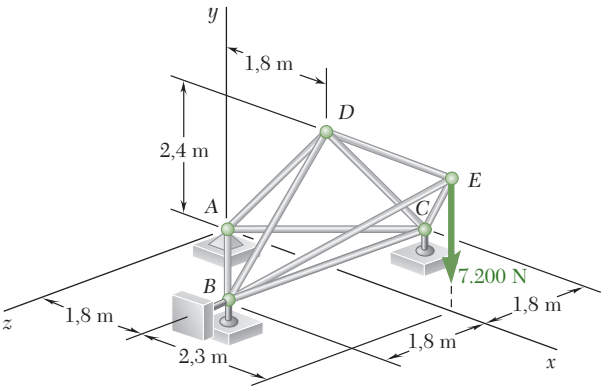


Figura P6.38

***6.39** A treliça mostrada na figura consiste em nove elementos e é sustentada por uma rótula em *B*, uma pequena haste de conexão em *C* e por duas pequenas hastes em *D*. (*a*) Verifique se essa treliça é uma treliça simples, se é completamente vinculada e se as reações em seus apoios são estaticamente determinadas. (*b*) Determine a força em cada elemento para $\mathbf{P} = (-1200\text{ N})\mathbf{j}$ e $\mathbf{Q} = 0$.

***6.40** Resolva o Problema 6.39 para $\mathbf{P} = 0$ e $\mathbf{Q} = (-900\text{ N})\mathbf{k}$.

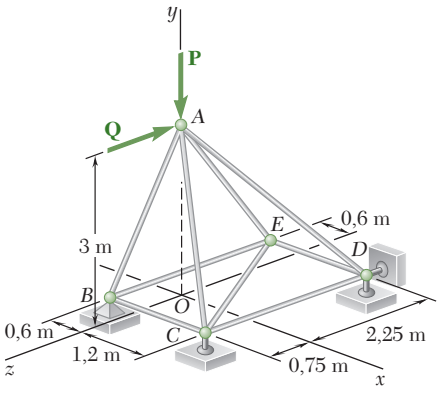


Figura P6.39

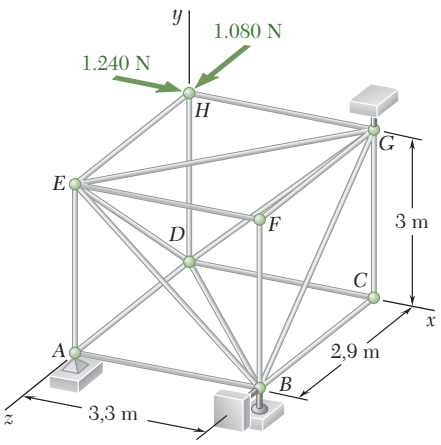


Figura *P6.41* e *P6.42*

***6.41** A treliça mostrada na figura consiste em 18 elementos e é sustentada por uma rótula em *A*, duas pequenas hastes de conexão em *B* e uma pequena haste de conexão em *G*. (*a*) Verifique se essa treliça é uma treliça simples, se é completamente vinculada e se as reações em seus apoios são estaticamente determinadas. (*b*) Para o carregamento dado, determine a força em cada um dos seis elementos unidos em *E*.

***6.42** A treliça mostrada na figura consiste em 18 elementos e é sustentada por uma rótula em *A*, duas pequenas hastes de conexão em *B* e uma pequena haste de conexão em *G*. (*a*) Verifique se essa treliça é uma treliça simples, se é completamente vinculada e se as reações em seus apoios são estaticamente determinadas. (*b*) Para o carregamento dado, determine a força em cada um dos seis elementos unidos em *G*.

6.7 Análise de treliças pelo método das seções

O método dos nós é mais eficaz quando as forças em todos os elementos de uma treliça devem ser determinadas. Se, todavia, o que se deseja é a força em apenas um elemento ou as forças em uns poucos elementos, outro método, o método das seções, é mais eficiente.

Suponha, por exemplo, que queiramos determinar a força no elemento *BD* da treliça mostrada na Fig. 6.16*a*. Para fazer isso, devemos determinar a força com a qual o elemento *BD* atua sobre os nós *B* ou *D*. Se fôssemos usar o método dos nós, iríamos escolher o nó *B* ou o nó *D* como um corpo livre. No entanto, podemos também escolher como um corpo livre uma parte maior da treliça, composta de vários nós e elementos, contanto que a força desejada seja uma das forças externas exercidas nessa parte. Se, além disso, a parte da treliça for escolhida de modo que haja um total de apenas três forças desconhecidas atuando sobre ela, pode-se obter a força desejada resolvendo-se as equações de equilíbrio para essa parte da treliça. Na prática, a parte da treliça a ser utilizada é obtida *passando-se uma seção* através de três elementos da treliça, um dos quais é o elemento desejado, ou seja, traçando-se uma linha que divide a treliça em duas partes completamente separadas, mas que não corta mais do que três elementos. Cada uma das duas partes da treliça obtidas depois que os elementos cortados tenham sido removidos pode ser usada como corpo livre.*

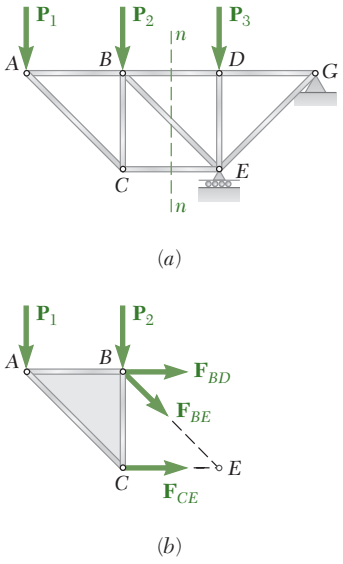


Figura 6.16

Na Fig. 6.16*a*, a seção *nn* passa através dos elementos *BD*, *BE* e *CE*, e a parte *ABC* da treliça foi escolhida como um corpo livre (Fig. 6.16*b*). As forças atuantes, no corpo livre são as cargas $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ nos pontos *A* e *B*, e as três forças desconhecidas $\mathbf{F}_{BD}$, $\mathbf{F}_{BE}$ e $\mathbf{F}_{CE}$. Como não se sabe se os elementos removidos estão sob tração ou sob compressão, as três forças são traçadas arbitrariamente, direcionadas para fora do corpo livre, como se os elementos estivessem sob tração.

* Na análise de certas treliças, são passadas seções que interceptam mais de três elementos. As forças em um, ou talvez dois, dos elementos cortados poderão ser obtidos se puderem ser encontradas as equações de equilíbrio, cada uma das quais envolvendo apenas uma incógnita (ver Problemas 6.61 a 6.64).

O fato do corpo rígido *ABC* estar em equilíbrio pode ser expresso escrevendo-se três equações que podem ser resolvidas para as três forças desconhecidas. Se somente a força $\mathbf{F}_{BD}$ for desejada, precisamos escrever apenas uma equação, contanto que essa equação não contenha as outras forças desconhecidas. Portanto, a equação $\Sigma M_E = 0$ fornece o valor da intensidade F_{BD} da força $\mathbf{F}_{BD}$ (Fig. 6.16*b*). Um sinal positivo na resposta indica que nossa suposição original quanto ao sinal de $\mathbf{F}_{BD}$ estava correta e que o elemento *BD* está sob tração; já um sinal negativo indica que nossa suposição estava incorreta, e que *BD* está sob compressão.

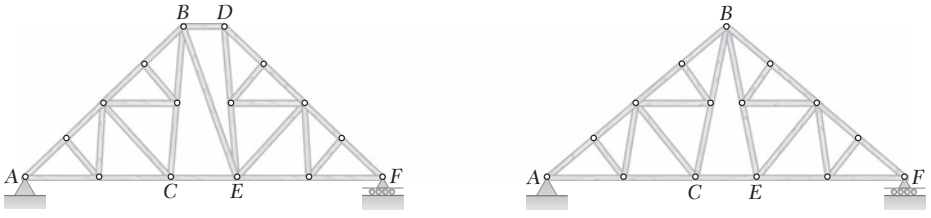
Por outro lado, se apenas a força $\mathbf{F}_{CE}$ for desejada, deve-se escrever uma equação que não envolva $\mathbf{F}_{BD}$ ou $\mathbf{F}_{BE}$; a equação apropriada é $\Sigma M_B = 0$. Novamente, um sinal positivo para a intensidade F_{CE} da força desejada indica uma suposição correta, ou seja, uma tração; e um sinal negativo indica uma suposição incorreta, ou seja, uma compressão.

Se apenas a força $\mathbf{F}_{BE}$ for desejada, a equação apropriada é $\Sigma F_y = 0$. Novamente, o sinal da resposta determina se o elemento está sob tração ou sob compressão.

Quando a força em somente um elemento for determinada, nenhuma verificação independente para os cálculos estará disponível. No entanto, quando todas as forças desconhecidas exercidas sobre o corpo livre forem determinadas, podem-se verificar os cálculos escrevendo-se uma equação adicional. Por exemplo, se $\mathbf{F}_{BD}$, $\mathbf{F}_{BE}$ e $\mathbf{F}_{CE}$ são determinados como se indicou anteriormente, podem-se verificar os cálculos conferindo que $\Sigma F_x = 0$.

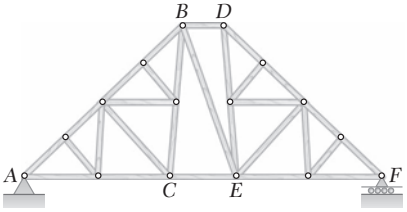
*6.8 Treliças feitas de várias treliças simples

Considere duas treliças simples *ABC* e *DEF*. Se estão ligadas por três barras *BD*, *BE* e *CE*, tal como mostra a Fig. 6.17*a*, elas irão formar juntas uma treliça rígida *ABDF*. As treliças *ABC* c *DEF* podem também ser combinadas em uma única treliça rígida unindo-se os nós *B* e *D* em um único nó *B*, e os nós *C* e *E* por uma barra *CE* (Fig. 6.17*b*). A treliça assim obtida é conhecida como *treliça Fink*. Deve-se observar que as treliças da Fig. 6.17*a* e *b* *não* são treliças simples; elas não podem ser construídas a partir de uma treliça triangular pela adição sucessiva de pares de elementos tal como descrevemos na Seção 6.3. Porém, são treliças rígidas, como podemos verificar comparando os sistemas de conexões usados para manter unidas as treliças simples *ABC* e *DEF* (três barras na Fig. 6.17*a*, um pino e uma barra na Fig. 6.17*b*) com os sistemas de apoios discutidos nas Seções 4.4 e 4.5. Treliças formadas de várias treliças simples rigidamente interligadas são conhecidas como *treliças compostas*.



(*a*) (*b*)

Figura 6.17



(*a*)

Figura 6.17 (repetida)

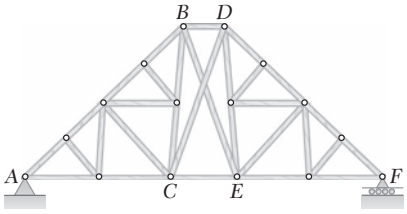
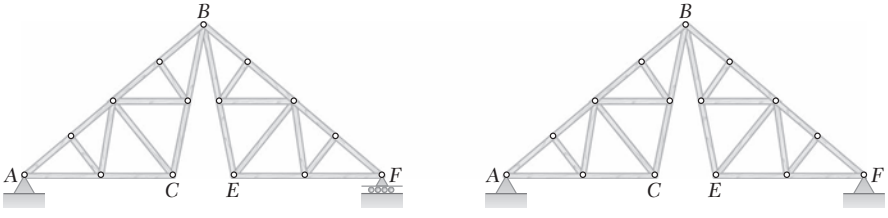


Figura 6.18

Em uma treliça composta, o número de elementos m e o número de nós n são ainda relacionados pela fórmula $m = 2n - 3$. Pode-se verificar isso observando-se que, se uma treliça composta é sustentada por um pino sem atrito e um rolete (envolvendo três reações desconhecidas), o número total de incógnitas é $m + 3$, e esse número deve ser igual ao número $2n$ de equações obtidas expressando-se que n pinos estão em equilíbrio; segue-se que $m = 2n - 3$. Treliças compostas sustentadas por um pino e um rolete, ou por um sistema equivalente de apoios, são *estaticamente determinadas, rígidas* e *completamente vinculadas.* Isso significa que todas as reações desconhecidas e as forças em todos os elementos podem ser determinadas pelos métodos da estática e que a treliça não entrará em colapso nem se moverá. Nem todas as forças nos elementos, no entanto, podem ser determinadas pelo método dos nós, exceto pela solução de um grande número de equações simultâneas. No caso da treliça composta da Fig. 6.17*a*, por exemplo, é mais eficiente fazer uma seção passando pelos elementos *BD*, *BE* e *CE* para determinar as forças nesses elementos.

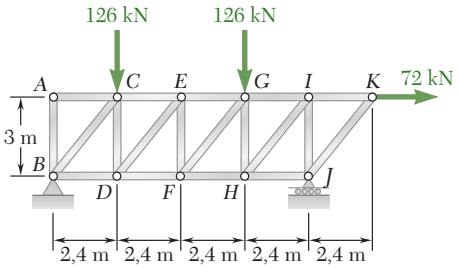
Suponha, agora, que as treliças simples *ABC* e *DEF* estejam ligadas por *quatro* barras *BD*, *BE*, *CD* e *CE* (Fig. 6.18). O número de elementos m é agora maior que $2n - 3$: a treliça obtida é *indeformável* e um dos seus quatro elementos *BD*, *BE*, *CD* ou *CE* é chamado de *redundante.* Se a treliça está sustentada por um pino em *A* e um rolete em *F*, o número total de incógnitas é $m + 3$. Como $m > 2n - 3$, o número $m + 3$ de incógnitas é agora maior que o número $2n$ de equações independentes disponíveis: a treliça é *estaticamente indeterminada.*

Finalmente, vamos supor que as duas treliças simples *ABC* e *DEF* sejam unidas por um pino, tal como mostra a Fig. 6.19*a*. O número de elementos m é menor que $2n - 3$. Se a treliça está apoiada por um pino em *A* e um rolete em *F*, o número total de incógnitas é $m + 3$. Como $m < 2n - 3$, o número $m + 3$ de incógnitas é agora menor que o número $2n$ de equações de equilíbrio que devem ser satisfeitas: a treliça *não é rígida* e é *deformável*, e entrará em colapso sob seu próprio peso. No entanto, se dois pinos forem usados para apoiá-la, a treliça torna-se *rígida* e não entrará em colapso (Fig. 6.19*b*). Observamos que o número de incógnitas é agora $m + 4$ e é igual ao número $2n$ de equações. De modo mais geral, se as reações nos apoios envolvem r incógnitas, a condição para uma treliça composta ser estaticamente determinada, rígida e completamente vinculada é $m + r = 2n$. Contudo, embora necessária, essa condição não é suficiente para o equilíbrio de uma estrutura que deixa de ser rígida quando separada de seus apoios (veja Seção 6.11).



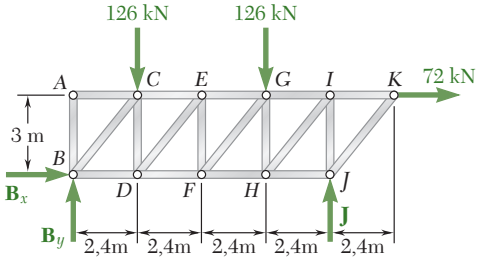
(*a*) (*b*)

Figura 6.19



PROBLEMA RESOLVIDO 6.2

Determine a força nos elementos *EF* e *GI* da treliça mostrada na figura.



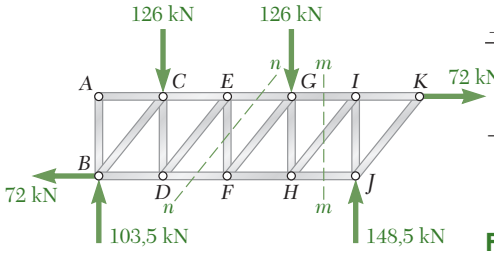
SOLUÇÃO

Corpo livre: treliça inteira. Traça-se o diagrama de corpo livre da treliça interna; as forças externas atuantes nesse corpo livre consistem nas cargas aplicadas e nas relações em *B* e *J*. Temos as seguintes equações de equilíbrio:

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$:

$$-(126\text{ kN})(2{,}4\text{ m}) - (126\text{ kN})(7{,}2\text{ m}) - (72\text{ kN})(3\text{ m}) + J(9{,}6\text{ m}) = 0$$

$$J = +148{,}5\text{ kN} \qquad \mathbf{J} = 148{,}5\text{ kN}\uparrow$$



$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0$: $\quad B_x + 72\text{ kN} = 0$

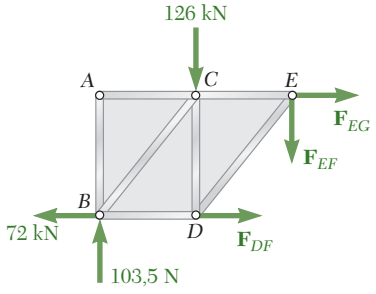
$$B_x = -72\text{ kN} \qquad \mathbf{B}_x = 72\text{ kN}\leftarrow$$

$+\uparrow \Sigma M_J = 0$:

$$(126\text{ kN})(7{,}2\text{ m}) + (126\text{ kN})(2{,}4\text{ m}) - (72\text{ kN})(3\text{ m}) - B_y(9{,}6\text{ m}) = 0$$

$$B_y = +103{,}5\text{ kN} \qquad \mathbf{B}_y = 103{,}5\text{ kN}\uparrow$$

Força no elemento *EF*. A seção *nn* é definida passando pela treliça de modo que corta o elemento *EF* e apenas outros dois elementos. Depois que os elementos cortados foram removidos, a parte da treliça à esquerda é escolhida como corpo livre. Três incógnitas estão envolvidas. Para eliminar as duas forças horizontais, temos



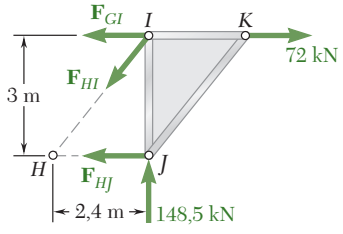
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad +103{,}5\text{ kN} - 126\text{ kN} - F_{EF} = 0$

$$F_{EF} = 2{,}25\text{ kN}$$

Escolheu-se o sentido de $\mathbf{F}_{EF}$ na suposição de que o elemento *EF* estava sob tração; o sinal negativo obtido indica que o elemento está sob compressão.

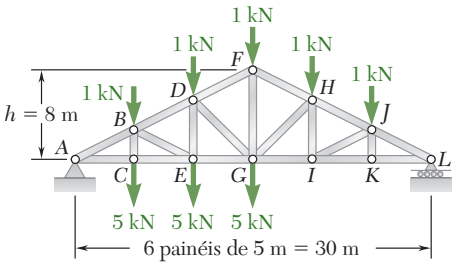
$$F_{EF} = 22{,}5\text{ kN } C \quad \blacktriangleleft$$

Força no elemento *GI*. Define-se a seção *mm* passando pela treliça de modo que corta o elemento *GI* e somente outros dois elementos. Depois que os elementos cortados foram removidos, a parte da treliça à direita é escolhida como um corpo livre. Novamente, três incógnitas estão envolvidas; para eliminar as duas forças que passam pelo ponto *H*, temos



$+\circlearrowleft \Sigma M_H = 0$: $\quad (148{,}5\text{ kN})(2{,}4\text{ m}) - (72\text{ kN})(3\text{ m}) + F_{GI}(3\text{ m}) = 0$

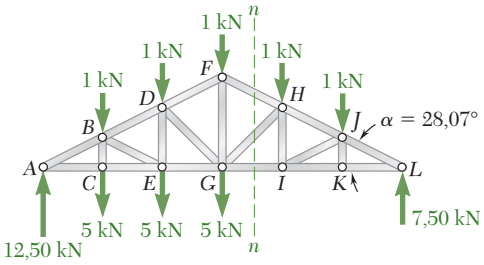
$$F_{GI} = -46{,}8\text{ kN} \qquad F_{GI} = 46{,}8\text{ kN } C \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 6.3

Determine a força nos elementos *FH*, *GH* e *GI* da treliça de telhado mostrado na figura.

SOLUÇÃO

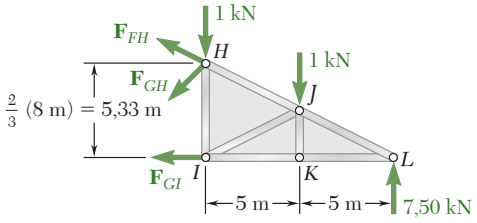


Corpo livre: treliça inteira. A partir do diagrama de corpo livre de treliça inteira, encontramos as reações em *A* e *L*:

$$\mathbf{A} = 12{,}50\ \text{kN}\uparrow \qquad \mathbf{L} = 7{,}50\ \text{kN}\uparrow$$

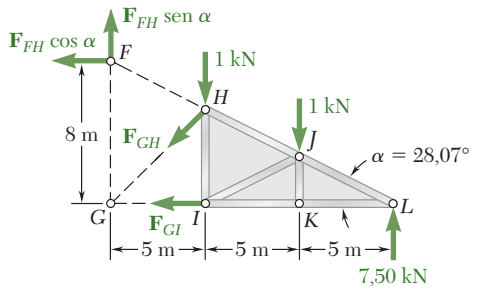
Observamos que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{FG}{GL} = \frac{8\ \text{m}}{15\ \text{m}} = 0{,}5333 \qquad \alpha = 28{,}07°$$



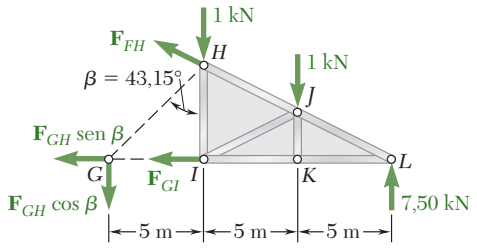
Força no elemento *GI*. A seção *nn* é definida passando-se pela treliça tal como mostra a figura. Usando-se a parte *HLI* da treliça como um corpo livre, obtém-se o valor de F_{GI} da seguinte forma:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_H = 0: \qquad (7{,}50\ \text{kN})(10\ \text{m}) - (1\ \text{kN})(5\ \text{m}) - F_{GI}(5{,}33\ \text{m}) = 0$$
$$F_{GI} = 13{,}13\ \text{kN} \qquad F_{GI} = 13{,}13\ \text{kN}\ T \blacktriangleleft$$



Força no elemento *FH*. O valor de F_{FH} é obtido a partir da equação $\Sigma M_G = 0$. Movemos $\mathbf{F}_{FH}$ ao longo de sua linha de ação até que esta atue no ponto *F*, no qual ela é decomposta em seus componentes *x* e *y*. O momento de $\mathbf{F}_{FH}$ em relação ao ponto *G* é igual a $(F_{FH}\cos\alpha)(8\ \text{m})$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = 0:$$
$$(7{,}50\ \text{kN})(15\ \text{m}) - (1\ \text{kN})(10\ \text{m}) - (1\ \text{kN})(5\ \text{m}) + (F_{FH}\cos\alpha)(8\ \text{m}) = 0$$
$$F_{FH} = -13{,}81\ \text{kN} \qquad F_{FH} = 13{,}81\ \text{kN}\ C \blacktriangleleft$$



Força no elemento *GH*. Primeiro observamos que:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{GI}{HI} = \frac{5\ \text{m}}{\frac{2}{3}(8\ \text{m})} = 0{,}9375 \qquad \beta = 43{,}15°$$

O valor de F_{GH} é, então, determinado decompondo-se a força $\mathbf{F}_{GH}$ em componentes *x* e *y* no ponto *G* e resolvendo-se a aquação $\Sigma M_L = 0$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_L = 0: \qquad (1\ \text{kN})(10\ \text{m}) + (1\ \text{kN})(5\ \text{m}) + (F_{GH}\cos\beta)(15\ \text{m}) = 0$$
$$F_{GH} = -1{,}371\ \text{kN} \qquad F_{GH} = 1{,}371\ \text{kN}\ C \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O *método dos nós* que estudamos anteriormente é, em geral, o melhor método a ser usado quando é preciso encontrar as forças *em todos os elementos* de uma treliça simples. No entanto, o método das seções, que foi estudado nesta seção, é mais eficaz quando são desejadas a força *em apenas um elemento* ou as forças *em uns poucos elementos* de uma treliça simples. O método das seções também deve ser usado quando a treliça *não é uma treliça simples.*

A. Para determinar a força em um dado elemento de treliça pelo método das seções, devemos seguir estes passos:

1. Traçar um diagrama de corpo livre da treliça inteira e usar esse diagrama para determinar as reações nos apoios.

2. Defina uma seção que passe por três elementos da treliça, um dos quais é o elemento desejado. Depois que tiver removido esses elementos, obteremos duas partes separadas da treliça.

3. Selecionar uma das duas partes da treliça que foi obtida e traçar seu diagrama de corpo livre. Esse diagrama deve incluir as forças externas aplicadas à parte selecionada assim como as forças exercidas sobre ela pelos elementos cortados antes de les serem removidos.

4. Agora pode-se escrever três equações de equilíbrio que podem ser resolvidas para as forças nos três elementos cortados.

5. Outra abordagem possível é escrever uma única equação que pode ser resolvida para a força no elemento desejado. Para fazer assim, primeiro observe se as forças exercidas pelos outros dois elementos sobre o corpo livre são paralelas ou se suas linhas de ação se cruzam.

a. Se as forças são paralelas, podemos eliminá-las escrevendo uma equação de equilíbrio que envolva *componentes em uma direção perpendicular* à dessas duas forças.

b. Se suas linhas de ação se cruzam no ponto *H*, podemos eliminá-las escrevendo uma equação de equilíbrio que envolva *momentos em relação ao ponto H.*

6. Ter em mente que a seção que for usada deve cortar três elementos apenas. Isso porque as equações de equilíbrio no passo 4 podem ser resolvidas para três incógnitas apenas. No entanto, podemos definir uma seção passando por mais de três elementos para encontrar a força em um desses elementos se pudemos escrever uma equação de equilíbrio que contenha apenas essa força como incógnita. Exemplos de tais situações especiais são encontrados nos Problemas 6.61 a 6.64.

(*continua*)

B. Sobre treliças completamente vinculadas e determinadas:

1. Primeiro observemos que qualquer treliça simples que estiver simplesmente apoiada é uma treliça completamente vinculada e determinada.

2. Para determinarmos se qualquer outra treliça é ou não completamente vinculada e determinada, primeiro devemos contar o número m de seus elementos, o número n de seus nós e o número r dos componentes de reação em seus apoios. Comparemos, então, a soma $m + r$ que representa o número de incógnitas e o produto $2n$ que representa o número de equações de equilíbrio independentes disponíveis.

a. Se $m + r < 2n$, há menos incógnitas do que equações. Portanto, algumas das equações não podem ser satisfeitas: a treliça é apenas *parcialmente vinculada*.

b. Se $m + r > 2n$, há mais incógnitas do que equações. Portanto, algumas das incógnitas não podem ser determinadas: a treliça é *indeterminada.*

c. Se $m + r = 2n$, há tantas incógnitas quanto equações. Isso, no entanto, não significa que todas as incógnitas podem ser determinadas e que todas as equações podem ser satisfeitas. Para descobrirmos se uma treliça é *completamente* ou *impropriamente vinculada*, devemos tentar determinar as reações em seus apoios e as forças em seus elementos. Se for possível achar todas, a treliça é *completamente vinculada e determinada.*

PROBLEMAS

6.43 Uma treliça de ponte Warren é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *CE*, *DE* e *DF*.

6.44 Uma treliça de ponte Warren é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *EG*, *FG* e *FH*.

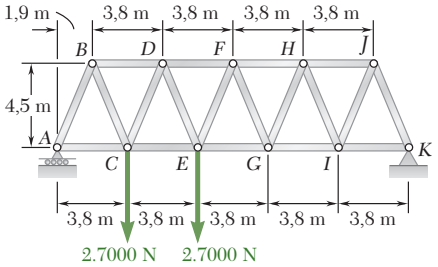


Figura P6.43 e P6.44

6.45 Determine a força nos elementos *BD* e *DE* na treliça mostrada na figura.

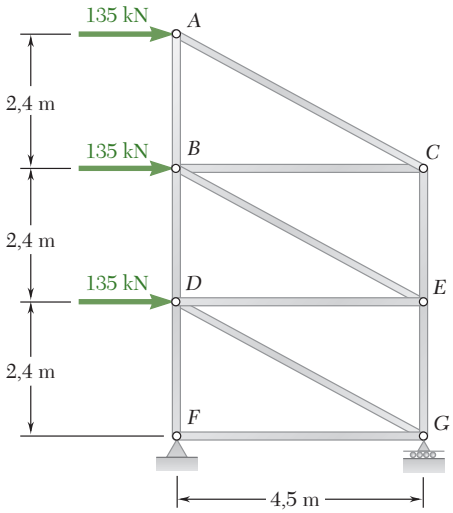


Figura P6.45 e P6.46

6.46 Determine a força nos elementos *DG* e *EG* na treliça mostrada na figura.

6.47 Uma treliça de piso é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *CF*, *EF* e *EG*.

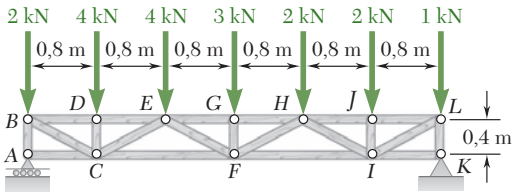


Figura *P6.47 e P6.48*

6.48 Uma treliça de piso é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *FI*, *HI* e *HJ*.

6.49 Uma treliça de telhado de uma água é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *CE*, *DE* e *DF*.

6.50 Uma treliça de telhado de uma água é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *EG*, *GH* e *HJ*.

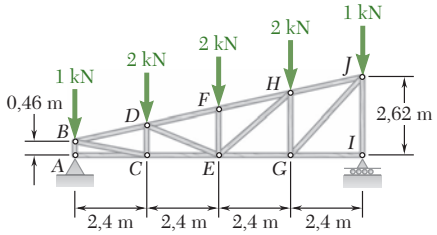


Figura P6.49 e P6.50

6.51 Uma treliça de telhado Howe em forma de tesoura é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *DF*, *DG* e *EG*.

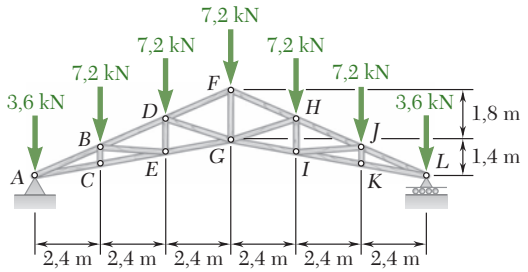


Figura P6.51 e P6.52

6.52 Uma treliça de telhado Howe em forma de tesoura é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *GI*, *HI* e *HJ*.

6.53 Uma treliça de telhado Pratt é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *CE*, *DE* e *DF*.

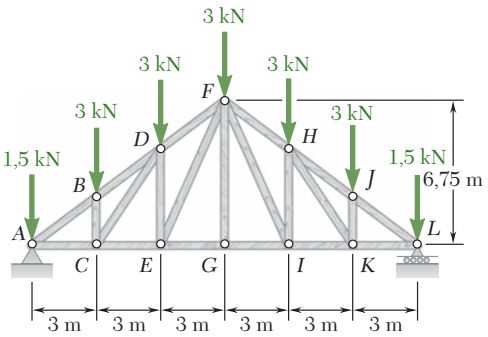


Figura P6.53 e P6.54

6.54 Uma treliça de telhado Pratt é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *FH*, *FI* e *GI*.

6.55 Determine a força nos elementos *AD*, *CD* e *CE* na treliça mostrada na figura.

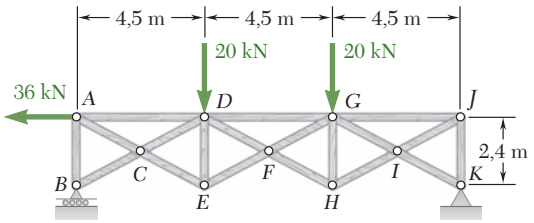


Figura P6.55 e P6.56

6.56 Determine a força nos elementos *DG*, *FG* e *FH* na treliça mostrada na figura.

6.57 Uma treliça de telhado de estádio é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *AB*, *AG* e *FG*.

6.58 Uma treliça de telhado de estádio é carregada tal como mostra a figura. Determine a força nos elementos *AE*, *EF* e *FJ*.

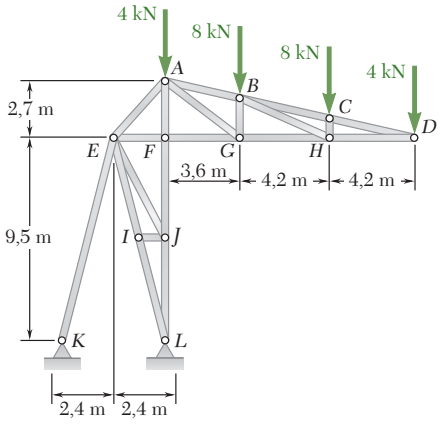


Figura P6.58 e P6.59

6.59 Uma treliça de telhado tipo Polinésia ou dupla inclinação é carregada como mostrado na figura. Determine a força nos elementos, *DF*, *EF* e *EG*.

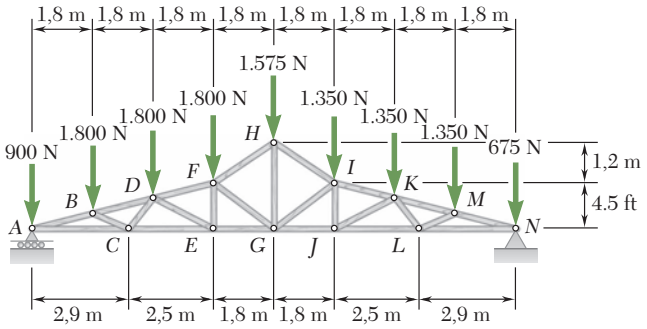


Figura *P6.59* e *P6.60*

6.60 Uma treliça de telhado tipo Polinésia ou dupla inclinação é carregada como mostrado na figura. Determine a força nos elementos *HI*, *GI* e *GJ*.

6.61 Determine a força nos elementos *AF* e *EJ* da treliça mostrada na figura quando $P = Q = 1{,}2$ kN. (*Dica:* use a seção *aa*.)

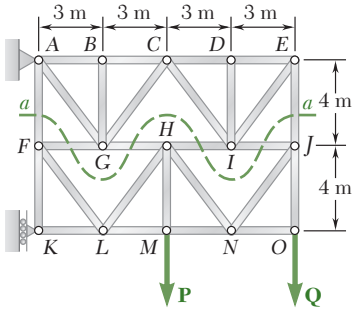


Figura P6.61 e P6.62

6.62 Determine a força nos elementos *AF* e *EJ* da treliça mostrada na figura quando $P = 1{,}2$ kN e $Q = 0$. (*Dica:* use a seção *aa*.)

6.63 Determine a força nos elementos *EH* e *GI* da treliça mostrada na figura. (*Dica:* use a seção *aa*.)

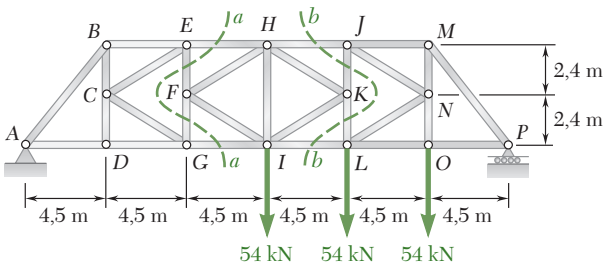


Figura *P6.63* e *P6.64*

6.64 Determine a força nos elementos *HJ* e *IL* da treliça mostrada na figura. (*Dica:* use a seção *bb*.)

6.65 e 6.66 Os elementos diagonais no painel central da torre da linha de transmissão mostrada na figura são muito delgados e podem atuar apenas sob tração; tais elementos são conhecidos como *tirantes*. Para o carregamento dado, determine (*a*) qual dos dois tirantes listados abaixo estão atuando, (*b*) a força neste tirante.

6.65 Tirantes *CJ* e *HE*.

6.66 Tirantes *IO* e *KN*.

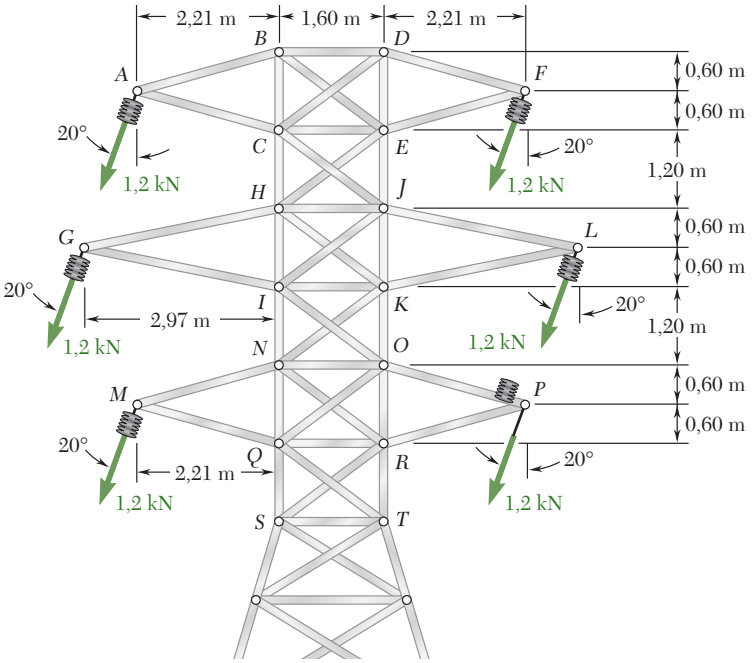


Figura P6.65 e P6.66

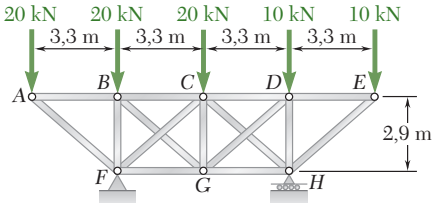


Figura P6.67

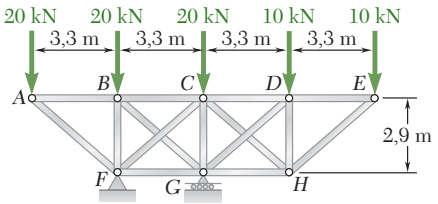


Figura P6.68

6.67 e 6.68 Os elementos diagonais no painel central da treliça mostrada na figura são muito delgados e podem atuar apenas sob tração; tais elementos são conhecidos como *tirantes*. Determine as forças exercidas nos tirantes para o carregamento indicado.

6.69 Classifique cada uma das estruturas mostradas nas figuras como completamente, parcialmente ou impropriamente vinculada; se completamente vinculada, classifique-a também como determinada ou indeterminada. (Todos os elementos podem atuar tanto sob tração como sob compressão.)

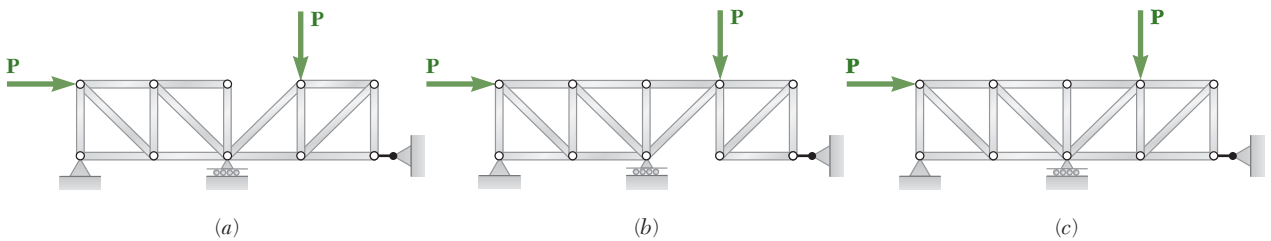


Figura P6.69

6.70 a 6.74 Classifique cada uma das estruturas mostradas nas figuras como completamente, parcialmente ou impropriamente vinculada; se completamente vinculada, classifique-a também como determinada ou indeterminada. (Todos os elementos podem atuar tanto sob tração como sob compressão.)

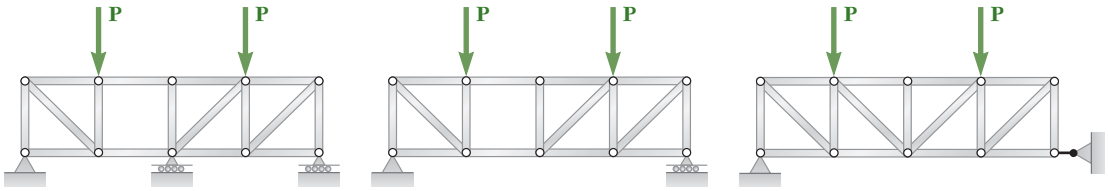


Figura P6.70 (*a*) (*b*) (*c*)

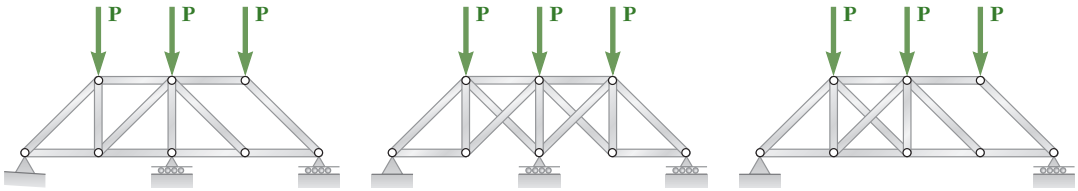


Figura P6.71 (*a*) (*b*) (*c*)

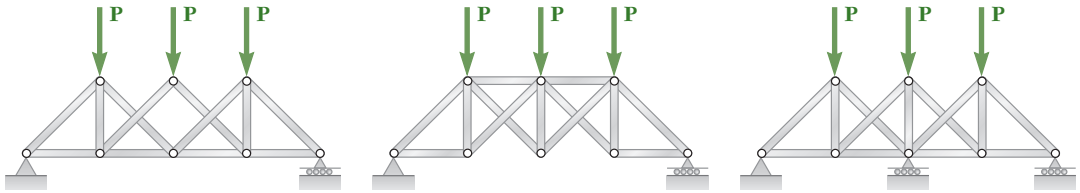


Figura P6.72 (*a*) (*b*) (*c*)

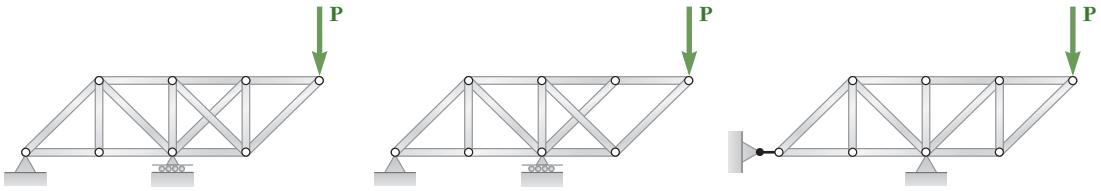


Figura P6.73 (*a*) (*b*) (*c*)

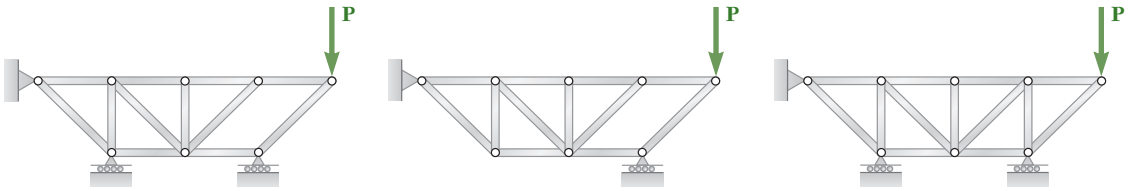


Figura P6.74 (*a*) (*b*) (*c*)

ESTRUTURAS E MÁQUINAS

6.9 Estruturas que contêm elementos sujeitos à ação de múltiplas forças

No estudo sobre treliças, tratamos de estruturas que consistiam inteiramente em pinos e elementos retos sujeitos à ação de duas forças. Naquele caso, era sabido que as forças que atuam nesses elementos estavam direcionadas ao longo dos elementos propriamente ditos. Agora consideramos estruturas nas quais pelo menos um dos elementos é um elemento *sujeito à ação de múltiplas forças,* ou seja, um elemento sobre o qual atuam três ou mais forças. Essas forças geralmente não serão direcionadas ao longo dos elementos sobre os quais elas atuam; sua direção é desconhecida, e elas devem, portanto, ser representadas por dois componentes desconhecidos.

Estruturas e máquinas são composições que contêm elementos sujeitos à ação de múltiplas forças. As *estruturas* são projetadas para sustentar cargas e geralmente são estruturas estacionárias, completamente vinculadas. As *máquinas* são projetadas para transmitir e modificar forças; podem ou não ser estacionárias e sempre conterão partes móveis.

6.10 Análise de uma estrutura

Como um primeiro exemplo de análise de uma estrutura, o guindaste descrito na Seção 6.1, que carrega uma dada carga W (Fig. 6.20*a*), será novamente considerado. O diagrama de corpo livre de toda a estrutura é mostrado na Fig. 6.20*b*. Esse diagrama pode ser usado para se determinar as forças externas exercidas nessa estrutura. Somando os momentos em relação a A, primeiro determinamos a força $\mathbf{T}$ exercida pelo cabo; somando os componentes em x e y, determinamos então os componentes $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$ da reação no pino A.

Para determinar as forças internas que mantêm as várias partes da estrutura juntas, devemos desmembrar a estrutura e traçar um diagrama de corpo livre para cada uma de suas partes componentes (Fig. 6.20*c*). Primeiro, devem-se considerar os elementos sujeitos a duas forças. Nessa estrutura, o elemento BE é o único sujeito à ação de duas forças. As forças atuantes em cada extremidade desse elemento têm que ter de igual intensidade, igual linha de ação e sentidos opostos (Seção 4.6). Elas são, portanto, direcionadas ao longo de BE e serão representadas, respectivamente, por $\mathbf{F}_{BE}$ e $-\mathbf{F}_{BE}$. Seus sentidos serão arbitrariamente considerados, tal como mostra a Fig. 6.20*c*; depois, o sinal obtido para a intensidade comum F_{BE} das duas forças confirmará ou negará essa suposição.

Em seguida, consideramos os elementos sujeitos à ação de múltiplas forças, ou seja, os elementos sobre os quais atuam três ou mais forças. De acordo com a terceira lei de Newton, a força exercida em B pelo elemento BE no elemento AD tem que ser igual e oposta à força $\mathbf{F}_{BE}$ exercida por AD em BE. De modo semelhante, a força exercida em E pelo elemento BE no elemento CF tem que ser igual e oposta à força $-\mathbf{F}_{BE}$ exercida por CF em BE. Logo, as duas forças que o elemento BE exerce em AD e CF são, respectivamente, iguais a $-\mathbf{F}_{BE}$ e $\mathbf{F}_{BE}$; elas têm igual intensidade F_{BE} e sentidos opostos e devem estar direcionadas tal como mostra a Fig. 6.20*c*.

Em C, dois elementos sujeitos à ação de múltiplas forças estão ligados. Como nem a direção nem a intensidade das forças exercidas em C são conhecidas, essas forças serão representadas pelos seus componentes

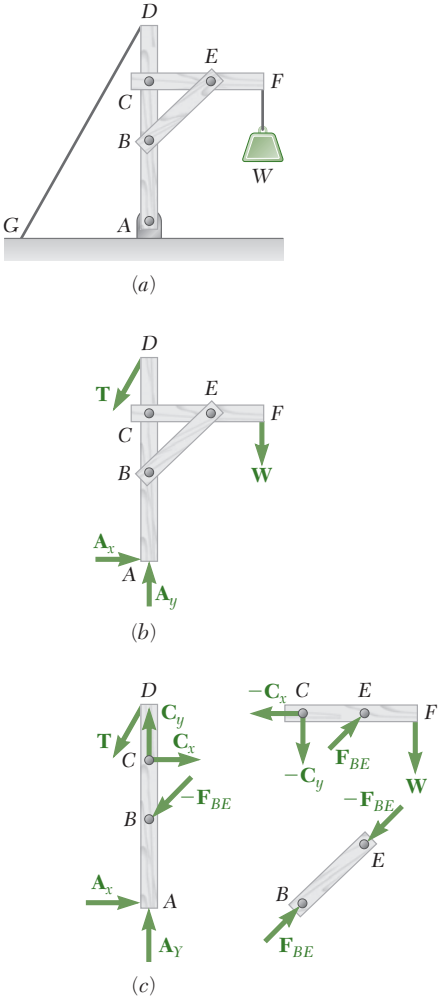


Figura 6.20

x e y. Os componentes $\mathbf{C}_x$ e $\mathbf{C}_y$ da força exercidas no elemento AD serão arbitrariamente direcionados para a direita e para cima. Como, de acordo com a terceira lei de Newton, as forças exercidas pelo elemento CF em AD e pelo elemento AD em CF são iguais e opostas, os componentes da força que atuam no elemento CF *devem* estar direcionados para a esquerda e para baixo; eles serão representados, respectivamente, por $-\mathbf{C}_x$ e $-\mathbf{C}_y$. Se a força $\mathbf{C}_x$ está realmente direcionada para a direita e a força $-\mathbf{C}_x$ para a esquerda, será determinado depois pelo sinal de sua intensidade comum C_x, um sinal positivo que indica que a suposição que se fez estava certa e um sinal negativo de que ela estava errada. Os diagramas de corpo livre dos elementos sujeitos a múltiplas forças são completados mostrando as forças externas atuando em A, D e F.*

Podem-se agora determinar as forças internas considerando o diagrama de corpo livre de qualquer dos dois elementos sujeitos a múltiplas forças. Escolhendo o diagrama de corpo livre de CF, por exemplo, escrevemos as equações $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma M_E = 0$ e $\Sigma F_x = 0$, que dão os valores das intensidades F_{BE}, C_y e C_x, respectivamente. Esses valores podem ser confirmados verificando-se que o elemento AD está também em equilíbrio.

Deve-se observar que foi considerado que os pinos na Fig. 6.20 são parte integrante de um dos dois elementos que eles unem e, por isso, não foi necessário mostrar seus diagramas de corpo livre. Essa suposição pode sempre ser usada para simplificar a análise de estruturas e máquinas. Porém, quando um pino está ligado a três ou mais elementos, ou quando um pino está ligado a um apoio e a dois ou mais elementos, ou quando uma carga é aplicada a um pino, deve-se tomar uma decisão clara na escolha do elemento ao qual o pino supostamente pertence. (Se elementos sujeitos a múltiplas forças estiverem envolvidos, o pino deve estar preso a um desses elementos.) As várias forças exercidas no pino devem então ser identificadas claramente. Isso é ilustrado no Problema Resolvido 6.6.

6.11 Estruturas que deixam de ser rígidas quando separadas de seus apoios

O guindaste analisado na Seção 6.10 foi construido de tal modo que podia manter a mesma forma sem a ajuda de seus apoios; considerou-se, então, como um corpo rígido. Muitas estruturas, no entanto, entrarão em colapso se separadas de seus apoios; tais estruturas não podem ser consideradas como corpos rígidos. Considere, por exemplo, a estrutura mostrada na Fig. 6.21*a*, que consiste em dois elementos AC e CB que sustentam as cargas $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ em seus pontos médios; os elementos são apoiados por pinos em A e B e são unidos por um pino em C. Se separada de seus apoios, essa estrutura não manterá sua forma; deve-se então considerá-la como feita de *duas partes rígidas distintas* AC e CB.

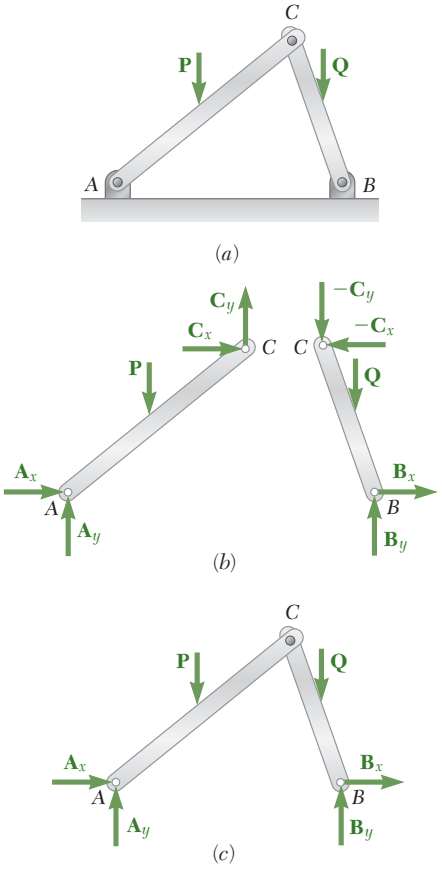


Figura 6.21

* Não é estritamente necessário utilizar um sinal negativo para distinguir a força exercida por um elemento sobre outro de força igual e oposta exercida pelo segundo elemento no primeiro, já que as duas forças pertencem a diagramas de corpo livre diferentes e, portanto, não podem ser facilmente confundidas. Nos Problemas Resolvidos, é usado o mesmo símbolo para representar forças iguais e opostas que são aplicadas a corpos livres distintos. Deve-se observar que, sob essas condições, o sinal obtido para um dado componente de força não relacionará diretamente o sentido desse componente com o sentido do eixo coordenado correspondente. Em vez disso, um sinal positivo indicará que *o sentido que se pressupôs para esse componente no diagrama de corpo livre* está certo, e um sinal negativo indicará que ele está errado.

As equações $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$ (em relação a qualquer ponto dado) expressam as condições para o *equilíbrio de um corpo rígido* (Cap. 4); devemos utilizá-las, portanto, em conexão com os diagramas de corpo livre de corpos rígidos, em outras palavras os diagramas de corpo livre dos elementos *AC* e *CB* (Fig. 6.21*b*). Como esses elementos estão sujeitos à ação de múltiplas forças e como pinos são usados nos apoios e na conexão, as reações em *A* e *B* e das forças em *C* serão representadas por dois componentes. De acordo com a terceira lei de Newton, os componentes da força exercida por *CB* em *AC* e os componentes da força exercida por *AC* em *CB* são representados por vetores de igual intensidade e sentidos opostos; então, se o primeiro par de componentes consiste em $\mathbf{C}_x$ e $\mathbf{C}_y$, o segundo par será representado por $-\mathbf{C}_x$ e $-\mathbf{C}_y$. Observamos que quatro componentes de força desconhecidos atuam no corpo livre *AC*, enquanto somente três equações independentes podem ser usadas para demonstrar que o corpo está em equilíbrio; de modo semelhante, quatro incógnitas, mas somente três equações, estão associadas a *CB*. No entanto, somente seis incógnitas diferentes estão envolvidas na análise dos dois elementos, e no total seis equações estão disponíveis para demontrar que os elementos estão em equilíbrio. Escrevendo $\Sigma M_A = 0$ para o corpo livre *AC* e $\Sigma M_B = 0$ para *CB*, obtemos duas equações simultâneas que podem ser resolvidas para a intensidade comum C_x dos componentes $\mathbf{C}_x$ e $-\mathbf{C}_x$ e para a intensidade comum C_y dos componentes $\mathbf{C}_y$ e $-\mathbf{C}_y$. Então, escrevemos $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$ para cada um dos dois corpos livres, obtendo, sucessivamente, as intensidades A_x, A_y, B_x e B_y.

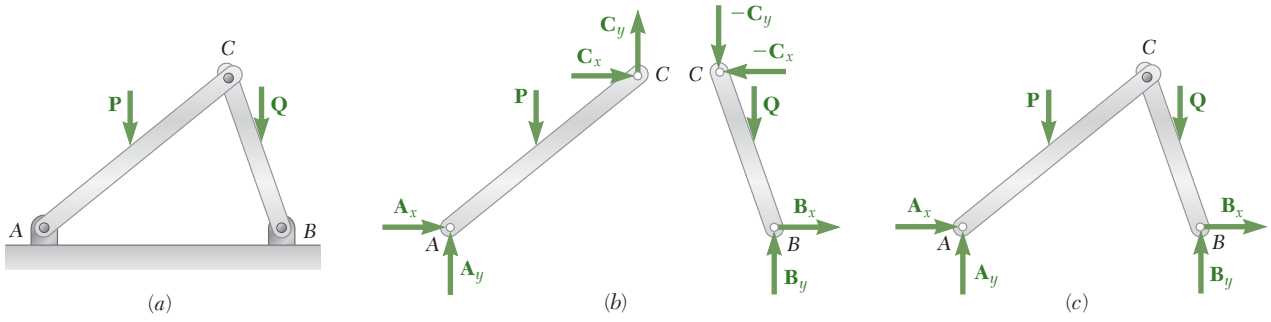


Figura 6.21 (repetido)

Pode-se agora observar que, como as equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$ (em relação a qualquer ponto dado) são satisfeitas pelas forças que atuam no corpo livre *AC*, e uma vez que também são satisfeitas pelas forças atuantes no corpo livre *CB*, elas devem ser satisfeitas quando as forças atuantes nos dois corpos livres são consideradas simultaneamente. Como as forças internas em *C* se anulam mutuamente, encontramos que as equações de equilíbrio devem ser satisfeitas pelas forças externas mostradas no diagrama de corpo livre da estrutura *ACB* propriamente dita (Fig. 6.21*c*), apesar de essa estrutura não ser um corpo rígido. Essas equações podem ser usadas para se determinar alguns dos componentes das reações em *A* e *B*. Contudo, acharemos também que *as reações não podem ser completamente determinadas a partir do*

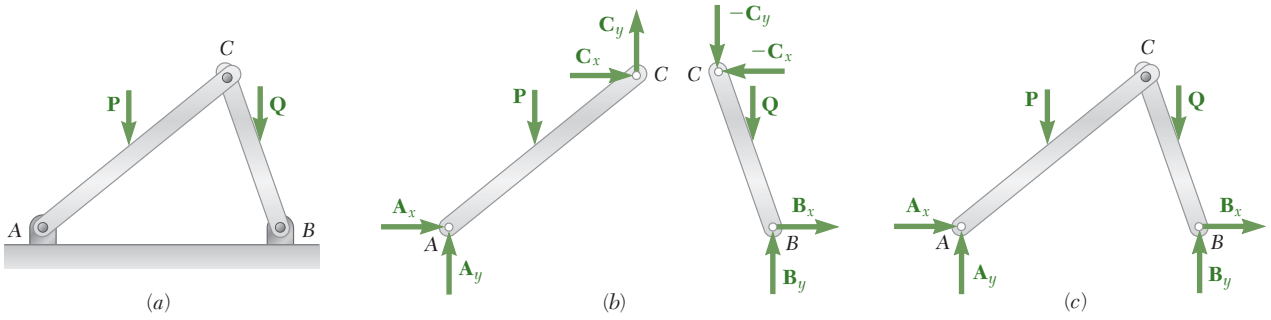


Figura 6.21 (repetido)

diagrama de corpo livre da estrutura inteira. É, portanto, necessário desmembrar a estrutura e considerar os diagramas de corpo livre de suas partes componentes (Fig. 6.21*b*), mesmo quando estamos interessados em determinar somente as reações externas. Isso ocorre porque as equações de equilíbrio obtidas para o corpo livre *ACB são condições necessárias* para o equilíbrio de uma estrutura não rígida, *mas não são condições suficientes.*

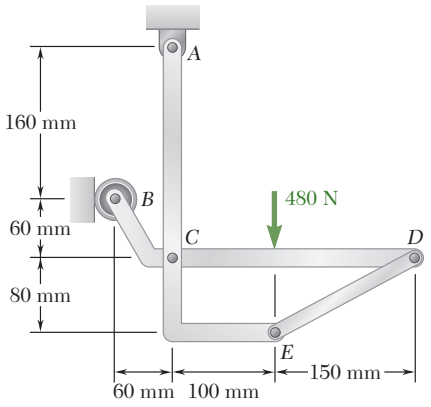
O método de solução esboçado no segundo parágrafo desta seção envolvia equações simultâneas. Agora nos é apresentado um método mais eficaz, que usa o corpo livre *ACB* bem como os corpos livres *AC* e *CB*. Tendo $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$ para o corpo livre *ACB*, obtemos B_y e A_y. E tendo $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$ para o corpo livre *AC*, obtemos, sucessivamente, A_x, C_x e C_y. Por fim, tendo $\Sigma F_x = 0$ para *ACB*, obtemos B_x.

Observamos anteriormente que a análise da estrutura da Fig. 6.21 envolve seis componentes de força desconhecidos e seis equações de equilíbrio independentes. (As equações de equilíbrio para a estrutura inteira foram obtidas a partir das seis equações originais e, por isso, não são independentes.) Além disso, verificamos que todas as incógnitas podiam realmente ser determinadas e que todas as equações podiam ser satisfeitas. A estrutura considerada é *estaticamente determinada e rígida**. Geralmente, para determinar se uma estrutura é estaticamente determinada e rígida, devemos traçar um diagrama de corpo livre para cada uma de suas partes componentes e contar as reações e forças internas envolvidas. Devemos também determinar o número de equações de equilíbrio independentes (excluindo-se as equações que expressam o equilíbrio da estrutura inteira ou de grupos de partes componentes já analisados). Se há mais incógnitas que equações, a estrutura é *estaticamente indeterminada.* Se há menos incógnitas que equações, a estrutura *não é rígida.* Se há tantas incógnitas quanto equações *e se todas as incógnitas podem ser determinadas e todas equações podem ser satisfeitas* em condições gerais de carregamento, a estrutura é *estaticamente determinada e rígida.* Se, no entanto, por causa de um *arranjo impróprio* de elementos e apoios, todas as incógnitas não puderem ser todas determinadas e as equações não puderem ser todas satisfeitas, a estrutura é *estaticamente indeterminada e não rígida.*

* A palavra *rígida* é usada aqui para indicar que a estrutura manterá sua forma enquanto permanecer ligada aos seus apoios.

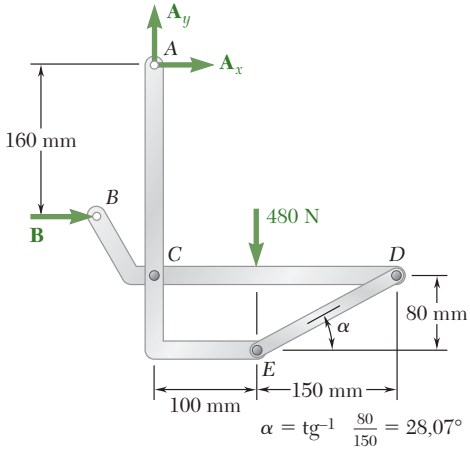
PROBLEMA RESOLVIDO 6.4

Na estrutura mostrada na figura, os elementos *ACE* e *BCD* estão ligados por um pino em *C* e pela haste *DE*. Para o carregamento mostrado na figura, determine a força na haste *DE* e os componentes da força exercidos em *C* no elemento *BCD*.



SOLUÇÃO

Corpo livre: estrutura inteira. Como as reações externas envolvem apenas três incógnitas, calculamos as reações considerando o diagrama de corpo livre da estrutura inteira.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 480\ \text{N} = 0 \qquad A_y = +480\ \text{N} \qquad \mathbf{A}_y = 480\ \text{N}\uparrow$$

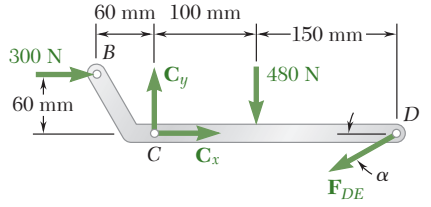
$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -(480\ \text{N})(100\ \text{mm}) + B(160\ \text{mm}) = 0$$

$$B = +300\ \text{N} \qquad \mathbf{B} = 300\ \text{N}\rightarrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad B + A_x = 0$$

$$300\ \text{N} + A_x = 0 \qquad A_x = -300\ \text{N} \qquad \mathbf{A}_x = 300\ \text{N}\leftarrow$$

Elementos. Agora desmembramos a estrutura. Como somente dois elementos estão ligados em *C*, os componentes das forças deconhecidas em *ACE* e *BCD* são, respectivamente, iguais e opostos, e considera-se que estão direcionados tal como mostra a figura. Partimos do pressuposto que a haste *DE* está sob tração e exerce forças iguais e opostas em *D* e *E*, direcionadas como mostra a figura.



Corpo livre: elemento BCD. Usando o corpo livre *BCD*, temos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0:$$

$$(F_{DE}\ \text{sen}\ \alpha)(250\ \text{mm}) + (300\ \text{N})(80\ \text{mm}) + (480\ \text{N})(100\ \text{mm}) = 0$$

$$F_{DE} = -561\ \text{N} \qquad F_{DE} = 561\ \text{N}\ C \blacktriangleleft$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad C_x - F_{DE}\cos\alpha + 300\ \text{N} = 0$$

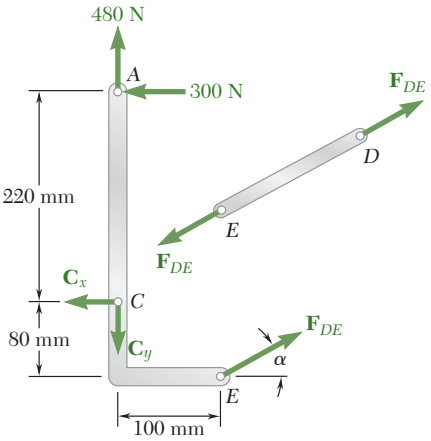
$$C_x - (-561\ \text{N})\cos 28{,}07° + 300\ \text{N} = 0 \qquad C_x = -795\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - F_{DE}\ \text{sen}\ \alpha - 480\ \text{N} = 0$$

$$C_y - (-561\ \text{N})\ \text{sen}\ 28.07° - 480\ \text{N} = 0 \qquad C_y = +216\ \text{N}$$

Dos sinais obtidos para C_x e C_y, concluímos que os componentes de força $\mathbf{C}_x$ e $\mathbf{C}_y$ exercidos no elemento *BCD* estão direcionados, respectivamente, para a esquerda e para cima. Temos:

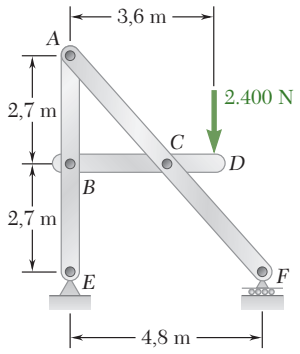
$$\mathbf{C}_x = 795\ \text{N}\leftarrow,\ C_y = 216\ \text{N}\uparrow \blacktriangleleft$$



Corpo livre: elemento ACE (verificação). Os cálculos são verificados considerando-se o corpo livre *ACE*. Por exemplo:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = (F_{DE}\cos\alpha)(300\ \text{mm}) + (F_{DE}\ \text{sen}\ \alpha)(100\ \text{mm}) - C_x(220\ \text{mm})$$

$$= (-561\cos\alpha)(300) + (-561\ \text{sen}\ \alpha)(100) - (-795)(220) = 0$$

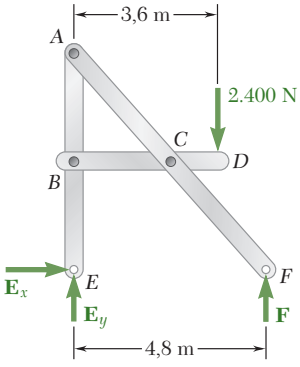


PROBLEMA RESOLVIDO 6.5

Determine os componentes das forças exercidas em cada elemento da estrutura mostrada na figura.

SOLUÇÃO

Corpo livre: estrutura inteira. Como as reações externas envolvem apenas três incógnitas, calculamos as reações considerando o diagrama de corpo livre da estrutura inteira.



$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0$: $\quad -(2.400\ \text{N})(3{,}6\ \text{m}) + F(4{,}8\ \text{m}) = 0$

$F = +1.800\ \text{N}$ $\qquad \mathbf{F} = 1.800\ \text{N}\uparrow$ ◀

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad -2.400\ \text{N} + 1.800\ \text{N} + E_y = 0$

$E_y = +600\ \text{N}$ $\qquad \mathbf{E}_y = 600\ \text{N}\uparrow$ ◀

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\qquad \mathbf{E}_x = 0$ ◀

Elementos. A estrutura é agora desmembrada; como apenas dois elementos estão ligados em cada nó, componentes iguais e opostos são mostrados atuando, em cada nó, sobre cada elemento.

Corpo livre: elemento BCD

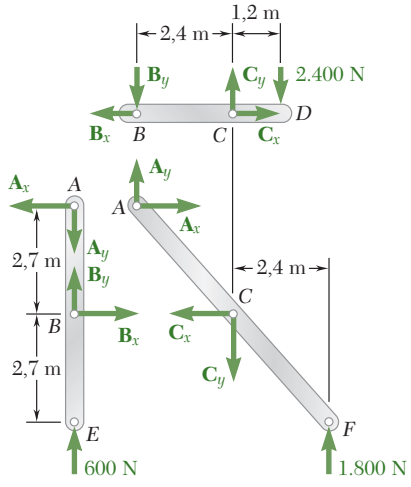
$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$: $\quad -(2.400\ \text{N})(3{,}6\ \text{m}) + C_y(2{,}4\ \text{m}) = 0$ $\qquad C_y = +3.600\ \text{N}$ ◀

$+\circlearrowleft\Sigma M_C = 0$: $\quad -(2.400\ \text{N})(1{,}2\ \text{m}) + B_y(2{,}4\ \text{m}) = 0$ $\qquad B_y = +1.200\ \text{N}$ ◀

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad -B_x + C_x = 0$

Observamos que não é possível obter B_x e nem C_x considerando-se apenas o elemento *BCD*. Os valores positivos obtidos para B_y e C_y indicam que os componentes de força $\mathbf{B}_y$ e $\mathbf{C}_y$ estão direcionados como o esperado.

Corpo livre: elemento ABE



$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$: $\quad B_x(2{,}7\ \text{m}) = 0$ $\qquad B_x = 0$ ◀

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad +B_x - A_x = 0$ $\qquad A_x = 0$ ◀

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad -A_y + B_y + 600\ \text{N} = 0$

$-A_y + 1.200\ \text{N} + 600\ \text{N} = 0$ $\qquad A_y = +1.800\ \text{N}$ ◀

Corpo livre: elemento BCD. Retornando agora ao elemento *BCD*, temos:

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad -B_x + C_x = 0 \qquad 0 + C_x = 0$ $\qquad C_x = 0$ ◀

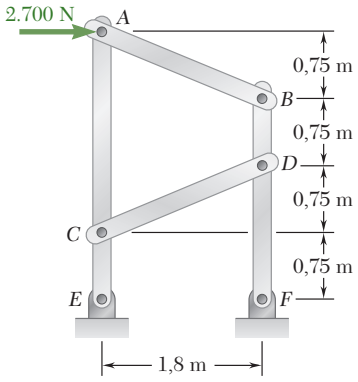
Corpo livre: elemento ACF (verificação). Todos os componentes desconhecidos já foram encontrados. Para conferir os resultados, verificamos que o elemento *ACF* está em equilíbrio.

$+\circlearrowleft\Sigma M_C = (1.800\ \text{N})(2{,}4\ \text{m}) - A_y(2{,}4\ \text{m}) - A_x(2{,}7\ \text{m})$

$= (1.800\ \text{N})(2.4\ \text{m}) - (1.800\ \text{N})(2{,}4\ \text{m}) - 0 = 0$ (verificado)

PROBLEMA RESOLVIDO 6.6

Uma força horizontal de 2.700 N é aplicada no pino *A* da estrutura mostrada na figura. Determine as forças atuantes nos dois elementos verticais dessa estrutura.

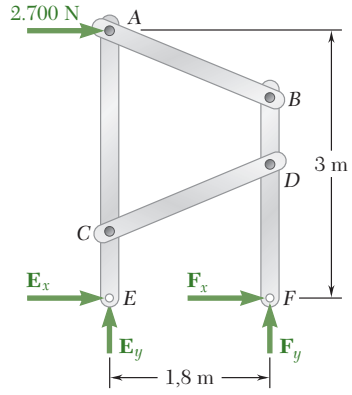


SOLUÇÃO

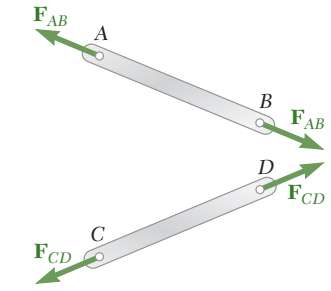
Corpo livre: estrutura inteira. A estrutura inteira é escolhida como um corpo livre; apesar de as reações envolverem quatro incógnitas, podemos determinar $\mathbf{E}_y$ e $\mathbf{F}_y$ da seguinte maneira:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad -(2.700\ \text{N})(3\ \text{m}) + F_y(1{,}8\ \text{m}) = 0$$
$$F_y = +4.500\ \text{N} \qquad \mathbf{F}_y = 4.500\ \text{N}\uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad E_y + F_y = 0$$
$$E_y = -4.500\ \text{N} \qquad \mathbf{E}_y = 4.500\ \text{N}\downarrow \blacktriangleleft$$



Elementos. As equações de equilíbrio da estrutura inteira não são suficientes para determinar $\mathbf{E}_x$ e $\mathbf{F}_x$. Devemos agora considerar os diagramas de corpo livre dos vários elementos para prosseguimos com a solução. Ao desmembramos a estrutura, vamos supor que o pino *A* esteja preso ao elemento sujeito à ação de múltiplas forças *ACE* e que, portanto, a força de 2.700 N está aplicada sobre esse elemento. Observamos também que *AB* e *CD* são elementos sujeitos à ação de duas forças.



Corpo livre: elemento ACE

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -\tfrac{5}{13}F_{AB} + \tfrac{5}{13}F_{CD} - 4.500\ \text{lb} = 0$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad -(2.700\ \text{N})(3\ \text{m}) - (\tfrac{12}{13}F_{AB})(3\ \text{m}) - (\tfrac{12}{13}F_{CD})(0{,}75\ \text{m}) = 0$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, encontramos

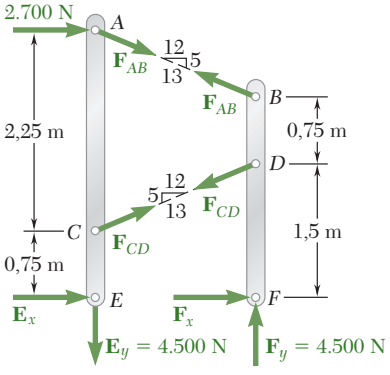
$$F_{AB} = -4.680\ \text{N} \qquad F_{CD} = +7.020\ \text{N} \blacktriangleleft$$

Os sinais obtidos indicam que o sentido que era esperado para F_{CD} estava correto e que o sentido F_{AB} estava incorreto. Somando-se agora os componentes em *x*,

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad 2.700\ \text{N} + \tfrac{12}{13}(-4.680\ \text{N}) + \tfrac{12}{13}(+7.020\ \text{N}) + E_x = 0$$
$$E_x = -4.860\ \text{N} \qquad \mathbf{E}_x = 4.860\ \text{N}\leftarrow \blacktriangleleft$$

Corpo livre: inteira. Como $\mathbf{E}_x$ foi determinado, podemos retornar ao diagrama de corpo livre da estrutura inteira e adotar:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad 2.700\ \text{N} - 4.860\ \text{N} + F_x = 0$$
$$F_x = +2.160\ \text{N} \qquad \mathbf{F}_x = 2.160\ \text{N}\rightarrow \blacktriangleleft$$



Corpo livre: elemento BDF (verificação). Podemos agora conferir nossos cálculos verificando que a equação $\Sigma M_B = 0$ é satisfeita pelas forças que atuam sobre o elemento *BDF*.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -\left(\tfrac{12}{13}F_{CD}\right)(0{,}75\ \text{m}) + (F_x)(2{,}25\ \text{m})$$
$$= -\tfrac{12}{13}(7.020\ \text{N})(0{,}75\ \text{m}) + (2\,160\ \text{N})(2{,}25\ \text{m})$$
$$= -4.860\ \text{N}\cdot\text{m} + 4.860\ \text{N}\cdot\text{m} = 0 \qquad \text{(verificado)}$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, aprendemos a analisar *estruturas que contêm um ou mais elementos sujeitos à ação de múltiplas forças.* Nos problemas que se seguem, seremos solicitados a determinar as reações externas exercidas na estrutura e as forças internas que mantêm unidos os elementos da estrutura.

Na solução de problemas que envolvam estruturas que contêm um ou mais elementos sujeitos à ação de múltiplas forças, sigueremos estes passos:

1. Trace um diagrama de corpo livre da estrutura inteira. Usar esse diagrama de corpo livre para calcular, até onde for possível, as reações nos apoios. (No Problema Resolvido 6.6, somente dois dos quatro componentes de reações podiam ser encontrados a partir do diagrama de corpo livre da estrutura inteira.)

2. Desmembrar a estrutura e traçar um diagrama de corpo livre de cada elemento.

3. Considerando primeiro os elementos sujeitos à ação de duas forças, apliquemos forças iguais e opostas a cada elemento sujeito à ação de duas forças nos pontos em que ele está ligado a outro elemento. Se o elemento sujeito a ação de duas forças for um elemento reto, essas forças estarão direcionadas ao longo do eixo do elemento. Se não pudermos dizer nesse ponto se o elemento está sob tração ou sob compressão, simplesmente *suponhemos* que o elemento está sob tração e *direcionemos ambas as forças apontando para fora do elemento.* Como essas forças têm a mesma intensidade desconhecida, dar a ambas o *mesmo nome* e, para evitar qualquer confusão posterior, *não usar um sinal de mais nem um sinal de menos.*

4. Em seguida, consideremos os elementos sujeitos a múltiplas forças. Para cada um desses elementos, mostremos todas as forças exercidas sobre o elemento, incluindo *cargas aplicadas, reações e forças internas nas conexões.* A intensidade e a direção de qualquer reação ou componente de reação encontrados anteriormente a partir do diagrama de corpo livre da estrutura inteira deve ser claramente indicado.

a. Onde um elemento sujeito a múltiplas forças estiver ligado a um elemento sujeito à ação de duas forças, apliquemos ao elemento sujeito à ação de múltiplas forças uma força *igual e oposta* à força traçada no diagrama de corpo livre do elemento sujeito à ação de duas forças, *dando a ela o mesmo nome.*

b. Onde um elemento sujeito à ação de múltiplas forças estiver ligado a um outro elemento sujeito à ação de múltiplas forças, usemos, nesse ponto, *componentes horizontais e verticais* para representar as forças internas, já que nem a direção nem a intensidade dessas forças são conhecidas. A direção que escolhermos para cada um dos dois componentes de força exercidos no primeiro elemento sujeito à ação de múltiplas forças é arbitrária, mas *devemos aplicar componentes de força iguais e opostos de mesmo nome,* ao outro elemento sujeito à ação de múltiplas forças. Novamente, *não usaremos um sinal de mais nem um sinal de menos.*

(*continua*)

5. As forças internas podem agora ser determinadas, assim como quaisquer reações que ainda não encontramos.

a. O diagrama de corpo livre de cada um dos elementos sujeitos à ação de múltiplas forças pode nos fornecer *três equações de equilíbrio.*

b. Para simplificar a solução, devemos procurar uma maneira de escrever uma equação que envolva uma única incógnita. Se pudermos localizar *um ponto em que todos os componentes de força, exceto um, se cruzam,* obtermos uma equação em uma única incógnita somando momentos em relação a esse ponto. *Se todas as forças desconhecidas, exceto uma, forem paralelas,* obtermos uma equação em uma única incógnita somando componentes de forças em uma direção perpendicular às forças paralelas.

c. Como foi escolhido arbitrariamente o sentido de cada uma das forças desconhecidas, não podemos determinar se a sua suposição estava certa até que a solução esteja completa. Para fazer isso, consideremos *o sinal* do valor encontrado para cada uma das incógnitas: um sinal *positivo* significa que o sentido que selecionamos estava *certo;* um sinal *negativo* significa que o sentido é *oposto* ao sentido que se era esperado.

6. Para sermos mais eficazes e eficientes à medida que prosseguimos com a solução, observemos as seguintes regras:

a. Se uma equação que envolva uma única incógnita puder ser encontrada, iremos escrever essa equação e *resolvê-la para essa incógnita.* Imediatamente, *substituir* essa incógnita em todos os lugares em que ela aparece nos outros diagramas de corpo livre *pelo valor que encontramos.* Devemos repitir esse processo, procurando equações de equilíbrio que envolvam uma única incógnita, até que tenhamos encontrado todas as forças internas e reações desconhecidas.

b. Se uma equação que envolva uma única incógnita não puder ser encontrada, podemos *resolver um par de equações simultâneas.* Antes de fazer isso, verifiquemos se foi mostrado os valores de todas as reações que foram obtidos do diagrama de corpo livre da estrutura inteira.

c. O número total de equações de equilíbrio para a estrutura inteira e para os elementos individuais *será maior que o número de forças e de reações desconhecidas.* Depois que tivermos encontrado todas as reações e todas as forças internas, poderemos usar as equações dependentes restantes para verificar a exatidão da solução.

PROBLEMAS

6.75 Para a estrutura e carregamento mostrados na figura, determine a força exercida no elemento *ABC* (*a*) em *B*, (*b*) em *C*.

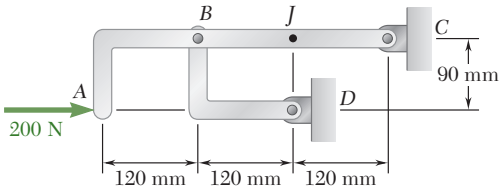


Figura P6.75

6.76 Determine a força exercida no elemento *BD* e a componente da reação em *C*.

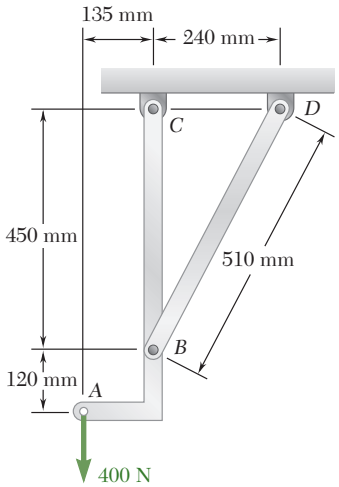


Figura P6.76

6.77 A haste *CD* é montada com um colar em *D* que pode se mover ao longo da haste *AB*, que foi dobrada em forma de arco de círculo. Para a posição quando $\theta = 30°$, determine (*a*) a força na haste *CD*, (*b*) a reação em *B*.

6.78 Resolver o Problema 6.77 quando $\theta = 150°$.

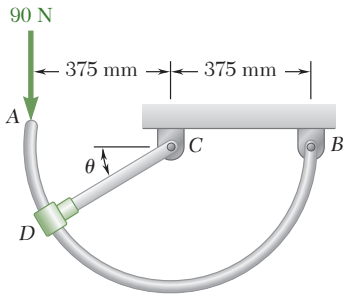


Figura P6.77

6.79 Determine os componentes de todas as forças atuantes no elemento *ABCD* quando $\theta = 0°$.

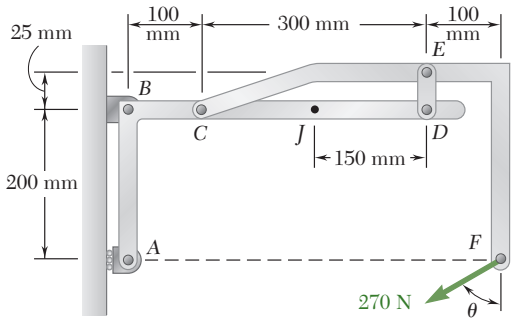


Figura P6.79 e P6.80

6.80 Determine os componentes de todas as forças atuantes no elemento *ABCD* quando $\theta = 90°$.

6.81 Para a estrutura e carregamento mostrados na figura, determine os componentes das forças exercidas no elemento *ABC*.

6.82 Resolva o Problema 6.81 considerando que a carga de 18 kN é substituída por um binário no sentido horário de intensidade 72 kN · m aplicado ao elemento *CDEF* no ponto *D*.

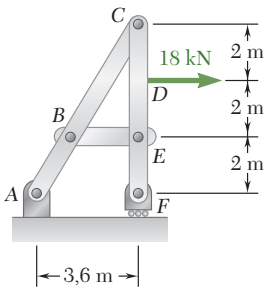


Figura P6.81

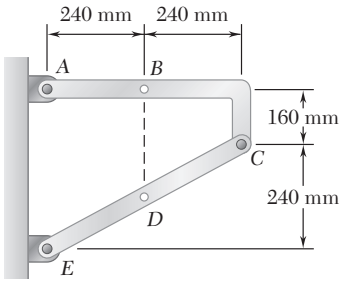


Figura P6.83 e *P6.85*

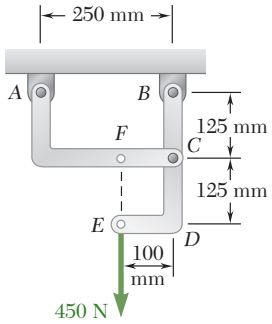


Figura P6.87

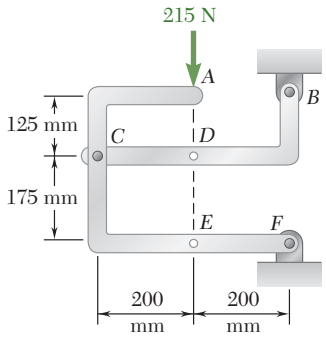


Figura P6.88 e P6.89

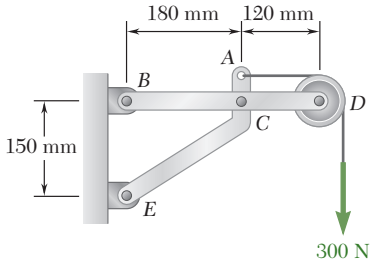


Figura P6.91

6.83 e 6.84 Determine os componentes das reações em *A* e *E* quando uma força de 750 N direcionada verticalmente para baixo é aplicada (*a*) em *B*, (*b*) em *D*.

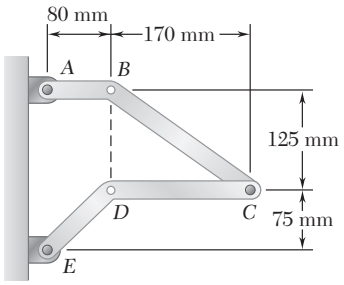


Figura P6.84 e *P6.86*

6.85 e 6.86 Determine os componentes das reações em *A* e *E* quando a estrutura é carregada por um binário no sentido horário de intensidade de 36 N · m aplicado (*a*) em *B*, (*b*) em *D*.

6.87 Determine os componentes das reações em *A* e *B* quando (*a*) a carga de 500 N é aplicada tal como mostra a figura, (*b*) a carga de 500 N é movida ao longo da sua linha de ação e aplicada em *E*.

6.88 A carga de 215 N pode ser movida ao longo da linha de ação mostrada na figura, e aplicada em *A*, *D* ou *E*. Determine os componentes das reações em *B* e *F* quando a carga de 215 N é aplicada (*a*) em *A*, (*b*) em *D* (c) em *E*.

6.89 A carga de 215 N é removida, e um binário de 32 N · m no sentido horário é aplicado sucessivamente em *A*, *D* e *E*. Determine os componentes das reações em *B* e *F* quando o binário é aplicado (*a*) em *A*, (*b*) em *D*, (c) em *E*.

6.90 (*a*) Mostre que, quando uma estrutura sustenta uma polia em *A*, um carregamento equivalente da estrutura e de cada uma de suas partes componentes pode ser obtido removendo-se a polia e aplicando-se em *A* duas forças iguais e paralelas às forças que o cabo exerce na polia. (*b*) Mostre que, se uma extremidade do cabo é presa na estrutura no ponto *B*, uma força de intensidade igual à tração no cabo deve também ser aplicada em *B*.

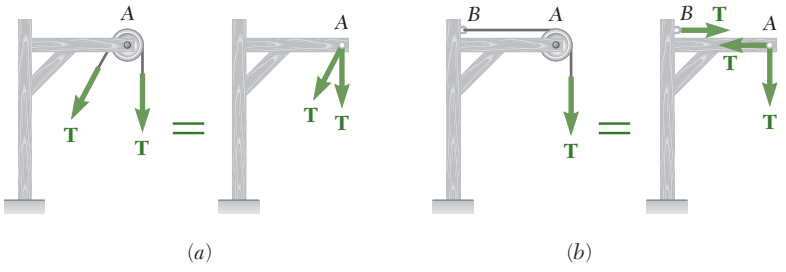


Figura *P6.90*

6.91 Sabendo que a polia tem um raio de 50 mm, determine os componentes das reações em *B* e *E*.

6.92 Sabendo que cada polia tem um raio de 250 mm, determine os componentes das reações em *D* e *E*.

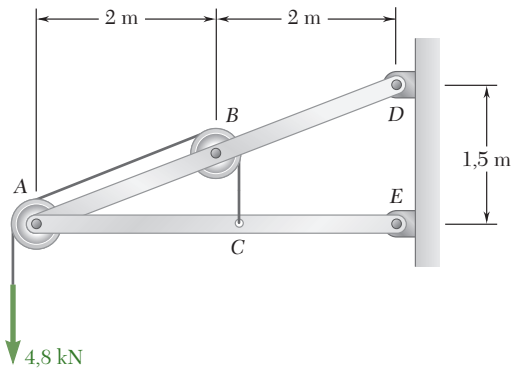


Figura P6.92

6.93 Dois tubos de 220 mm de diâmetro (tubo 1 e tubo 2) são sustentados a cada 1,9 m por uma pequena estrutura tal como a mostrada na figura. Sabendo que o peso de cada tubo somado ao seu conteúdo é 440 N/m e considerando superfícies sem atrito, determine os componentes das reações em *A* e *G*.

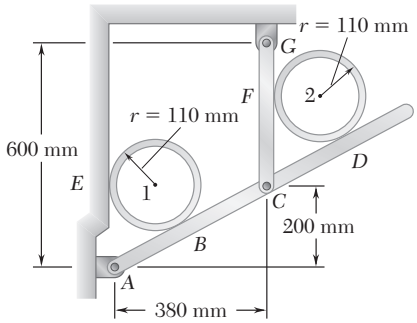


Figura P6.93

6.94 Resolva o Problema 6.93 considerando que o tubo 1 é removido e que apenas o tubo 2 é sustentado pela estrutura.

6.95 O *trailer* pesa 10.800 N e é rebocado a uma caminhonete de carga de 13.050 N por meio de um engate de rótula fixo em *D*. Determine (*a*) as reações em cada uma das seis rodas quando a caminhonete e o trailer estão em repouso, (*b*) o carregamento adicional em cada roda da caminhonete devido ao trailer.

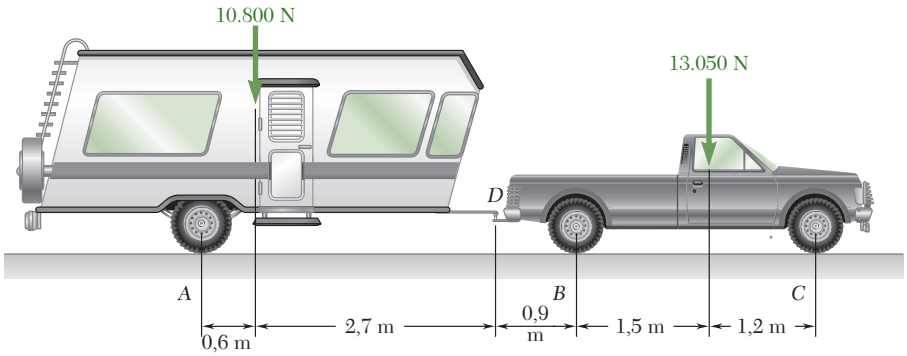


Figura P6.95

6.96 A fim de obter a melhor distribuição de peso sob as quatro rodas da caminhonete de carga do Problema 6.95, um tipo de fixação compensatória mostrada na figura é usada para a caminhonete rebocar o trailer. A fixação consiste em duas barras amortecedoras (apenas uma é mostrada na figura) rigidamente encaixadas em rolamentos dentro do suporte preso junto à caminhonete. As barras são também conectadas por correntes na estrutura do trailer, e ganchos especialmente projetados tornam possível colocar ambas as correntes em tração. (*a*) Determine a tensão *T* necessária em cada uma das duas correntes se o carregamento adicional do trailer for uniformemente distribuído sobre as quatro rodas da caminhonete. (*b*) Quais são as reações resultantes em cada uma das seis rodas da combinação trailer-caminhonete.

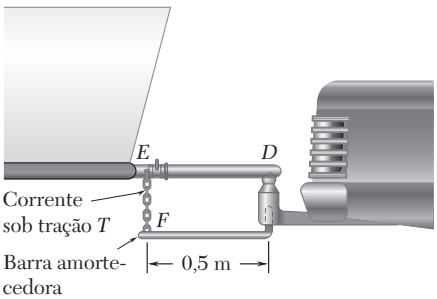


Figura P6.96

6.97 A cabine e a unidade motora da pá carregadeira articulada mostrada na figura estão ligadas por um pino vertical localizado 2 m atrás das rodas da cabine. A distância de *C* para *D* é 1 m. O centro de gravidade da unidade motora de 300 kN está localizado em G_m enquanto que os centros de gravidade da cabine de 100 kN e da carga de 75 kN estão localizados em G_c e G_l, respectivamente. Sabendo que a máquina está em repouso e com os freios soltos, determine (*a*) as reações em cada uma das quatro rodas, (*b*) as forças exercidas pela unidade motora em *C* e *D*.

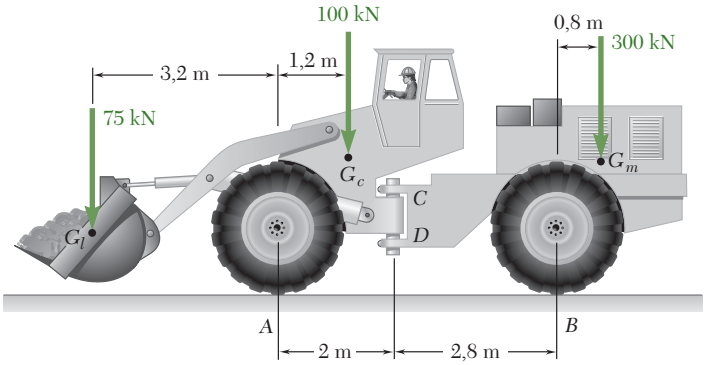


Figura P6.97

6.98 Resolva o Problema 6.97 considerando que a carga de 75 kN foi removida.

6.99 Para a estrutura e carregamento mostrados na figura, determine a força exercida no elemento *CFE* em *C* e *F*.

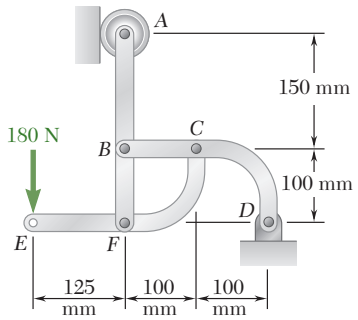


Figura P6.99

6.100 Para a estrutura e carregamento mostrados na figura, determine a força exercida no elemento *CDE* em *C* e *D*.

6.101 e 6.102 Para a estrutura e carregamento mostrados na figura, determine os componentes de todas as forças atuantes no elemento *ABE*.

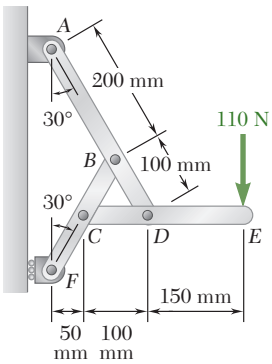


Figura P6.100

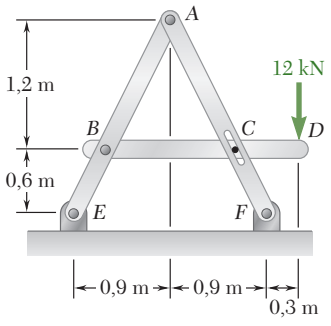


Figura P6.101

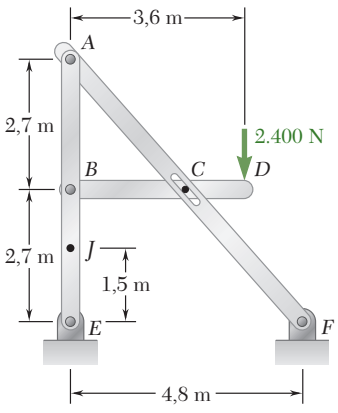


Figura P6.102

6.103 Sabendo que $P = 65$ N e $Q = 290$ N, determine os componentes das forças exercidas (*a*) no elemento *BCDF* em *C* e *D*, (*b*) no elemento *ACEG* em *E*.

6.104 Sabendo que $P = 110$ N e $Q = 250$ N, determine os componentes das forças exercidas (*a*) no elemento *BCDF* em *C* e *D*, (*b*) no elemento *ACEG* em *E*.

6.105 Para a estrutura e carregamento mostrado na figura, determine os componentes das forças atuantes no elemento *DABC* em *B* e *D*.

6.106 Resolva o Problema 6.105 considerando que a carga 6 kN foi removida.

6.107 O eixo do arco de três articulações *ABC* é uma parábola com vértice em *B*. Sabendo que $P = 112$ kN e $Q = 140$ kN, determine (*a*) os componentes da reação em *A*, (*b*) os componentes da força exercida em *B* sobre o segmento *AB*.

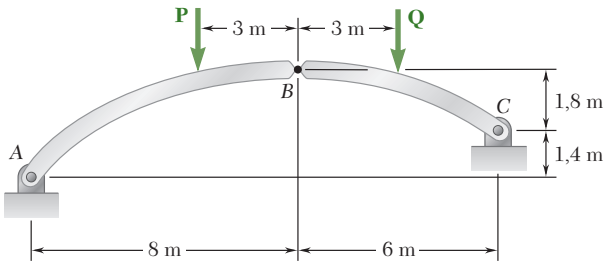


Figura P6.107 e P6.108

6.108 O eixo do arco de três articulações *ABC* é uma parábola com vértice em *B*. Sabendo que $P = 140$ kN e $Q = 112$ kN, determine (*a*) os componentes da reação em *A*, (*b*) os componentes da força exercida em *B* sobre o segmento *AB*.

6.109 Sabendo que nas superfícies em *A* e *D* não há atrito, determine as forças exercidas em *B* e *C* no elemento *BCE*.

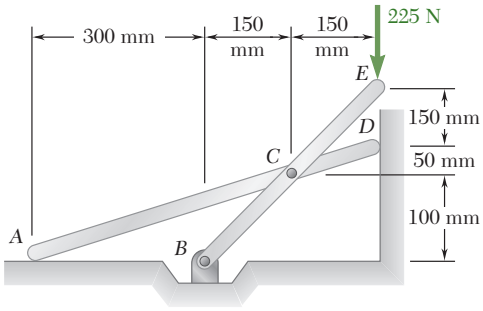


Figura P6.109

6.110 Para a estrutura e carregamento mostrado na figura, determine (*a*) a reação em *C*, (*b*) a força no elemento *AD*.

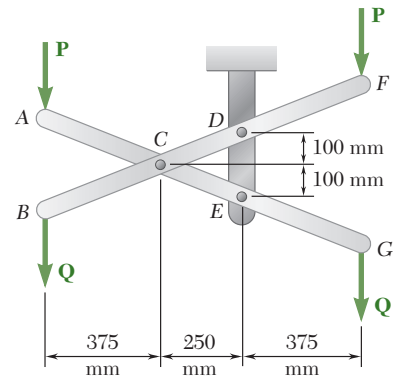


Figura P6.103 e P6.104

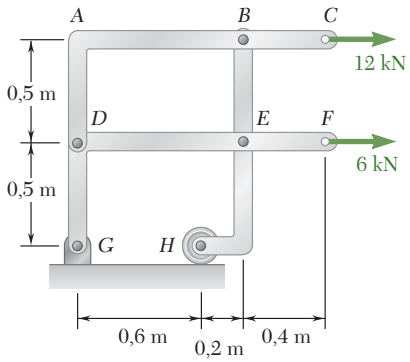


Figura *P6.105*

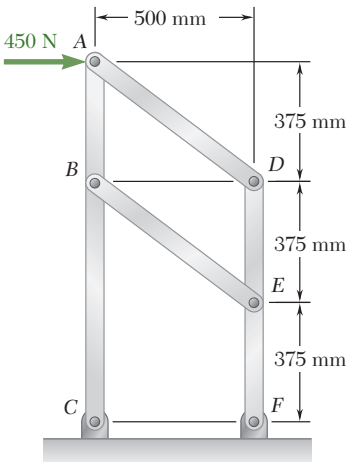


Figura P6.110

6.111, 6.112 e 6.113 Os elementos *ABC* e *CDE* são ligados por pinos em *C* e sustentados por quatro hastes. Para o carregamento mostrado nas figuras, determine a força em cada haste.

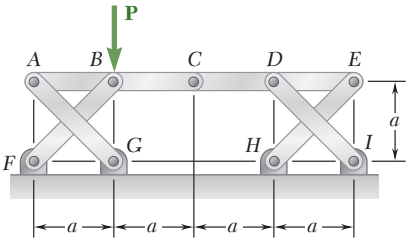


Figura P6.111

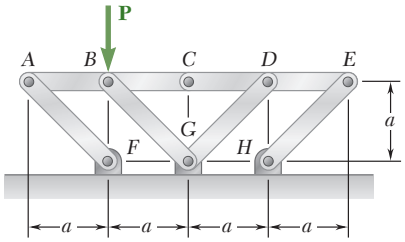


Figura P6.112

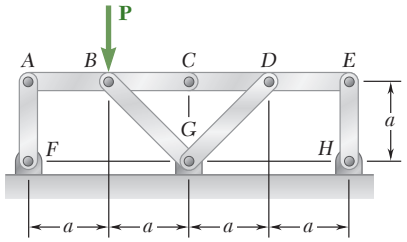


Figura P6.113

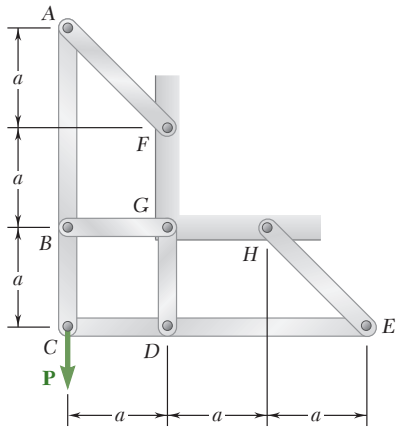


Figura P6.114

6.114 Os elementos *ABC* e *CDE* são ligados por pinos em *C* e sustentados por quatro hastes *AF*, *BG*, *DG* e *EH*. Para o carregamento mostrado nas figuras, determine a força em cada haste.

6.115 Resolva o Problema 6.113 considerando que a força **P** é substituída por um binário no sentido horário de momento $\mathbf{M}_0$ aplicado ao elemento *CDE* em *D*.

6.116 Resolva o Problema 6.114 considerando que a força **P** é substituída por um binário no sentido horário de momento $\mathbf{M}_o$ aplicado ao elemento *CDE* em *D*.

6.117 Quatro vigas, cada qual de comprimento 3*a*, são pregadas juntas com um único prego em *A*, *B*, *C* e *D*. Cada viga é fixada a um suporte localizado a uma distância *a* a partir da ponta da viga como mostrado na figura. Considerando que apenas forças verticais são exercidas nas conexões, determine as reações verticais em *E*, *F*, *G* e *H*.

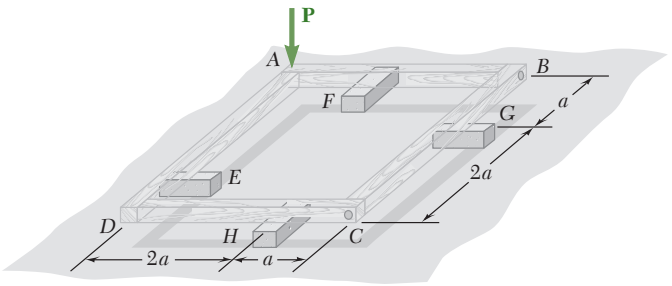


Figura P6.117

6.118 Quatro vigas, cada qual de comprimento 2*a*, são pregadas juntas em seus pontos médios para formar o sistema de suporte mostrado na figura. Considerando que apenas forças verticais são exercidas nas conexões, determine as reações verticais em *A*, *D*, *E* e *H*.

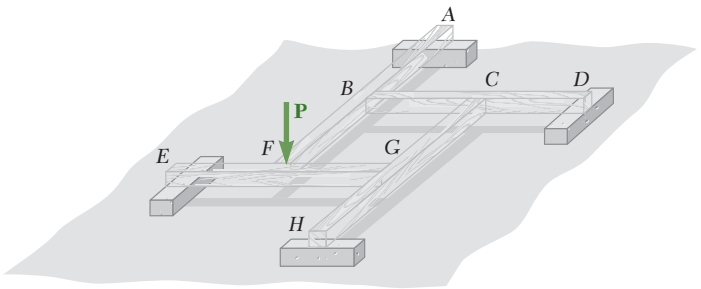


Figura P6.118

6.119 a 6.121 Cada uma das estruturas mostradas nas figuras consiste em dois elementos em forma de L ligados por duas hastes rígidas. Para cada estrutura, determine as reações nos apoios e indique se a estrutura é rígida.

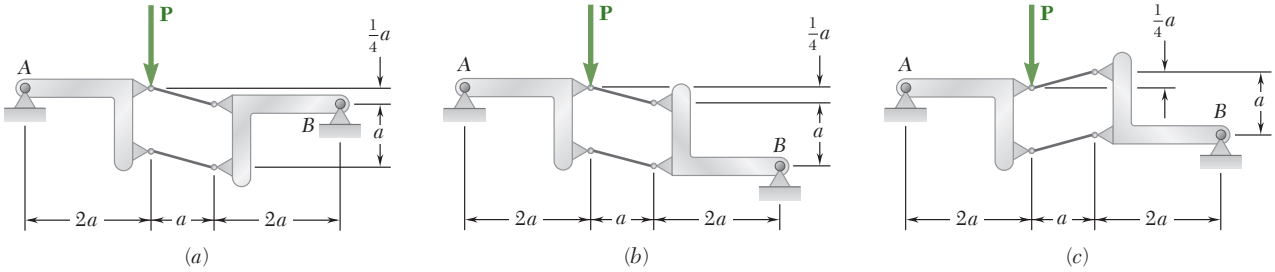


Figura P6.119

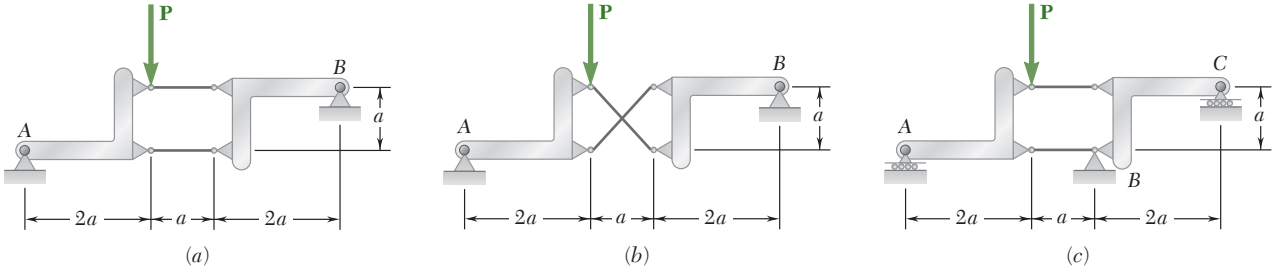


Figura P6.120

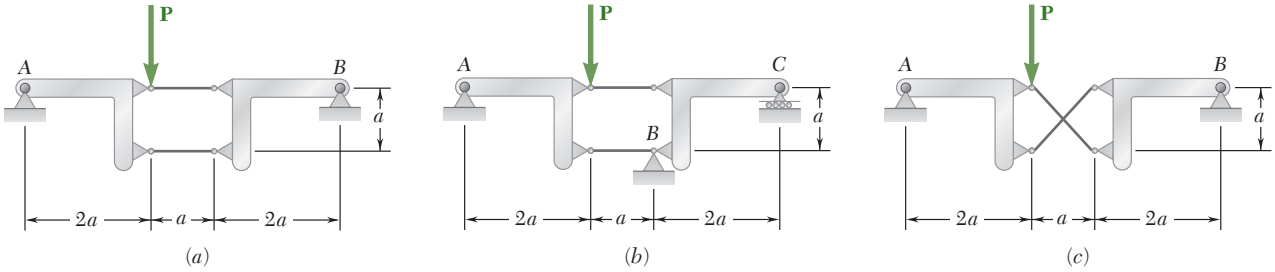


Figura P6.121

6.12 Máquinas

Máquinas são estruturas projetadas para transmitir e modificar forças. Sejam simples ferramentas ou que incluam mecanismos mais complicados, a principal função das máquinas é transformar *forças de entrada* em *forças de saída*. Considere, por exemplo, um alicate de corte usado para cortar um arame (Fig. 6.22*a*). Se aplicarmos duas forças iguais e opostas **P** e −**P** em seus cabos, eles exercerão duas forças iguais e opostas **Q** e −**Q** no arame (Fig. 6.22*b*).

Foto 6.5 A luminária mostrada pode ser colocada em várias posições diferentes. Considerando-se vários corpos livres, a força nas molas e as forças internas nos nós podem ser determinadas

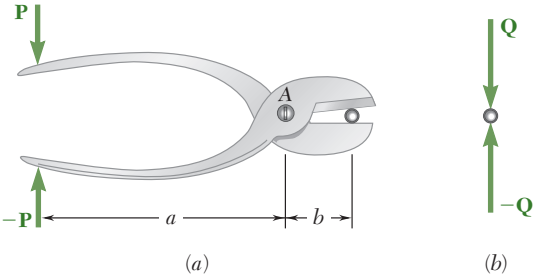


Figura 6.22

Para determinar a intensidade Q das forças de saída quando a intensidade P das forças de entrada é conhecida (ou, inversamente, para determinar P quando Q *é* conhecido), traçamos um diagrama de corpo livre do alicate *sozinho,* mostrando as forças de entrada $\mathbf{P}$ e $-\mathbf{P}$ e as *reações* $-\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}$ que o arame exerce no alicate (Fig. 6.23). No entanto, como o alicate forma uma estrutura não rígida, devemos usar uma de suas partes componentes como um corpo livre com a finalidade de determinar as forças desconhecidas. Considerando a Fig. 6.24*a*, por exemplo, e tomando momentos em relação a A, obtemos a relação $Pa = Qb$, que define a intensidade Q em termos de P, ou P em termos de Q. O mesmo diagrama de corpo livre pode ser usado para se determinar os componentes da força interna em A; encontramos $A_x = 0$ e $A_y = P + Q$.

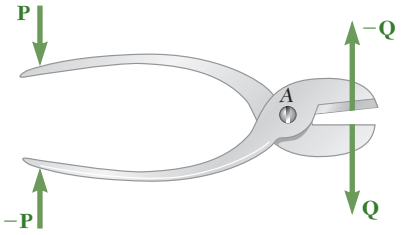


Figura 6.23

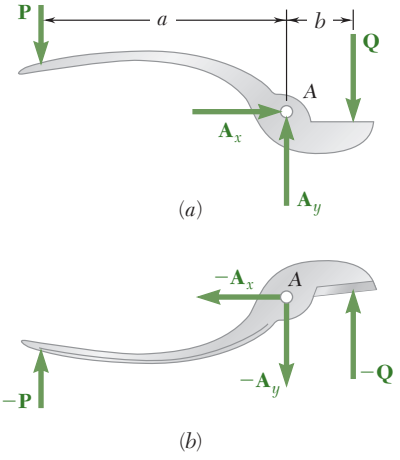
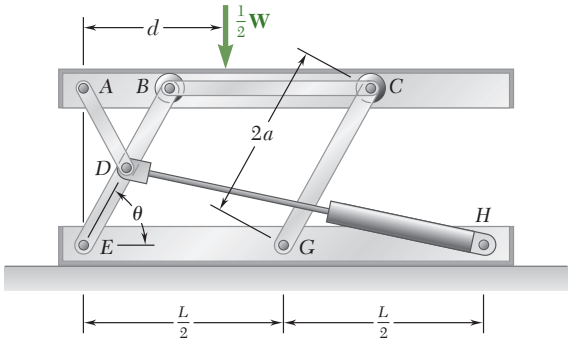


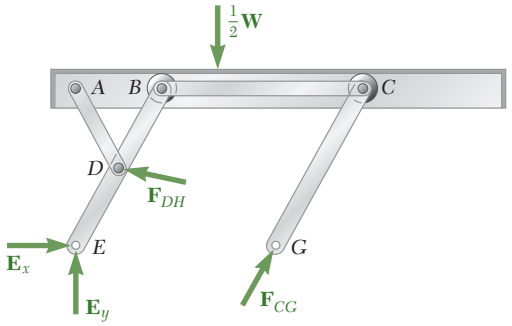
Figura 6.24

No caso de máquinas mais complicadas, geralmente será necessário usar vários diagramas de corpo livre e, possivelmente, resolver equações simultâneas que envolvam várias forças internas. Os corpos livres devem ser escolhidos para que incluam as forças de entrada e as reações às forças de saída, e o número total de componentes de força envolvidos que são desconhecidos não deve exceder o número de equações independentes disponíveis. É aconselhável, antes de tentar resolver um problema, determinar se a estrutura considerada é determinada. Não há motivo, porém, para se discutir a rigidez da máquina, já que uma máquina inclui partes que se movem e, portanto, *deve* ser não rígida.



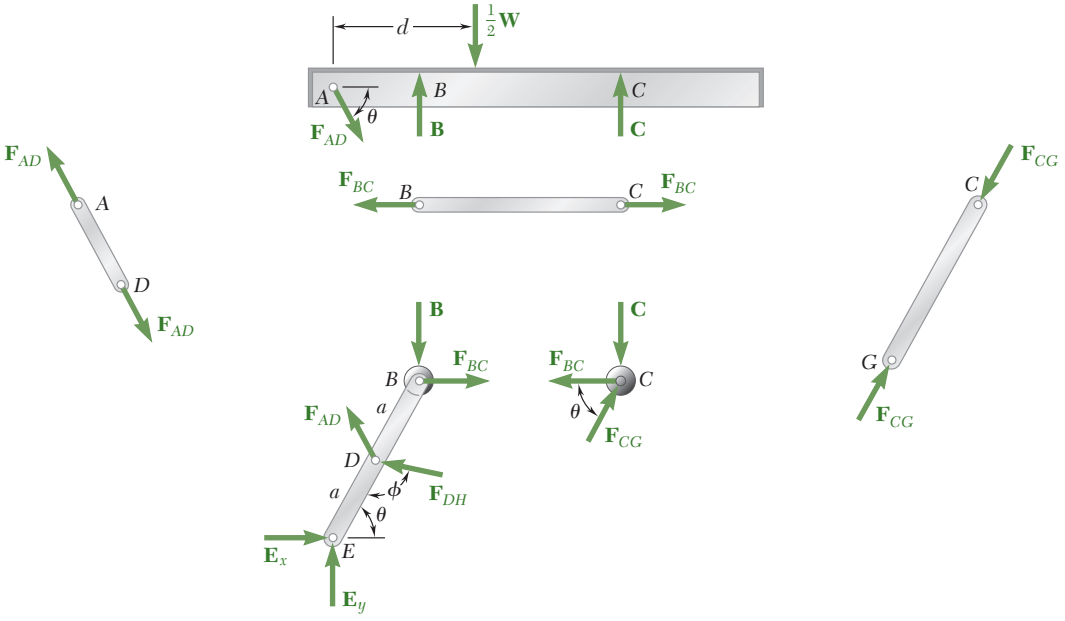
PROBLEMA RESOLVIDO 6.7

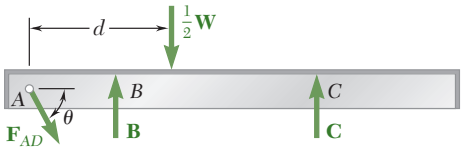
Uma mesa elevatória hidráulica é usada para levantar um caixote de 1.000 kg. A mesa consiste em uma plataforma e dois acoplamentos idênticos, sobre os quais os cilindros hidráulicos exercem forças iguais. (Somente um acoplamento e um cilindro são mostrados na figura.) Os elementos *EDB* e *CG* têm, cada qual, comprimento $2a$, e o elemento *AD* está preso por pino ao ponto médio de *EDB*. Se o caixote é colocado na mesa, de modo que a metade de seu peso é apoiada pelo sistema mostrado na figura, determine a força exercida por cada cilindro no momento de levantar o caixote para $\theta = 60°$, $a = 0{,}70$ m e $L = 3{,}20$ m. Mostre que o resultado obtido é independente da distância d.



SOLUÇÃO

A máquina considerada consiste na plataforma e no aclopamento. Seu diagrama de corpo livre inclui a força $\mathbf{F}_{DH}$ exercida pelo cilindro, o peso $\frac{1}{2}\mathbf{W}$, igual à força de saída e de sentido oposto, e das reações em *E* e *G*, que supomos estarem direcionadas tal como mostra a figura. Como mais de três incógnitas estão envolvidas, esse diagrama não sera usado. O mecanismo é decomposto e um diagrama de corpo livre é traçado para cada uma de suas partes componentes. Observamos que *AD*, *BC* e *CG* são elementos sujeitos a duas forças. Já consideramos que o elemento *CG* está sob compressão. Consideramos agora que *AD* e *BC* estão sobre tração e que as forças exercidas neles são então direcionadas tal como mostra a figura. Vetores iguais e opostos serão usados para representar as forças exercidas pelos elementos sujeitos a duas forças na plataforma, no elemento *BDE* e no rolete *C*.

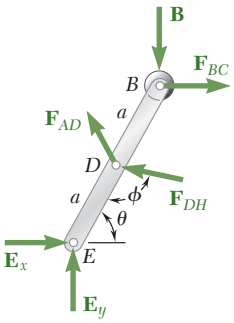




Corpo livre: plataforma *ABC*.

$$\begin{aligned} \stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: &\qquad F_{AD}\cos\theta = 0 &\qquad F_{AD} = 0\\ +\uparrow\Sigma F_y = 0: &\qquad B + C - \tfrac{1}{2}W = 0 &\qquad B + C = \tfrac{1}{2}W \end{aligned} \tag{1}$$

Corpo livre: rolete *C*. Traçamos um triângulo de forças e obtemos $F_{BC} = C\ \text{cotg}\ \theta$.



Corpo livre: elemento *BDE*. Recordando que $F_{AD} = 0$:

$$\begin{aligned} +\circlearrowleft\Sigma M_E = 0: &\qquad F_{DH}\cos(\phi - 90°)a - B(2a\cos\theta) - F_{BC}(2a\,\text{sen}\,\theta) = 0\\ &\qquad F_{DH}a\,\text{sen}\,\phi - B(2a\cos\theta) - (C\ \text{cotg}\,\theta)(2a\,\text{sen}\,\theta) = 0\\ &\qquad F_{DH}\,\text{sen}\,\phi - 2(B + C)\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

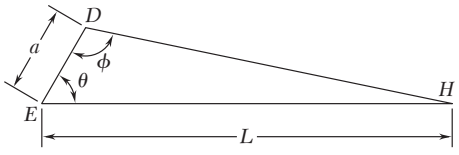
Utilizando a Eq, (1), temos

$$F_{DH} = W\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\phi} \tag{2}$$

e observamos que *o resultado obtido é independente de d*. ◀

Aplicando primeiro a lei dos senos ao trângulo *EDH*, temos:

$$\frac{\text{sen}\,\phi}{EH} = \frac{\text{sen}\,\theta}{DH} \qquad \text{sen}\,\phi = \frac{EH}{DH}\,\text{sen}\,\theta \tag{3}$$



Aplicando agora a lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} (DH)^2 &= a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta\\ &= (0{,}70)^2 + (3{,}20)^2 - 2(0{,}70)(3{,}20)\cos 60°\\ (DH)^2 &= 8{,}49 \qquad DH = 2{,}91\ \text{m} \end{aligned}$$

Observamos também que:

$$W = mg = (1.000\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2) = 9.810\ \text{N} = 9{,}81\ \text{kN}$$

Substituindo sen ϕ de (3) em (2) e usando os dados numéricos, temos:

$$F_{DH} = W\frac{DH}{EH}\,\text{cotg}\,\theta = (9{,}81\ \text{kN})\frac{2{,}91\ \text{m}}{3{,}20\ \text{m}}\,\text{cotg}\ 60°$$

$$F_{DH} = 5{,}15\ \text{kN} \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Esta seção foi dedicada à análise de *máquinas.* Como são projetadas para transmitir ou modificar forças, as máquinas sempre contêm partes móveis. No entanto, as máquinas aqui consideradas vão sempre estar em repouso, e trabalharemos com o conjunto de *forças necessárias para se manter o equilíbrio da máquina.*

Forças conhecidas atuantes sobre a máquina são chamadas *de forças de entrada. Uma máquina transforma as forças de entrada em forças de saída,* tais como as forças de corte aplicadas pelo alicate da Fig. 6.22. Determinemos as forças de saída encontrando as forças iguais e opostas às forças de saída que devem ser aplicadas à máquina para se manter seu equilíbrio.

Na seção anterior, analisamos estruturas; agora adotaremos quase o mesmo procedimento para analisar máquinas:

1. Traçar um diagrama de corpo livre da máquina inteira e usá-lo para determinar tantas forças desconhecidas exercidas sobre a máquina quantas for possível.

2. Decompor a máquina e traçar um diagrama de corpo livre de cada elemento.

3. Considerando primeiro os elementos sujeitos a duas forças, aplicar forças iguais e opostas a cada elemento sujeito a duas forças nos pontos em que eles estão ligados a outro elemento. Se não é possível nesse momento dizer se o elemento está sob tração ou sob compressão, simplesmente *suponhamos* que o elemento está sob tração e *direcione para fora ambas as forças do elemento.* Como essas forças têm a mesma intensidade desconhecida, *dar a ambas o mesmo nome.*

4. Em seguida, considerar os elementos sujeitos à ação de múltiplas forças. Para cada um desses elementos, mostremos todas as forças exercidas no elemento, incluindo cargas e forças aplicadas, reações e forças internas nas conexões.

a. Onde um elemento sujeito à ação de múltiplas forças está ligado a um elemento sujeito à ação de duas forças, apliquemos ao elemento sujeito à ação de múltiplas forças uma força *igual e oposta* à força traçada no diagrama de corpo livre do elemento sujeito à ação de duas forças, *dando-lhe o mesmo nome.*

b. Onde um elemento sujeito à ação de múltiplas forças está ligado a um outro elemento sujeito à ação de múltiplas forças, usemos *componentes verticais e horizontais* para representar as forças internas naquele ponto. Os sentidos escolhidos para cada um dos dois componentes de força exercidos no primeiro elemento sujeito à ação de múltiplas forças são arbitrários, mas *devemos aplicar componentes de força iguais e opostos, de igual nome,* ao outro elemento sujeito à ação de múltiplas forças.

5. Equações de equilíbrio podem ser escritas depois que os vários diagramas de corpo livre forem completados.

a. Para simplificar a solução, devemos, sempre que possível, escrever e resolver equações de equilíbrio que envolvam, cada qual, uma só incógnita.

b. Como você escolheu arbitrariamente o sentido de cada uma das forças desconhecidas, devemos determinar ao final da solução se a sua suposição estava certa. Para fazer isso, *consideremos o sinal* do valor encontrado para cada uma das incógnitas. Um sinal *positivo* indica que sua suposição estava certa; um sinal *negativo* indica que não estava.

6. Finalmente, verificar solução substituindo os resultados obtidos em uma equação de equilíbrio que ainda não foi usada anteriormente.

PROBLEMAS

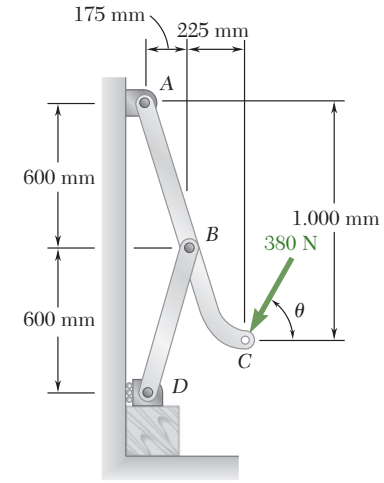


Figura P6.122

6.122 A força de 380 N é aplicada à alavanca da prensa em C. Sabendo que $\theta = 90°$, determine (a) a força vertical exercida no bloco em D, (b) a força exercida no elemento ABC em B.

6.123 Resolva o Problema 6.122 quando $\theta = 0°$.

6.124 A barra de comando CE passa através do mancal horizontal no corpo do sistema de alternância mostrado na figura. Sabendo que a haste de ligação BD tem comprimento de 250 mm, determine a força **Q** necessária para manter o sistema em equilíbrio quando $\beta = 20°$.

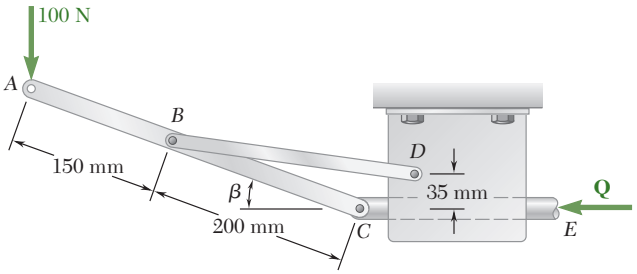


Figura *P6.124*

6.125 Resolva o Problema 6.124 quando (a) $\beta = 0°$, (b) $\beta = 6°$.

6.126 A prensa mostrada na figura é usada para gravar um pequeno selo em E. Sabendo que $P = 250$ N, determine (a) o componente vertical da força exercida sobre o selo, (b) a reação em A.

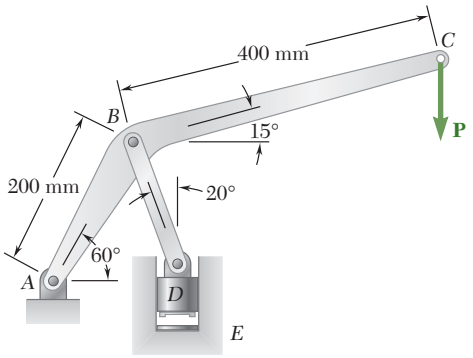


Figura P6.126 e P6.127

6.127 A prensa mostrada na figura é usada para gravar um pequeno selo em E. Sabendo que o componente vertical da força exercida sobre o selo deve ser 900 N, determine (a) a força vertical necessária **P**, (b) a reação correspondente em A.

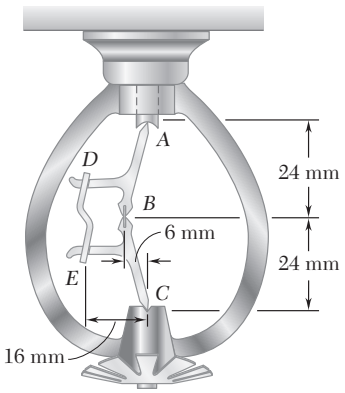


Figura P6.128

6.128 A pressão da água no sistema de prevenção a incêndio exerce uma força para baixo de 135 N no bujão vertical em A. Determine a tração na haste do fusível DE e a força exercida no elemento BCE em B.

6.129 Um binário **M** de intensidade 1,5 kN · m é aplicado na manivela do sistema de motor mostrado na figura. Para cada uma das duas posições mostradas, determine a força **P** necessária para manter o sistema em equilíbrio.

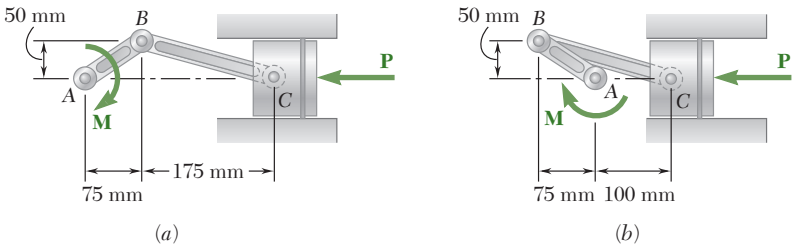


Figura P6.129 e P6.130

6.130 Uma força **P** de intensidade 16 kN é aplicada no pistão do motor mostrado na figura. Para cada uma das duas posições mostradas, determine o binário **M** necessário para manter o sistema em equilíbrio.

6.131 O pino em *B* é fixado ao elemento *ABC* e pode deslizar livremente ao longo do rasgo aberto na placa fixa. Desconsiderando o efeito do atrito, determine o binário **M** necessário para manter o sistema em equilíbrio quando $\theta = 30°$.

6.132 O pino em *B* é fixado ao elemento *ABC* e pode deslizar livremente ao longo do rasgo aberto na placa fixa. Desconsiderando o efeito do atrito, determine o binário **M** necessário para manter o sistema em equilíbrio quando $\theta = 60°$.

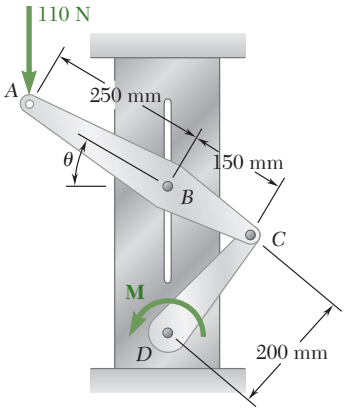


Figura P6.131 e P6.132

6.133 O braço *ABC* está ligado por pinos ao colar em *B* e à manivela *CD* em *C*. Desprezando o efeito do atrito, determine o binário **M** necessário para manter o sistema em equilíbrio quando $\theta = 0°$.

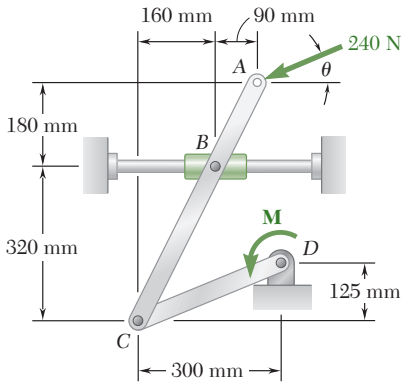


Figura P6.133 e P6.134

6.134 O braço *ABC* está ligado por pinos ao colar em *B* e à manivela *CD* em *C*. Desprezando o efeito do atrito, determine o binário **M** necessário para manter o sistema em equilíbrio quando $\theta = 90°$.

6.135 e 6.136 Duas hastes estão ligadas por um bloco deslizante como mostra a figura. Desprezando o efeito do atrito, determine o binário $\mathbf{M}_A$ necessário para manter o sistema em equilíbrio.

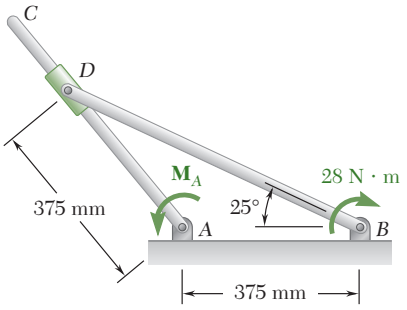


Figura *P6.135*

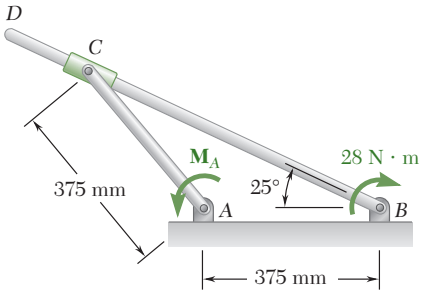


Figura *P6.136*

6.137 e 6.138 A haste *CD* está presa ao colar *D* e passa por um colar soldado na extremidade *B* da alavanca *AB*. Desprezando o efeito do atrito, determine o binário **M** necessário para manter o sistema em equilíbrio quando $\theta = 30°$.

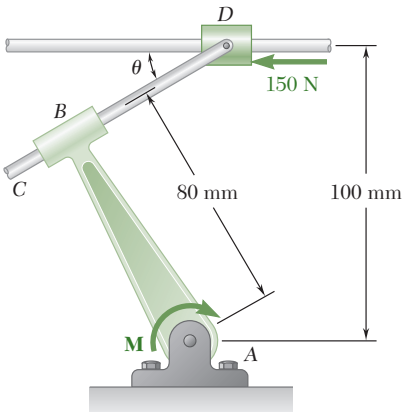


Figura P6.138

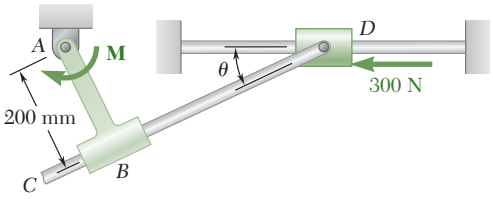


Figura P6.137

6.139 Dois cilindros hidráulicos controlam a posição do braço robótico *ABC*. Sabendo que na posição mostrada os cilindros estão paralelos, determine a força exercida em cada cilindro quando $P = 160$ N e $Q = 80$ N.

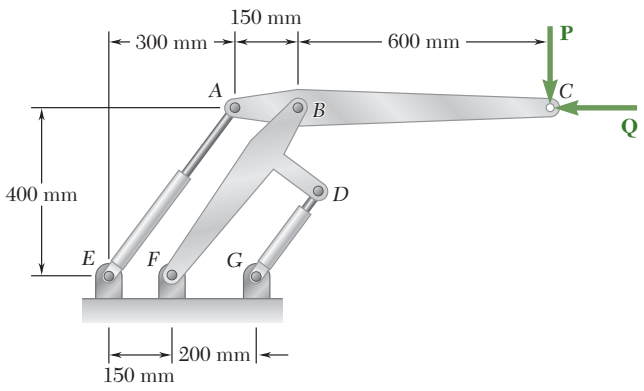


Figura P6.139 e P6.140

6.140 Dois cilindros hidráulicos controlam a posição do braço robótico *ABC*. Na posição mostrada na figura os cilindros estão paralelos e ambos em tração. Sabendo que $F_{AE} = 600$ N e $F_{DG} = 50$ N, determine as forças **P** e **Q** aplicadas em *C* para o braço *ABC*.

6.141 Uma tora de madeira pesando 3.600 N é por uma tenaz como mostrado na figura. Determine as forças exercidas em *E* e *F* na garra *DEF*.

6.142 Um trilho de ferrovia de comprimento 12 m e peso 650 N/m é elevado pela tenaz mostrada na figura. Determine as forças exercidas em *D* e *F* na garra *BDF*.

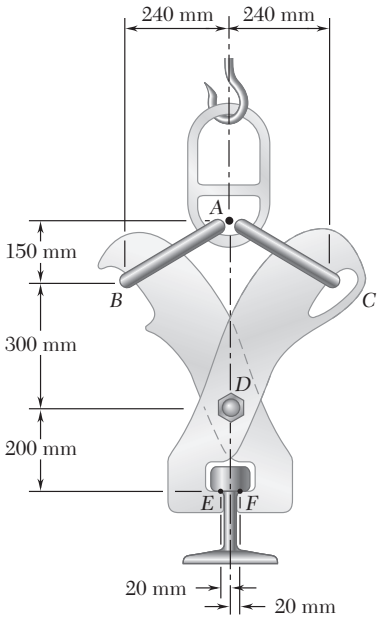


Figura P6.142

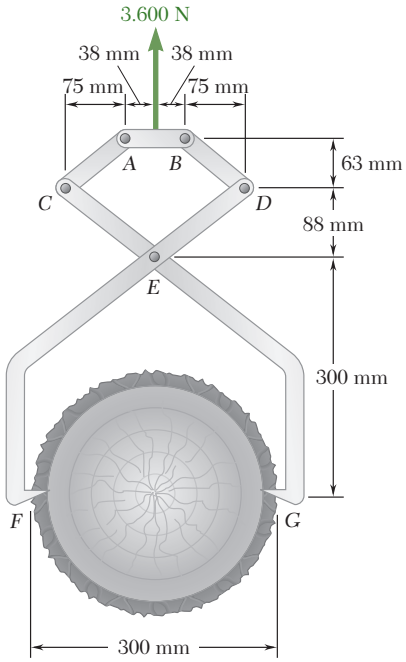


Figura P6.141

6.143 A tenaz mostrada na figura é usada para aplicar um força total para cima de 45 kN no tampão da tubulação. Determine as forças exercidas em *D* e *F* na garra *ADF*.

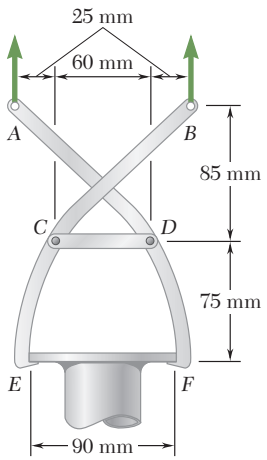


Figura P6.143

6.144 Se a chave mostrada é adicionada à tenaz do Problema 6.143 e uma força vertical única é aplicada em *G*, determine as forças exercidas em *D* e *F* na garra *ADF*.

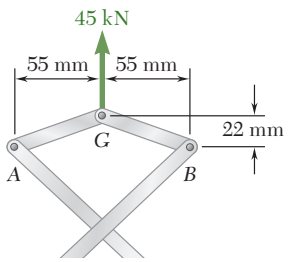


Figura P6.144

6.145 O alicate mostrado na figura é usado para apertar uma haste de diâmetro 7,5 mm. Sabendo que duas forças de 270 N são aplicadas nos cabos, determine (*a*) a intensidade das forças exercidas na haste, (*b*) a força exercida pelo pino em *A* na parte *AB* do alicate.

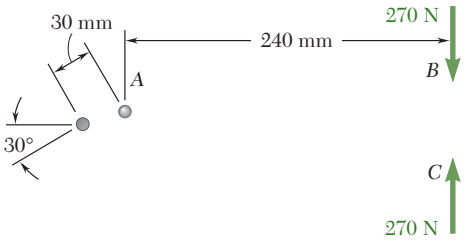


Figura P6.145

6.146 Ao usar o cortador de parafusos mostrado na figura, um operário aplica duas forças de 300 N aos cabos da ferramenta. Determine a intensidade das forças exercidas pelo cortador no parafuso.

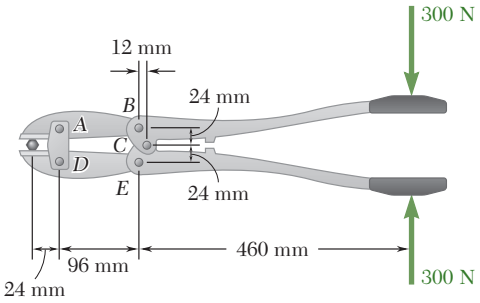


Figura P6.146

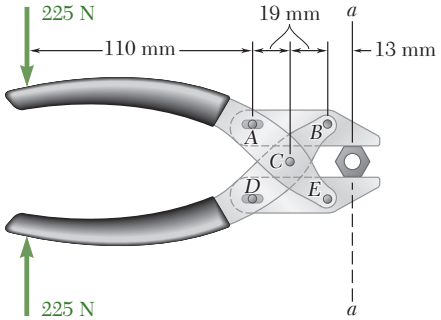


Figura *P6.147*

6.147 Determine a intensidade das forças de aperto exercidas ao longo da linha *aa* sobre a porca quando se aplicam duas forças de 225 N nos cabos da ferramenta, tal como mostra a figura. Suponha que os pinos *A* e *D* deslizem livremente em rasgos abertos na mandíbula.

6.148 Determine a intensidade das forças de aperto produzidas quando duas forças de 300 N são aplicadas tal como mostra a figura.

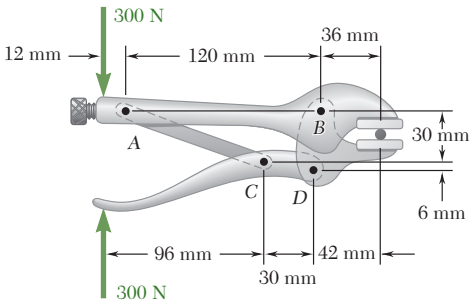


Figura P6.148

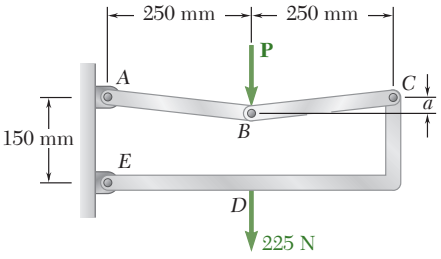


Figura P6.149 e P6.150

6.149 Sabendo que a estrutura mostrada na figura tem um fio em *B* de $a = 25$ mm, determine a força **P** necessária para manter o equilíbrio na posição mostrada.

6.150 Sabendo que a estrutura mostrada na figura tem um fio em *B* de $a = 13$ mm, determine a força **P** necessária para manter o equilíbrio na posição mostrada.

6.151 A tesoura para poda mostrada na figura consiste em duas lâminas e dois cabos. Os dois cabos da ferramenta estão ligados pelo pino *C*, e as duas lâminas estão ligadas pelo pino *D*. A lâmina da esquerda e a da direita estão ligadas pelo pino *A*; a lâmina da direita e a da esquerda estão ligadas pelo pino *B*. Determine a intensidade das forças exercidas sobre o pequeno galho *E* quando duas forças de 80 N são aplicadas nos cabos da ferramenta como mostra a figura.

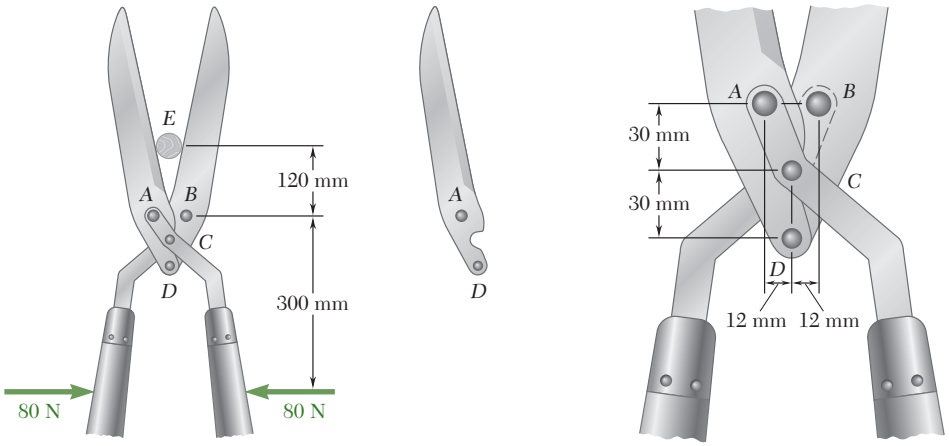


Figura P6.151

6.152 O braço regulável *ABC* é usado para movimentar uma plataforma de elevação para operários de construção. Juntos, os operários e a plataforma têm uma massa de 200 kg e um centro de gravidade combinado localizado diretamente acima de *C*. Para a posição, quando $\theta = 20°$, determine (*a*) a força exercida em *B* pelo cilindro hidráulico simples *BD*, (*b*) a força exercida na base do equipamento em *A*.

6.153 O braço regulável *ABC* pode ser abaixado até que a extremidade *C* esteja perto do chão, de modo que os operários possam embarcar facilmente na plataforma. Para a posição, quando $\theta = -20°$, determine (*a*) a força exercida em *B* pelo cilindro hidráulico simples *BD*, (*b*) a força exercida na base do equipamento em *A*.

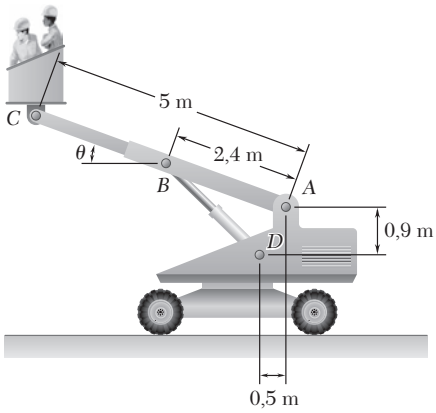


Figura *P6.152* e *P6.153*

6.154 A posição do elemento *ABC* é controlada pelo cilindro hidráulico *CD*. Sabendo que $\theta = 30°$, determine para o carregamento mostrado (*a*) a força exercida pelo cilindro hidráulico no pino, (*b*) a reação em *B*.

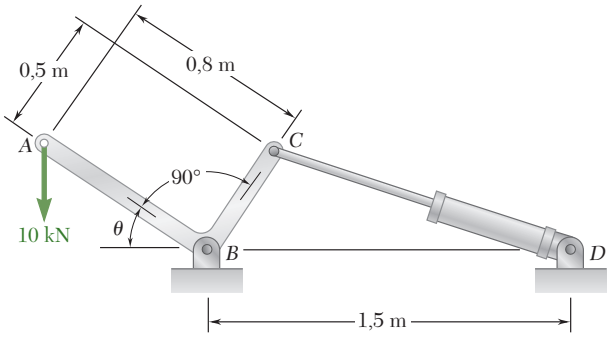


Figura P6.154

6.155 O movimento da pá carregadeira do trator de carregador frontal mostrado na figura é controlado por dois braços e um acoplamento unidos por pinos em *D*. Os braços estão localizados simetricamente em relação aos planos central, vertical e longitudinal do carregador; um braço *AFJ* e seu cilindro de controle *EF* são mostrados. O acoplamento simples *GHDB* e seu cilindro de controle *BC* estão localizados no plano de simetria. Para a posição e carregamento mostrados, determine a força exercida (*a*) pelo cilindro *BC*, (*b*) pelo cilindro *EF*.

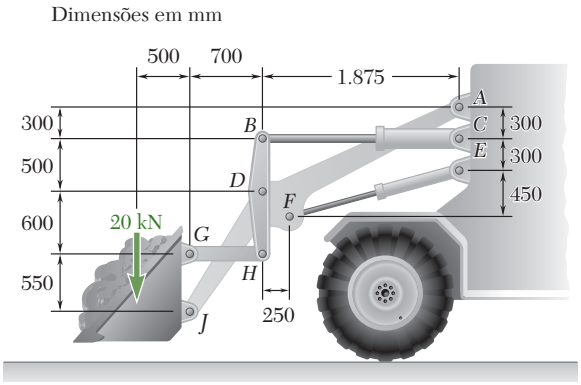


Figura P6.155

6.156 A pá carregadeira do trator de carregador frontal mostrado na figura sustenta uma carga de 14,5 kN. O movimento da caçamba é controlado por dois mecanismos idênticos, dos quais apenas um é mostrado. Sabendo que o mecanismo mostrado sustenta metade da carga de 14,5 kN, determine a força exercida (*a*) pelo cilindro *CD*, (*b*) pelo cilindro *FH*.

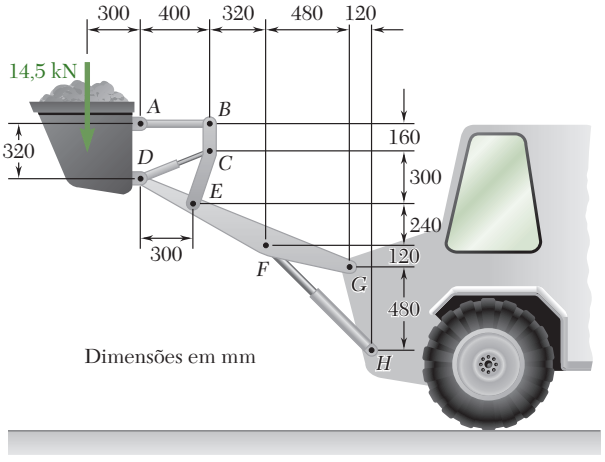


Figura P6.156

6.157 O movimento da pá carregadeira da retroescavadeira mostrada na figura é controlado pelos cilindros hidráulicos *AD*, *CG*, e *EF*. Para cada tentativa de retirar uma parte do calçamento, uma força **P** de 9 kN é exercida no dente da pá carregadeira em *J*. Sabendo que $\theta = 45°$, determine a força exercida em cada cilindro.

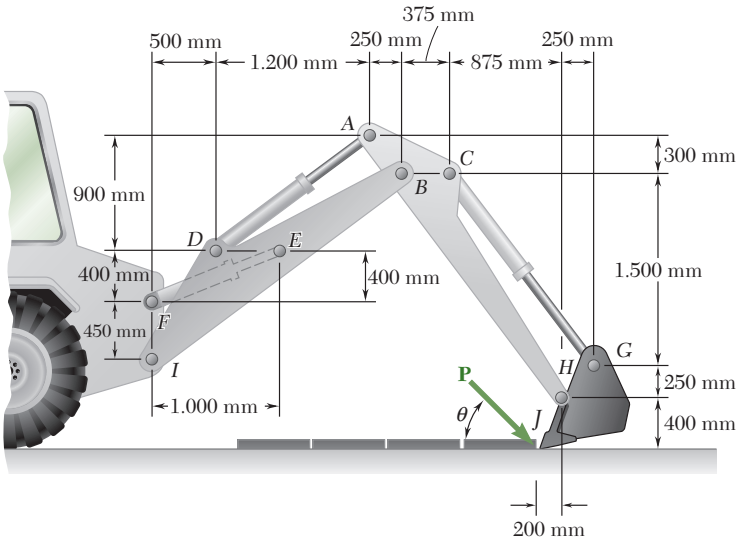


Figura P6.157

6.158 Resolva o Problema 6.157 considerando que a força **P** de 9 kN atua horizontalmente para a direita $\theta = 45°$.

6.159 As engrenagens *D* e *G* estão rigidamente presas a eixos que são apoiados por mancais sem atrito. Se $r_D = 90$ mm e $r_C = 30$ mm, determine (*a*) o binário $\mathbf{M}_0$ que deve ser aplicado para manter o equilíbrio, (*b*) as reações em *A* e *B*.

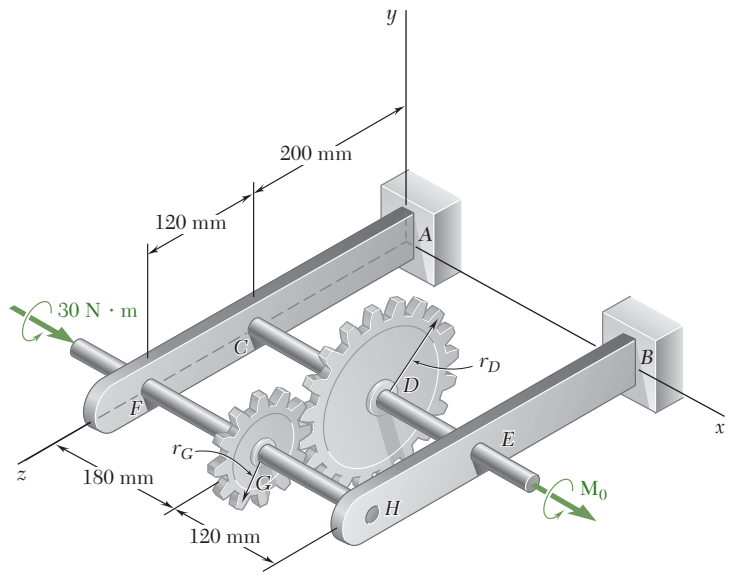


Figura P6.159

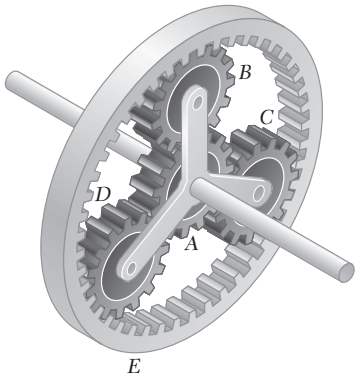


Figura P6.160

6.160 No sistema de engrenagem planetária mostrado na figura, o raio da engrenagem central A é $a = 18$ mm, o raio das engrenagens planetárias é b e o raio da engrenagem externa E é $(a + 2b)$. Um binário no sentido horário de intensidade $M_A = 10$ N · m é aplicado sobre a engrenagem central A, e um binário no sentido anti-horário de intensidade $M_S = 50$ N · m é aplicado sobre o suporte BCD. Se o sistema estiver em equilíbrio, determine (a) o raio b necessário para as engrenagens planetárias, (b) o binário M_E que deve ser aplicado sobre a engrenagem externa E.

***6.161** Dois eixos AC e CF, que estão no plano vertical xy, estão acoplados por uma junta universal em C. Os mancais em B e D não exercem nenhuma força axial. Um binário de intensidade 50 N · m (no sentido horário quando visto a partir do eixo x positivo) é aplicado ao eixo CF em F. Em um dado instante, quando o braço da cruzeta preso ao eixo CF é horizontal, determine (a) a intensidade do binário que deve ser aplicado ao eixo AC em A para se manter equilíbrio, (b) as reações em B, D e E. (*Dica:* a soma dos binários exercidos sobre a cruzeta deve ser zero.)

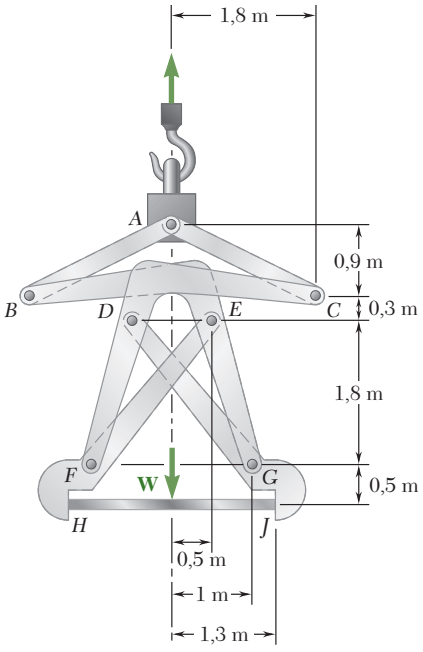


Figura P6.163

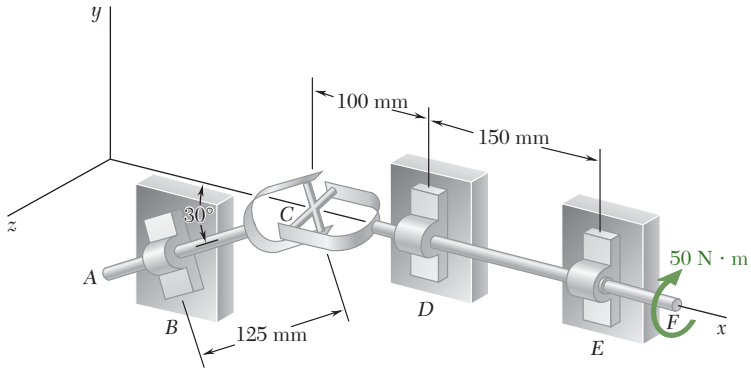


Figura P6.161

***6.162** Resolva o Problema 6.161 considerando que o braço da cruzeta presa ao eixo CF é vertical.

***6.163** A grande tenaz mecânica mostrada na figura é usada para agarrar e erguer uma placa grossa de aço HJ de 7.500 kg. Sabendo que não ocorre escorregamento entre as garras da tenaz e a placa em H e J, determine os componentes de todas as forças exercidas sobre o elemento EFH. (*Dica:* considere a simetria das garras para estabelecer as relações entre os componentes da força exercidos em E sobre EFH e os componentes da força exercidos em D sobre CDF.)

REVISÃO E RESUMO

Neste capítulo aprendemos a determinar as *forças internas* que mantêm unidas as várias partes de uma estrutura.

Análise das treliças

A primeira metade do capítulo foi dedicada à análise de *treliças*, isto é, à análise de estruturas que consistem em *elementos retos unidos somente em suas extremidades*. Sendo os elementos delgados e incapazes de suportar cargas laterais, todas as cargas devem ser aplicadas nos nós; pode-se então supor que uma treliça consiste em *pinos e elementos sujeitos à ação de duas forças* [Seção 6.2].

Treliça simples

Diz-se que uma treliça *é rígida* se ela for projetada de tal modo que não será muito deformada ou não entrará em colapso devido a uma pequena carga. Uma treliça triangular de três elementos unidos em três nós é, com certeza, uma treliça rígida (Fig. 6.25*a*), e assim será a treliça obtida adicionando-se dois novos elementos a essa primeira treliça e ligando-os a um novo nó (Fig. 6.25*b*). As treliças obtidas repetindo-se esse processo são chamadas de *treliças simples*. Podemos verificar que em uma treliça simples o número total de elementos é $m = 2n - 3$, sendo n o número total de nós [Seção 6.3].

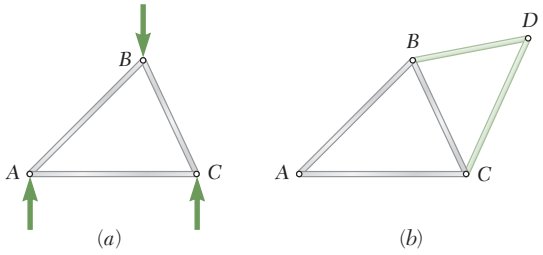


Figura 6.25

Método dos nós

As forças nos vários elementos de uma treliça simples podem ser determinadas pelo *método dos nós* [Seção 6.4]. Primeiro, as reações nos apoios podem ser obtidas considerando-se a treliça inteira como um corpo livre. Depois, traça-se o diagrama de corpo livre de cada pino, mostrando as forças exercidas sobre ele pelos elementos ou apoios conectados. Como os elementos são elementos retos sujeitos à ação de duas forças, a força exercida por um elemento sobre o pino é direcionada ao longo deste elemento, e somente a intensidade da força é desconhecida. Sempre é possível, no caso de uma treliça simples, traçar os diagramas de corpo livre dos pinos em uma tal ordem que somente duas forças desconhecidas sejam incluídas em cada diagrama. Essas forças podem ser obtidas das duas equações de equilíbrio correspondentes ou – se somente três forças estão envolvidas – do triângulo de força correspondente. Se a força exercida por um elemento sobre um pino é direcionada para o pino, o elemento está sob *compressão;* se está direcionada para fora do pino, o elemento está sob *tração* [Problema Resolvido 6.1]. A análise de uma treliça é às vezes, agilizada se primeiro reconhecermos *nós em condições especiais de carregamento* [Seção 6.5]. O método de nós pode também ser estendido à análise de *treliças espaciais* ou tridimensionais [Seção 6.6].

Método das seções

O *método das seções* é geralmente preferido ao método dos nós quando se deseja a força em um único elemento – ou em muitos poucos elementos – da treliça é desejado [Seção 6.7]. Para determinar a força no elemento *BD* da treliça da Fig.6.26*a*, por exemplo, *definimos uma seção passando* pelos elementos *BD, BE* e *CE,* removemos esses elementos e usamos a parte *ABC* da treliça como um corpo livre (Fig. 6.26*b*). Escrevendo $\Sigma M_E = 0$, determinamos a intensidade da força $\mathbf{F}_{BD}$, que representa a força no elemento *BD.* Um sinal positivo indica que o elemento está sob *tração;* um sinal negativo indica que ele está sob *compressão* [Problemas Resolvidos 6.2 e 6.3].

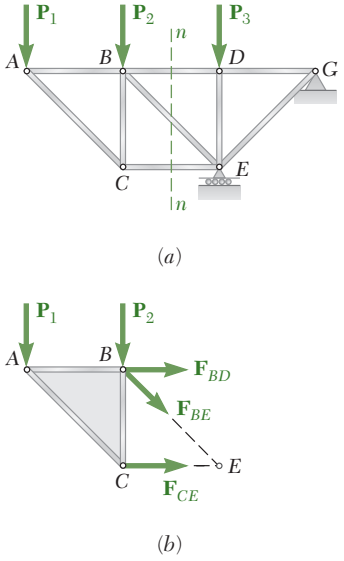


Figura 6.26

Treliças compostas

O método das seções é particularmente útil na análise de *treliças compostas,* ou seja, treliças que não podem ser construídas a partir da treliça triangular básica da Fig. 6.25*a*, mas que podem ser obtidas ligando-se firmemente a várias treliças simples [Seção 6.8]. Se as treliças componentes foram adequadamente unidas (por exemplo, um pino e uma haste de conexão, ou três hastes não concorrentes e não paralelas) e se a estrutura resultante está adequadamente apoiada (por exemplo, um pino e um rolete), a treliça composta é *estaticamente determinada, rígida e completamente vinculada.* É, então, satisfeita a seguinte condição necessária, mas não suficiente: $m + r = 2n$, sendo m o número de elementos, r o número de incógnitas representando as reações nos apoios e n o número de nós.

Estruturas e máquinas

A segunda parte do capítulo foi dedicada à análise de *estruturas e máquinas.* Estruturas e máquinas são conjuntos que contêm *elementos sujeitos à ação de múltiplas forças,* ou seja, elementos sobre os quais atuam três ou mais forças. As estruturas são projetadas para sustentar cargas e geralmente são estacionárias e completamente vinculadas. Máquinas são projetadas para transmitir ou modificar forças e sempre contêm partes móveis [Seção 6.9].

Análise de uma estrutura

Para *analisar uma estrutura,* primeiro consideramos a *estrutura inteira como um corpo livre* e escrevemos três equações de equilíbrio [Seção 6.10]. Se a estrutura permanece rígida quando separada de seus apoios, as reações envolvem somente três incógnitas e podem ser determinadas a partir dessas equações [Problemas Resolvidos 6.4 e 6.5]. Por outro lado, se a estrutura deixar de ser rígida quando separada de seus apoios, as reações envolvem mais de três incógnitas e não podem ser completamente determinadas pelas equações de equilíbrio da estrutura [Seção 6.11; Problema Resolvido 6.6].

Elementos sujeitos à ação de múltiplas forças

Decompomos, então, *a estrutura* e identificamos os vários elementos, seja como elementos sujeitos à ação de duas forças, seja como elementos sujeitos à ação de múltiplas forças; supõe-se que os pinos formem uma parte inteira de um dos elementos que eles unem. Traçamos o diagrama de corpo livre de cada um dos elementos sujeitos à ação de múltiplas forças, observando que, quando dois elementos sujeitos à ação de múltiplas forças são unidos ao mesmo elemento sujeito à ação de duas forças, esse elemento atua neles com *forças iguais e opostas de intensidade desconhecida, mas direção conhecida.* Quando dois elementos sujeitos à ação de múltiplas forças são unidos por um pino, eles exercem um sobre o outro *forças iguais e opostas de direção desconhecida,* que devem ser representadas por *dois componentes desconhecidos.* As equações de equilíbrio obtidas dos diagramas de corpo livre dos elementos sujeitos à ação de múltiplas forças podem então ser resolvidas para as várias forças internas [Problemas Resolvidos 6.4 e 6.5]. As equações de equilíbrio podem também ser usadas para completar a determinação das reações nos apoios [Problema Resolvido 6.6]. Na verdade, se a estrutura é *estaticamente determinada e rígida,* os diagramas de corpo livre dos elementos sujeitos a múltiplas forças podem nos dar tantas equações quantos forças desconhecidas existirem (incluindo as reações) [Seção 6.11]. No entanto, como sugerimos anteriormente, é aconselhável primeiro considerar o diagrama de corpo livre da estrutura inteira para reduzir o número de equações que devem ser resolvidas simultaneamente.

Análise de uma máquina

Para *analisar uma máquina,* decompomos a mesma e, seguindo o mesmo procedimento que se adota para uma estrutura, traçamos o diagrama de corpo livre de cada elemento sujeito à ação de múltiplas forças. As equações de equilíbrio correspondentes produzem as *forças de saída* exercidas pela máquina em termos das *forças de entrada* nela aplicadas, assim como as *forças internas* nas várias conexões [Seção 6.12; Problema Resolvido 6.7].

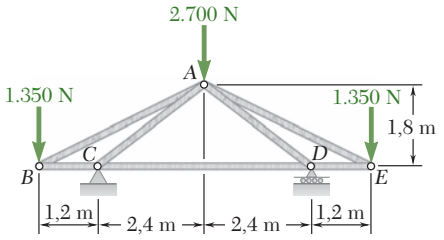


Figura P6.164

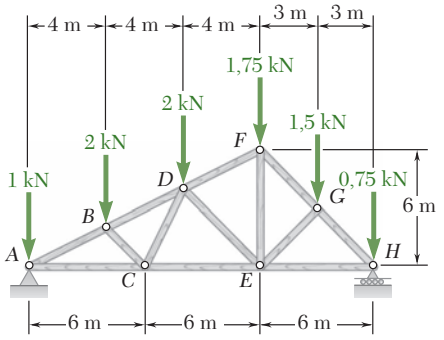


Figura *P6.165*

6.164 Usando o método dos nós, determine a força em cada elemento da treliça mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

6.165 Usando o método dos nós, determine a força em cada elemento da treliça de telhado de passo duplo mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

6.166 A treliça mostrada na figura foi projetada para suportar um telhado de um super mercado. Para o carregamento dado, determine a força no elemento *FG*, *EG* e *EH*.

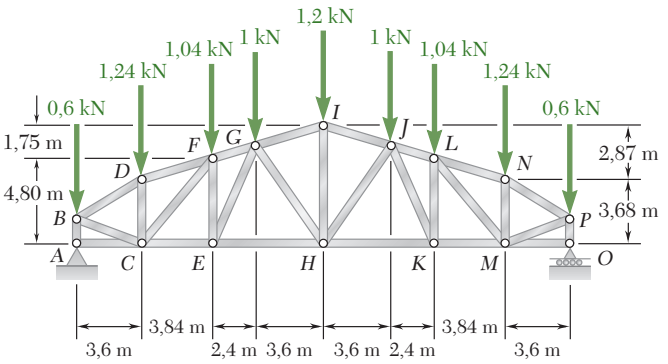


Figura P6.166 e P6.167

6.167 A treliça mostrada na figura foi projetada para suportar um telhado de um super mercado. Para o carregamento dado, determine a força no elemento *KM*, *LM* e *LN*.

6.168 Para a estrutura e carregamento mostrados na figura, determine os componentes de todas as forças atuando no elemento *ABC*.

6.169 Resolva o Problema 6.168 considerando que a carga de 90 kN é substituída por um binário no sentido horário de intensidade 135 kN · m aplicado no elemento *EDC* no ponto *D*.

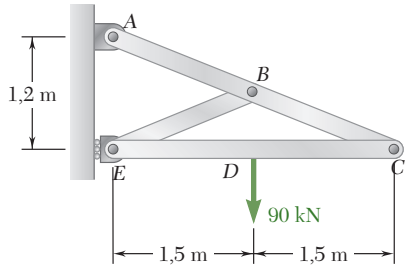


Figura P6.168

6.170 Sabendo que a polia tem um raio de 0,5 m, determine os componentes das reações em *A* e *E*.

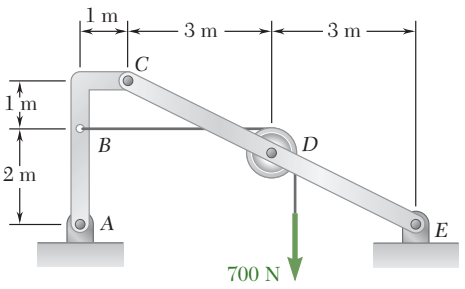


Figura P6.170

6.171 Para a estrutura e o carregamento mostrados na figura, determine as reações em *A*, *B*, *D* e *E*, Considere que na superfície de cada apoio não há atrito.

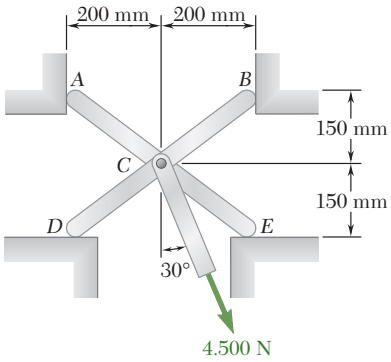


Figura P6.171

6.172 Para o sistema e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a força **P** necessária para equilíbrio, (*b*) a força correspondente no elemento *BD* (*c*) a reação correspondente em *C*.

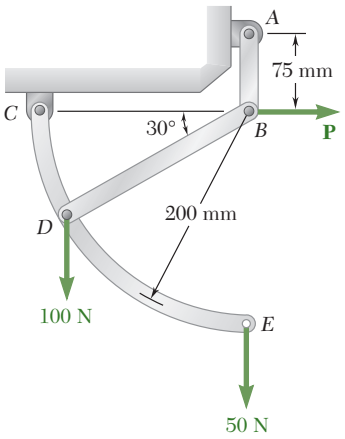


Figura P6.172

6.173 Um pequeno barril com peso de 240 N é erguido por um par de garras tal como mostra a figura. Sabendo que $a = 125$ mm, determine as forças exercidas em *B* e *D* na garra *ABD*.

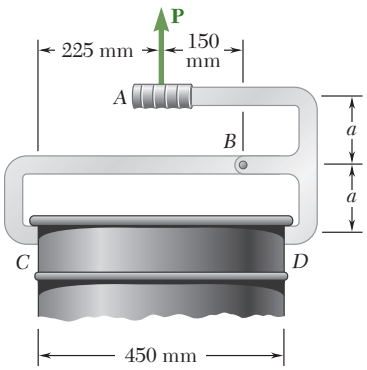


Figura P6.173

6.174 Uma prateleira de 20 kg é mantida na horizontal por uma mão francesa dobrável que consiste em duas partes *EDC* e *CDB* articuladas em *C* e apoiadas uma contra a outra em *D*. Determine a força **P** necessária para se soltar esse suporte.

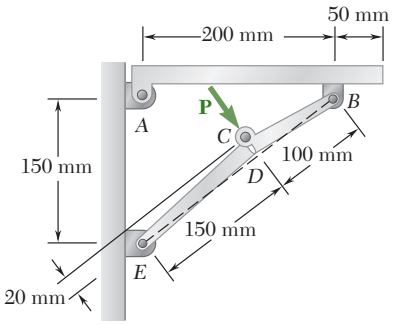


Figura P6.174

6.175 A chave inglesa especial para encanadores mostrada na figura é utilizada em espaços exíguos (por exemplo, sob um lavatório ou pia). Consiste essencialmente em um mordente *BC* articulado em *B* a uma haste longa. Sabendo que as forças exercidas sobre a porca são equivalentes a um binário no sentido horário (quando visto de cima) de momento 13,5 N · m, determine (*a*) a intensidade da força exercida pelo pino *B* no mordente *BC*, (*b*) o binário $\mathbf{M_0}$ aplicado à chave.

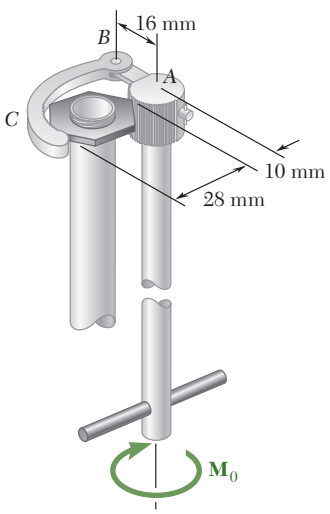


Figura P6.175

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

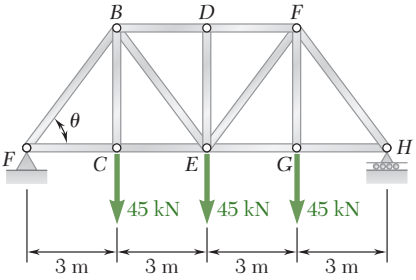


Figura P6.C1

6.C1 A treliça de aço Pratt foi projetada para sustentar três cargas de 45 kN como mostra a figura. O comprimento da treliça é 12 m. A altura da treliça e, portanto, do ângulo θ, bem como as seções transversais dos vários elementos devem ser selecionadas para que obtenhamos o projeto mais econômico. Especificamente, a área da seção transversal de cada elemento foi escolhida tal que a tensão (força dividida pela área) no elemento seja igual a 140 N/mm^2, a tensão admissível para o aço usado, o peso total do aço, além de seu custo, devem ser o menor possível. (*a*) Sabendo que o peso específico do aço usado é 78.000 N/m^3 e usando um aplicativo computacional calcular o peso da treliça e a área da seção transversal de cada elemento que sustente uma carga localizado à esquerda de *DE* para valores de θ entre 20º e 80º, usando incrementos de 5º, (*b*) Usando os menores incrementos apropriados, determine o valor ótimo de θ e o correspondente valor do peso da treliça e as áreas das seções transversais dos vários elementos. Desconsidere o peso de qualquer elemento de força nula nos seus cálculos.

6.C2 O pavimento de uma ponte repousa sobre longarinas que são simplesmente apoiadas por vigas transversais, como na Fig. 6.3. As extremidades das vigas estão unidas aos nós superiores de duas treliças, uma das quais é mostrada na Fig. P6.C2. Como parte do projeto da ponte, deseja-se simular o efeito sobre essa treliça da passagem de um caminhão de 12 kN sobre a ponte. Sabendo que a distância entre os eixos do caminhão é $b = 2{,}25$ m e supondo que o peso do caminhão está distribuído igualmente sobre suas quatro rodas, use um programa de computador para calcular as forças criadas pelo caminhão nos elementos *BH* e *GH* para valores de *x* variando de 0 até 17,25 m, usando incrementos de 0,75 m. Dos resultados obtidos, determine (*a*) a força máxima de tração em *BH*, (*b*) a força máxima de compressão em *BH*, (*c*) a força máxima de tração em *GH*. Indique em cada caso o valor correspondente de *x*. (*Nota:* os incrementos devem ser selecionados tal que os valores desejados estejam entre aqueles que você irá tabular.)

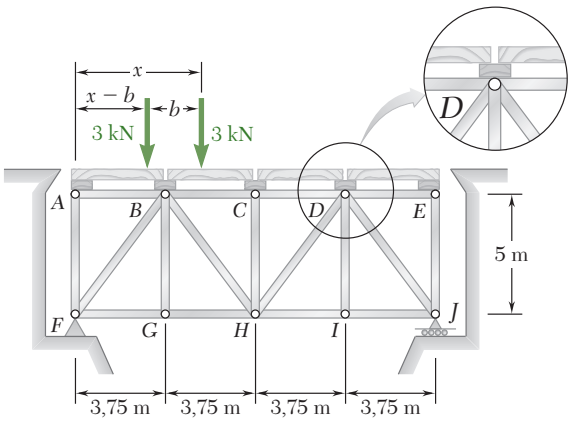


Figura P6.C2

6.C3 No mecanismo mostrado, a posição da lança *AC* é controlada pelo braço *BD*. Para o carregamento mostrado na figura e usando um programa de computador, determine o binário **M** necessário para se manter o sistema em equilíbrio para valores de θ entre $-30°$ até 90°, usando incremento de 10°. Também, para os mesmos valores de θ, determine a reação em *A*. Como parte do processo de projetar o mecanismo, use os menores incrementos apropriados e determine (*a*) o valor de θ para o qual *M* é máximo e o valor correspondente de *M*, (*b*) o valor de θ para o qual a reação em *A* é máxima e a intensidade correspondente a dessa reação.

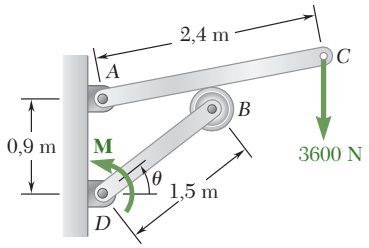


Figura P6.C3

6.C4 O projeto de um sistema robótico necessita do mecanismo de duas barras mostrado na figura. As barras *AC* e *BD* são unidas pelo bloco deslizante *D* tal como mostra a figura. Desprezando o efeito do atrito e usando um programa de computador calcule o binário $\boldsymbol{M}_A$ necessário para se manterem as barras em equilíbrio para valores de θ de 0 a 120° usando incrementos de 10°. Para os mesmos valores de θ, determine a intensidade da força **F** exercida pela barra *AC* no bloco deslizante.

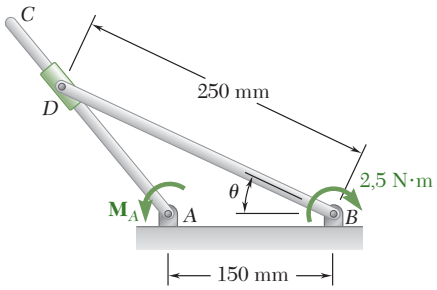


Figura P6.C4

6.C5 A alavanca composta da tesoura de podar mostrada na figura pode ser ajustada colocando-se o pino A em várias posições dentadas na lâmina *ACE*. Sabendo que o comprimento *AB* é 21 mm e usando um programa de computador, determine a intensidade das forças verticais aplicadas no pequeno galho para valores de *d* entre 10 mm e 15 mm usando incremento de 0,5 mm. Como parte do projeto da tesoura, use o menor incremento apropriado e determine o menor valor admissível de *d* se a força na haste *AB* não pode exceder 2.250 N.

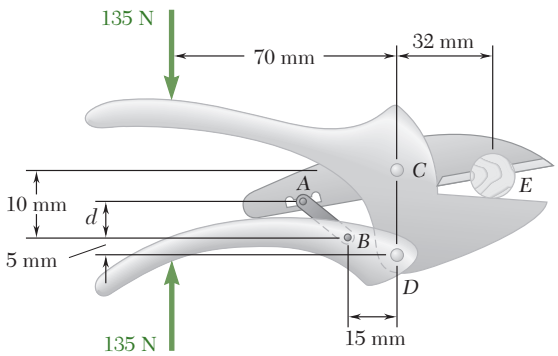


Figura P6.C5

6.C6 A barra *CD* está presa ao colar *D* e passa por um colar soldado à extremidade *B* da alavanca *AB*. Como um passo inicial no projeto da alavanca *AB*, use um programa de computador para calcular a intensidade *M* do binário necessário para se manter o sistema em equilíbrio para valores de θ entre 15° e 90° usando incrementos de 5°. Usando os menores incrementos apropriados, determine o valor de θ para o qual *M* é mínimo e o seu valor correspondente.

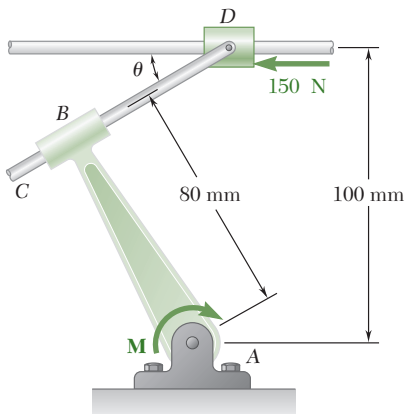


Figura P6.C6

A ponte George Washington liga Manhattan, Nova York, a Fort Lee, New Jersey. Essa ponte pênsil mantém o tráfego em duas plataformas niveladas acima das pistas, que são suspensas por um sistema de vigas. Há treliças tanto para ligar essas pistas como para completar o vão central da ponte e formar as torres. O vão da ponte é sustentanda por um sistema de cabos.

CAPÍTULO 7

Forças em vigas e cabos

7

Forças em vigas e cabos

7.1 Introdução
7.2 Forças internas em elementos
7.3 Diversos tipos de carregamento e de apoio
7.4 Esforço cortante e momento fletor em uma viga
7.5 Diagramas de esforço cortante e de momento fletor
7.6 Relações entre carregamento, esforço cortante e momento fletor
7.7 Cabos com cargas concentradas
7.8 Cabos com cargas distribuídas
7.9 Cabo parabólico
7.10 Catenária

*7.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, foram considerados dois problemas básicos que envolviam estruturas: (1) determinar as forças externas que atuam em uma estrutura (Cap. 4) e (2) determinar as forças que mantêm unidos os vários elementos que formam uma estrutura (Cap. 6). O problema de determinar as forças internas que mantêm unidas as várias partes de um dado elemento será considerado agora.

Primeiro vamos analisar as forças internas nos elementos de uma estrutura, tais como o guindaste considerado nas Seções 6.1 e 6.10, observando que, enquanto as forças internas em um elemento reto sujeito à ação de duas forças podem produzir somente *tração* ou *compressão* nesse elemento, as forças internas em qualquer outro tipo de elemento geralmente produzem também *cisalhamento* e *flexão*.

A maior parte deste capítulo será dedicada à análise das forças internas em dois tipos importantes de estruturas de engenharia, a saber:

1. *Vigas*, que geralmente são elementos prismáticos longos e retos, projetados para sustentar cargas aplicadas em vários pontos ao longo do elemento.
2. *Cabos*, que são elementos flexíveis capazes de resistir apenas à tração, projetados para sustentar cargas concentradas ou distribuídas. Cabos são usados em muitas aplicações de engenharia, tais como pontes suspensas e linhas de transmissão.

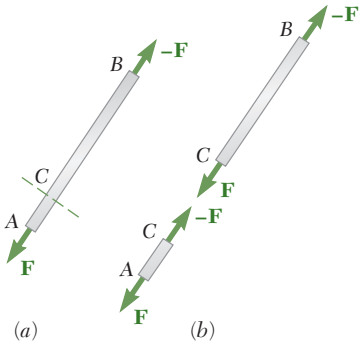


Figura 7.1

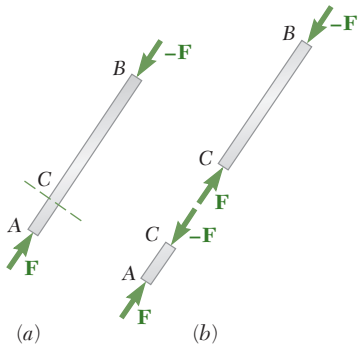


Figura 7.2

*7.2 Forças internas em elementos

Consideremos primeiramente um *elemento reto sujeito à ação de duas forças AB* (Fig. 7.1*a*). Sabemos da Seção 4.6, que as forças **F** e $-\mathbf{F}$ exercidas em *A* e *B*, respectivamente, devem ser direcionadas ao longo de *AB* em sentidos opostos e devem ter a mesma intensidade *F*. Agora, cortemos o elemento em *C*. Para manter o equilíbrio dos corpos livres *AC* e *CB* assim obtidos, devemos aplicar em *AC* uma força $-\mathbf{F}$ igual e oposta a **F**, e em *CB* uma força **F** igual e oposta a $-\mathbf{F}$ (Fig. 7.1*b*). Essas novas forças estão direcionadas ao longo de *AB* em sentidos opostos e têm a mesma intensidade *F*. Como as duas partes *AC* e *CB* estavam em equilíbrio antes de o elemento ser cortado, *forças internas* equivalentes a essas novas forças deveriam existir no próprio elemento. Concluímos que, no caso de um elemento reto sujeito à ação de duas forças, as forças internas que as duas partes do elemento exercem uma sobre a outra são equivalentes a *forças axiais*. A intensidade comum *F* dessas forças não depende da localização da seção *C* e é chamada *de força no elemento AB*. No caso considerado, o elemento está sob tração e será alongado sob a ação das forças internas. No caso representado na Fig. 7.2, o elemento está sob compressão e diminuirá em comprimento sob a ação das forças internas.

A seguir, vamos considerar um *elemento sujeito à ação de múltiplas forças*. Tomemos, por exemplo, o elemento *AD* do guindaste analisado na Seção 6.10. Esse guindaste é mostrado novamente na Fig. 7.3*a*, e o diagrama de corpo livre do elemento *AD* está traçado na Fig. 7.3*b*. Agora cortamos o elemento *AD* em *J* e traçamos um diagrama de corpo livre

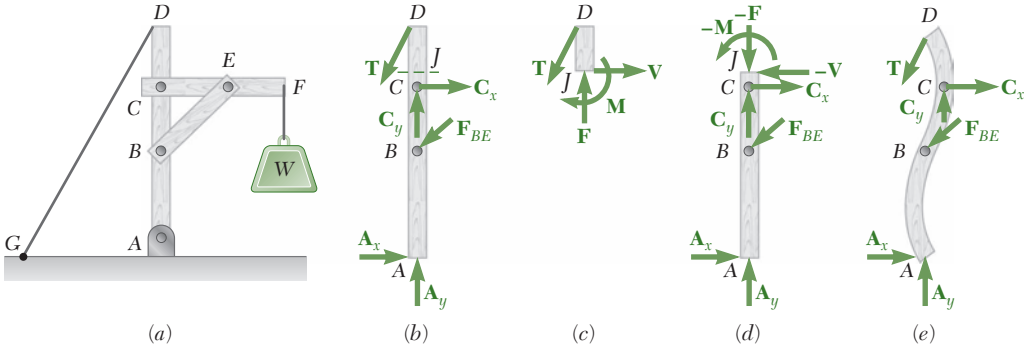


Figura 7.3

para cada uma das partes *JD* e *AJ* do elemento (Fig. 7.3*c* e *d*). Considerando o corpo livre *JD*, encontramos que seu equilíbrio será mantido se aplicarmos em *J* uma força **F** para equilibrar o componente vertical de **T**, uma força **V** para equilibrar o componente horizontal de **T** e um binário **M** para equilibrar o momento de **T** em relação a *J*. Novamente concluímos que forças internas deveriam existir em *J* antes de o elemento *AD* ter sido cortado. As forças internas exercidas no trecho *JD* do elemento *AD* são equivalentes ao sistema força-binário mostrado na Fig.7.3*c*. De acordo com a terceira lei de Newton, as forças internas que atuam em *AJ* devem ser equivalentes a um sistema força-binário igual e oposto, tal como mostra a Fig. 7.3*d*. É claro que a ação das forças internas no elemento *AD não é limitada a produzir tração ou compressão* como no caso de elementos retos sujeitos à ação de duas forças; as forças internas *também produzem cisalhamento* e *flexão.* A força **F** é uma *força axial;* a força **V** é chamada de *esforço cortante;* e o momento **M** do binário é conhecido como *momento fletor em J.* Observamos que, para determinar as forças internas em um elemento, devemos indicar claramente em que parte do elemento as forças devem atuar. A deformação que vai ocorrer no elemento *AD* é esboçada na Fig. 7.3*e*. A análise propriamente dita de tal deformação é parte do estudo de mecânica dos materiais.

Deve-se observar que, em um *elemento sujeito à ação de duas forças que não é reto,* as forças internas são também equivalentes a um sistema força-binário. Isso é mostrado na Fig. 7.4, na qual o elemento *ABC* sujeito à ação de duas forças foi cortado em *D*.

Foto 7.1 Deve-se levar em conta em um projeto do eixo de uma serra circular as forças internas que resultam das forças aplicadas nos dentes da lâmina. Em um determinado ponto do eixo, essas forças internas são equivalentes a um sistema força-binário, constituído de forças axiais e cortantes e de um binário que represente os momentos de flexão e de torsão.

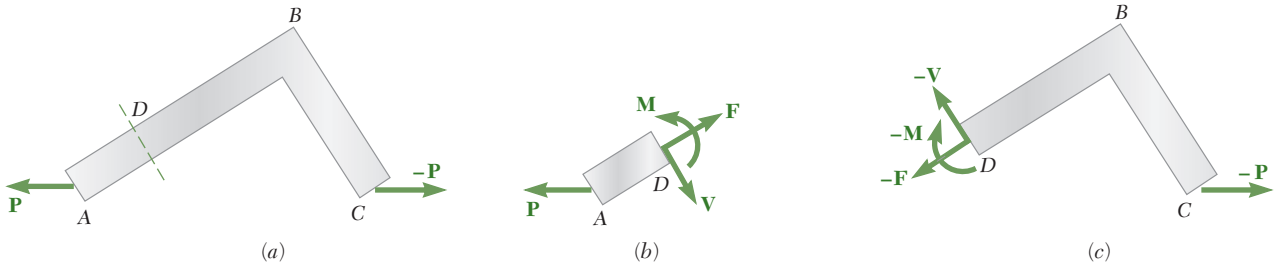
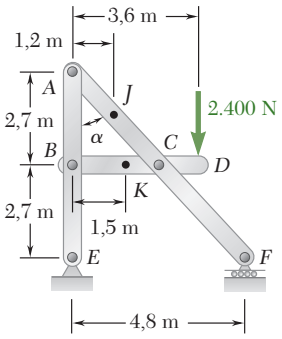
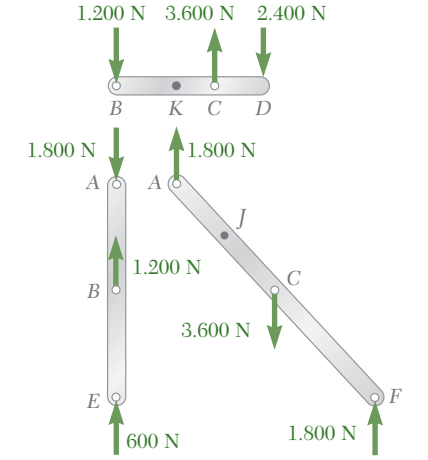


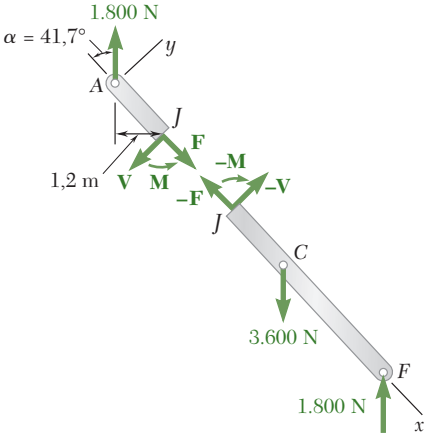
Figura 7.4

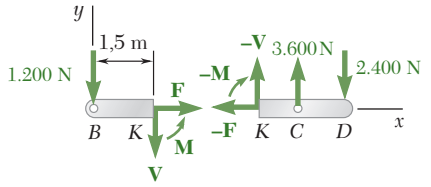


PROBLEMA RESOLVIDO 7.1

Na estrutura mostrada na figura, determine as forças internas (*a*) no elemento *ACF* no ponto *J*, (*b*) no elemento *BCD* no ponto *K*. Essa estrutura foi anteriormente considerada no Problema Resolvido 6.5.







SOLUÇÃO

Reações e forças nas conexões. As reações e as forças exercidas em cada elemento de estrutura são determinadas. Isso foi feito anteriormente no Problema Resolvido 6.5, e os resultados são repetidos aqui.

a. Forças internas em *J*. O elemento *ACF* é cortado no ponto *J*, e as duas partes obtidas são mostradas na figura. As forças internas em *J* são representadas por um sistema equivalente força-binário e podem ser determinadas considerando-se o equilíbrio de qualquer uma das partes. Considerando o *corpo livre AJ*, temos:

$+\circlearrowleft \Sigma M_J = 0$: $\quad -(1.800\text{ N})(1{,}2\text{ m}) + M = 0$

$M = +2.160\text{ N}\cdot\text{m}$ $\qquad \mathbf{M} = 2.160\text{ N}\cdot\text{m}\circlearrowleft$ ◀

$+\searrow \Sigma F_x = 0$: $\quad F - (1.800\text{ N})\cos 41{,}7° = 0$

$F = +1.344\text{ N}$ $\qquad \mathbf{F} = 1.344\text{ N}\searrow$ ◀

$+\nearrow \Sigma F_y = 0$: $\quad -V + (1.800\text{ N})\operatorname{sen} 41{,}7° = 0$

$V = +1.197\text{ N}$ $\qquad \mathbf{V} = 1.197\text{ N}\swarrow$ ◀

As forças internas em *J* são, portanto, equivalentes a um binário **M**, uma força axial **F** e atuante cortante **V**. O sistema força-binário atuante na parte *JCF* é igual e oposto.

b. Forças internas em *K*. Cortamos o elemento *BCD* em *K* e obtemos as duas partes mostradas na figura. Considerando o *corpo livre BK*, temos:

$+\circlearrowleft \Sigma M_K = 0$: $\quad (1.200\text{ N})(1{,}5\text{ m}) + M = 0$

$M = -1.800\text{ N}\cdot\text{m}$ $\qquad \mathbf{M} = 1.800\text{ N}\cdot\text{m}\circlearrowright$ ◀

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad F = 0$ $\qquad \mathbf{F} = 0$ ◀

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad -1.200\text{ N} - V = 0$

$V = -1.200\text{ N}$ $\qquad V = 1.200\text{ N}\uparrow$ ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, aprendemos a determinar as forças internas em um elemento de uma estrutura. As forças internas em um dado ponto do *elemento reto sujeito à ação de duas forças* se reduzem a uma força axial, mas, em todos os outros casos, são equivalentes a um *sistema força-binário* que consiste em uma *força axial* **F**, um *esforço cortante* **V** e um binário **M** que representa o *momento fletor* nesse ponto.

Para determinar as forças internas em um dado ponto *J* do elemento de uma estrutura, devemos seguir os seguintes passos:

1. Traçar um diagrama de corpo livre da estrutura inteira e usá-lo para determinar quantas reações nos apoios forem possíveis.

2. Decompor a estrutura e traçar um diagrama de corpo livre para cada um de seus elementos. Escrever quantas equações de equilíbrio forem necessárias para encontrar todas as forças exercidas no elemento no qual o ponto *J* está localizado.

3. Cortar o elemento no ponto *J* e traçar um diagrama de corpo livre para cada uma das duas partes do elemento que obtivemos, aplicando a cada parte, no ponto *J*, os componentes de força e binário que representam as forças internas exercidas pela outra parte. Observemos que esses componentes de força e binários são iguais em intensidade e opostos em sentido.

4. Selecionar um dos dois diagramas de corpo livre traçados e usá-lo para escrever três equações de equilíbrio para a parte correspondente do elemento.

a. Somar momentos em relação a *J* e igualá-los a zero fornecerá o momento fletor no ponto *J*.

b. Somar componentes nas direções paralela e perpendicular ao elemento em *J* e igualá-los a zero fornecerá, respectivamente, as forças axial e cortante.

5. Quando anotar as respostas, não nos esqueçamos de especificar a parte do elemento utilizada, pois as forças e os binários exercidas nas duas partes têm sentidos opostos.

Como as soluções dos problemas nesta seção requerem a determinação das forças exercidas entre si pelos vários elementos de uma estrutura, não deixemos de revisar os métodos usados no Cap. 6 para resolver esse tipo de problema. Quando estruturas envolvem roldanas e cabos, por exemplo, devemos nos lembrar de que as forças exercidas por uma roldana no elemento da estrutura ao qual ela está presa têm mesma intensidade e direção que as forças exercidas pelo cabo na roldana [Problema 6.90].

PROBLEMAS

7.1 e 7.2 Determine as forças internas (força axial, esforço cortante e momento fletor) no ponto J das estruturas indicadas:

7.1 Estrutura e carregamento do Problema 6.79.

7.2 Estrutura e carregamento do Problema 6.80.

7.3 Determine as forças internas no ponto J quando $\alpha = 90^\circ$.

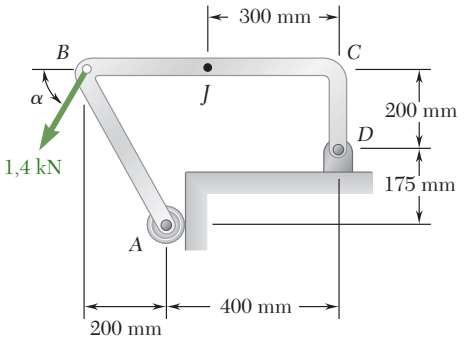


Figura P7.3 e P7.4

7.4 Determine as forças internas no ponto J quando $\alpha = 0^\circ$.

7.5 Determine as forças internas no ponto J da estrutura mostrada na figura.

7.6 Determine as forças internas no ponto K da estrutura mostrada na figura.

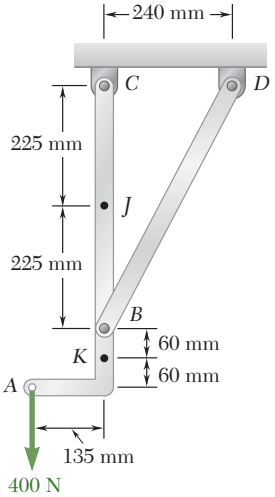


Figura P7.5 e P7.6

7.7 Uma barra semicircular é carregada tal como mostra a figura. Determine as forças internas no ponto J.

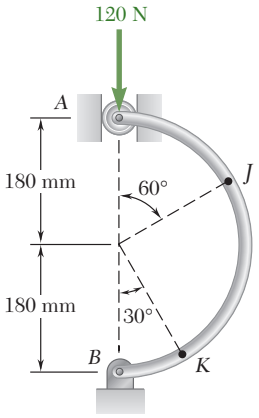


Figura P7.7 e P7.8

7.8 Uma barra semicircular é carregada tal como mostra a figura. Determine as forças internas no ponto K.

7.9 Um arqueiro fazendo mira em um alvo está puxando a corda do arco com uma força de 210 N. Considerando que a forma do arco pode ser aproximadamente uma parábola, determine as forças internas no ponto *J*.

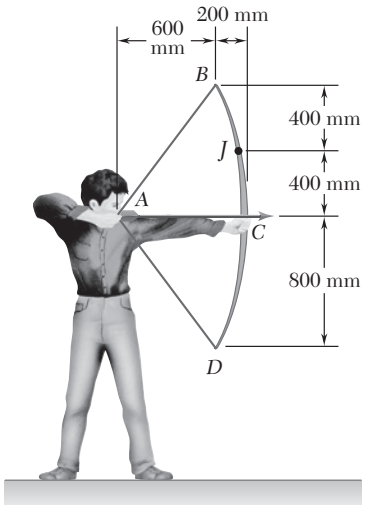


Figura P7.9

7.10 Para o arco do Problema 7.9, determine a intensidade e a localização da (*a*) força axial máxima, (*b*) do esforço cortante máximo (*c*) do momento fletor máximo.

7.11 Dois elementos, cada qual consistindo em uma parte reta e um quarto de círculo, são unidos tal como mostra a figura e sustentam uma carga de 340 N em *A*. Determine as forças internas no ponto *J*.

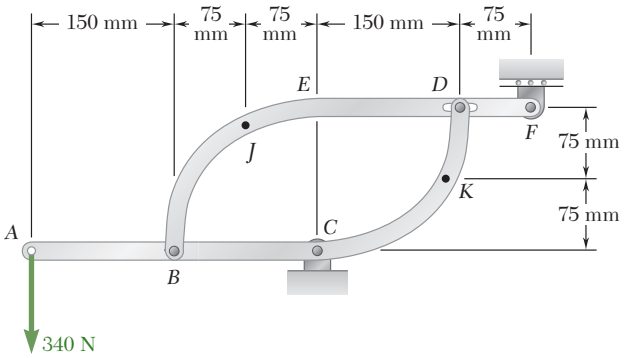


Figura *P7.11* e *P7.12*

7.12 Dois elementos, cada qual consiste de uma parte reta e um quarto de círculo, são unidos tal como mostra a figura e sustentam uma carga de 340 N em *A*. Determine as forças internas no ponto *K*.

7.13 Uma barra semicircular é carregada tal como mostra a figura. Determine as forças internas no ponto *J* sabendo que $\theta = 30°$.

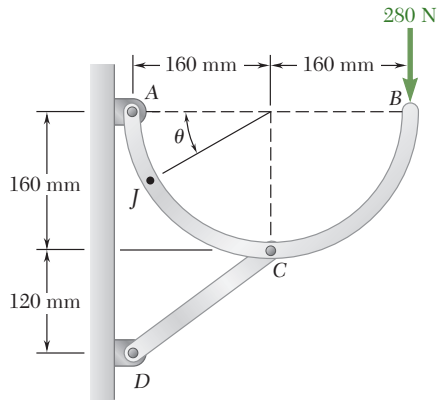


Figura P7.13 e P7.14

7.14 Uma barra semicircular é carregada tal como mostra a figura. Determine a intensidade e a localização do momento fletor máximo na barra.

7.15 Sabendo que o raio de cada roldana é 150 mm, que $\alpha = 20^\circ$ e desprezando o atrito, determine as forças internas em (*a*) no ponto *J*, (*b*) no ponto *K*.

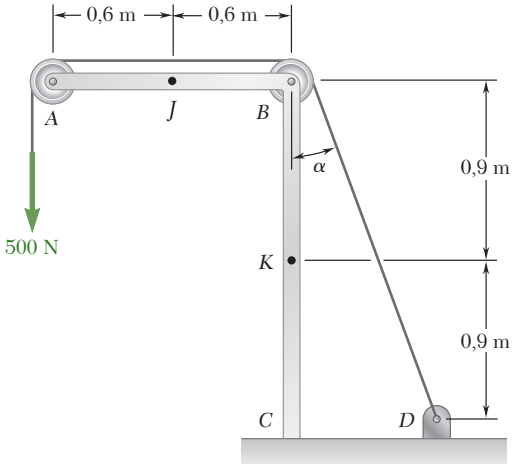


Figura P7.15 e P7.16

7.16 Sabendo que o raio de cada roldana é 150 mm, que $\alpha = 30^\circ$ e desprezando o atrito, determine as forças internas em (*a*) no ponto *J*, (*b*) no ponto *K*.

7.17 Sabendo que o raio de cada roldana é 200 mm e desprezando o atrito, determine as forças internas no ponto *J* da estrutura mostrada na figura.

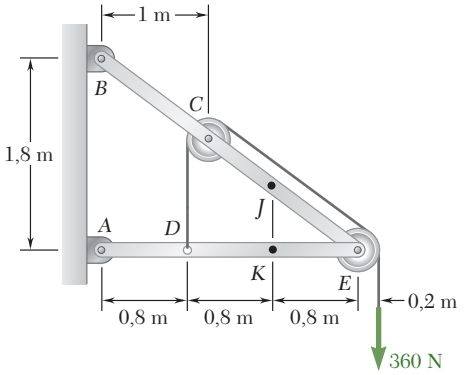


Figura P7.17 e P7.18

7.18 Sabendo que o raio de cada roldana é 200 mm e desprezando o atrito, determine as forças internas no ponto *K* da estrutura mostrada na figura.

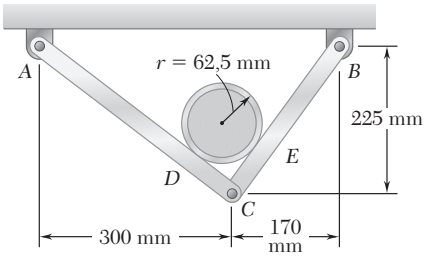


Figura P7.19

7.19 Um tubo de 125 mm de diâmetro é apoiado a cada 2,7 m por uma pequena estrutura constituída de dois elementos, tal como mostra a figura. Sabendo que o peso combinado do tubo e seu conteúdo é 150 N/m e desprezando o efeito do atrito, determine a intensidade e a localização do momento fletor máximo no elemento *AC*.

7.20 Para a estrutura do Problema 7.19, determine a intensidade e a localização do momento fletor máximo no elemento *BC*.

7.21 e 7.22 Uma força **P** é aplicada em uma haste dobrada que é apoiada por um rolete e um suporte com pino. Para cada um dos três casos mostrados, determine as forças internas no ponto *J*.

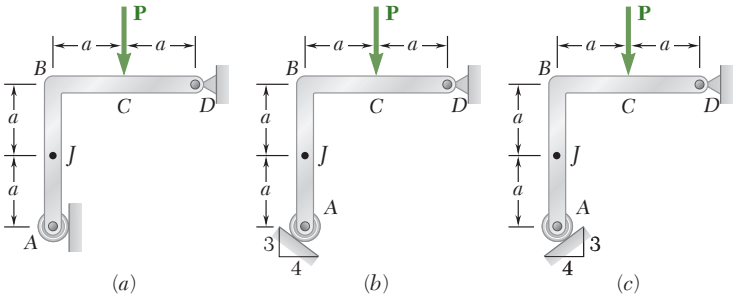


Figura P7.21

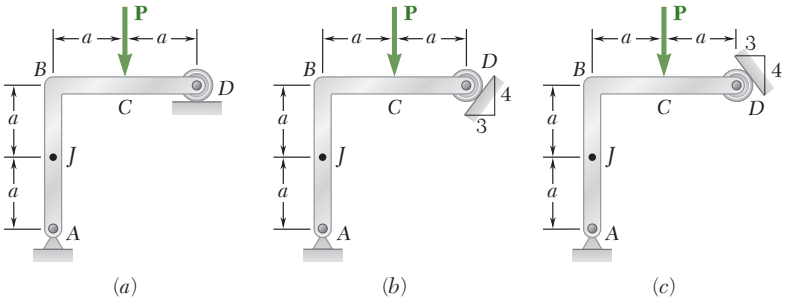


Figura P7.22

7.23 Uma haste de peso *W* e seção transversal uniforme é apoiada tal como mostra a figura. Determine o momento fletor no ponto *J* quando $\theta = 60°$.

7.24 Uma haste semicircular de peso *W* e seção transversal uniforme é apoiada tal como mostra a figura. Determine o momento fletor no ponto *J* quando $\theta = 150°$.

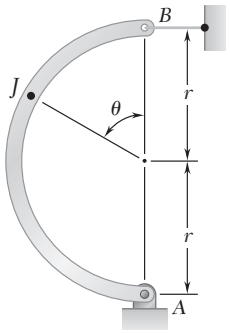


Figura P7.23 e P7.24

7.25 e 7.26 Uma haste de um quarto de círculo de peso *W* e de seção transversal uniforme é apoiada tal como mostra a figura. Determine o momento fletor no ponto *J* quando $\theta = 30°$.

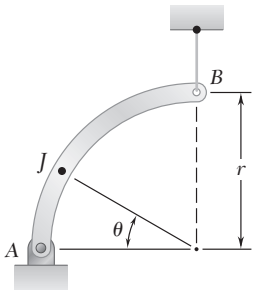


Figura P7.25

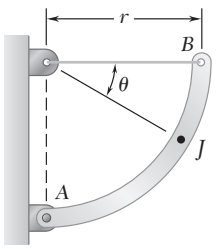


Figura P7.26

7.27 Para a haste do Problema 7.25, determine a intensidade e a localização do momento fletor máximo.

7.28 Para a haste do Problema 7.26, determine a intensidade e a localização do momento fletor máximo.

VIGAS

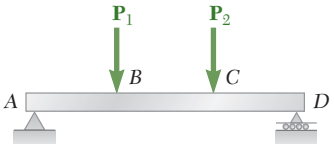
*7.3 Diversos tipos de carregamento e apoio

Um elemento estrutural projetado para sustentar cargas aplicadas em vários pontos de sua extensão é denominado *viga*. Em geral, as cargas são perpendiculares ao eixo da viga e causarão nela somente cisalhamento e flexão. Quando não formam um ângulo reto com a viga, as cargas produzem nela também forças axiais.

As vigas geralmente são barras prismáticas retas e longas. A projeção de uma viga para o suporte mais efetivo das cargas aplicadas consiste em um processo de duas partes: (1) determinar os esforços cortantes e os momentos fletores produzidos pelas cargas e (2) selecionar a seção reta mais adequada para resistir aos esforços cortantes e aos momentos fletores determinados na primeira parte. Nesta seção, estamos preocupados com a primeira parte do problema de projeto de vigas; já a segunda parte pertence ao estudo de mecânica dos materiais.

Uma viga pode estar submetida a *cargas concentradas* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ ..., indicadas em newtons ou em seu múltiplo, quilonewtons (Fig. 7.5*a*), a uma *carga distribuída* w, indicada em N/m ou kN/m (Fig. 7.5*b*), ou a combinação de ambas. Quando a carga w por unidade de comprimento tem um valor constante sobre parte da viga (tal como entre A e B na Fig. 7.5*b*), diz-se que a carga é *uniformemente distribuída* sobre aquela parte da viga. A determinação das reações nos apoios é consideravelmente simplificada se cargas distribuídas forem substituídas por cargas concentradas equivalentes, conforme explicado na Seção 5.8. Essa substituição, no entanto, não deve ser efetuada, ou pelo menos deve ser efetuada com cuidado, quando as forças internas estiverem sendo calculadas (ver Problema Resolvido 7.3).

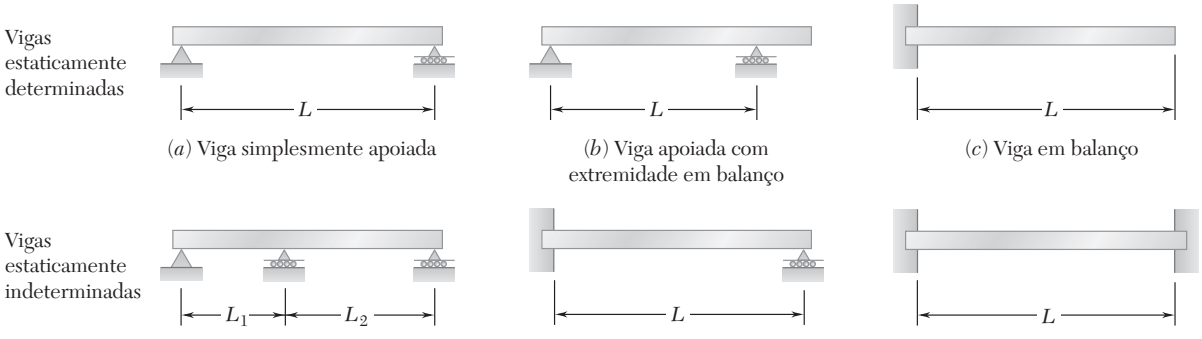
As vigas são classificadas de acordo com o modo como são apoiadas. Diversos tipos de vigas frequentemente usadas estão mostrados na Fig. 7.6. A distância L entre os apoios é denominada *vão*. Deve-se observar que as reações serão determinadas se os apoios envolverem apenas três incógnitas. Se mais incógnitas estiverem envolvidas, as reações serão estaticamente in-



(*a*) Cargas concentradas

(*b*) Carga distribuída

Figura 7.5



(*a*) Viga simplesmente apoiada

(*b*) Viga apoiada com extremidade em balanço

(*c*) Viga em balanço

(*d*) Viga contínua

(*e*) Viga fixa em uma extremidade e apoiada na outra

(*f*) Viga fixa

Figura 7.6

determinadas e os métodos da estática não serão suficientes para se determinar as reações; as propriedades da viga com relação a sua resistência à flexão devem, então, ser consideradas. As vigas apoiadas por dois roletes não são ilustradas aqui; elas são vinculadas apenas em parte e irão se mover em certas condições de carregamento.

Em alguns momentos, duas ou mais vigas são acopladas por articulações para se formar uma única estrutura contínua. Dois exemplos de vigas articuladas em um ponto H são mostrados na Fig. 7.7. Será visto que as reações nos apoios envolvem quatro incógnitas e não podem ser determinadas a partir do diagrama de corpo livre do sistema de duas vigas. Essas incógnitas poderão ser determinadas, no entanto, considerando-se o diagrama de corpo livre de cada viga separadamente; seis incógnitas estão envolvidas (incluindo-se dois componentes de força na articulação) e seis equações estão disponíveis.

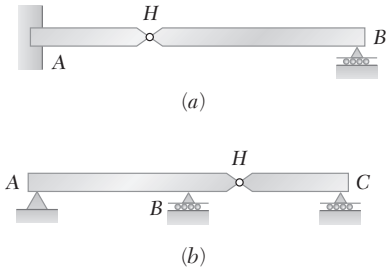


Figura 7.7

*7.4 Esforço cortante e momento fletor em uma viga

Considere uma viga AB submetida a várias cargas concentradas e distribuídas (Fig. 7.8*a*). Propomos que se determinem o esforço cortante e o momento fletor em qualquer ponto da viga. No exemplo aqui considerado, a viga é simplesmente apoiada, mas o método utilizado pode ser aplicado a qualquer tipo de viga estaticamente determinada.

Primeiro determinamos as reações em A e B escolhendo a viga inteira como um corpo livre (Fig. 7.8*b*); escrevendo $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$, obtemos, respectivamente, $\mathbf{R}_B$ e $\mathbf{R}_A$.

Para determinar as forças internas em C, cortamos a viga em C e traçamos os diagramas de corpo livre das partes AC e CB da viga (Fig. 7.8c).

Foto 7.2 As forças internas nas vigas do viaduto mostrado variam à medida que o caminhão cruza o viaduto.

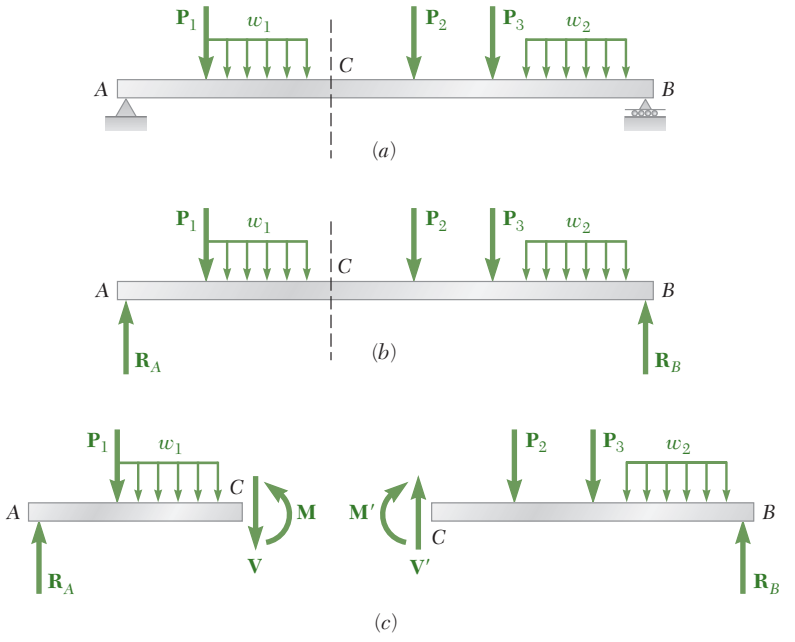


Figura 7.8

Usando o diagrama de corpo livre de *AC*, podemos determinar o esforço cortante **V** em *C* igualando a zero a soma dos componentes verticais de todas as forças que atuam em *AC*. Analogamente, o momento fletor **M** em *C* pode ser encontrado igualando-se a zero a soma dos momentos em relação a *C* de todas as forças e os binários atuantes em *AC*. Como alternativa, poderíamos ter usado igualmente o diagrama de corpo livre em *CB** e determinado o esforço cortante **V′** e o momento fletor **M′** igualando-se a zero a soma dos componentes verticais e a soma dos momentos em relação a *C* de todas as forças e binários atuantes em *CB*. Se, por um lado, essa escolha de corpos livres pudesse facilitar o cálculo dos valores numéricos do esforço cortante o do momento fletor, por outro torna-se necessário indicar em qual parte da viga as forças internas que estão sendo consideradas estão atuando. Se o esforço cortante e o momento fletor devem ser calculados em cada ponto da viga e eficientemente registrados, precisamos encontrar uma maneira de evitar ter de especificar, a cada instante, qual parte da viga está sendo utilizada como um corpo livre. Adotaremos, portanto, as seguintes convenções:

Ao se determinar o esforço cortante em uma viga, *será sempre considerado* que as forças internas **V** e **V′** estão direcionadas conforme mostra a Fig. 7.8*c*. Um valor positivo obtido para sua intensidade comum *V* indicará que essa hipótese estava certa e que os esforços cortantes estão realmente direcionados tal como mostra a figura. Um valor negativo obtido para *V* indicará que a hipótese estava errada e que os esforços cortantes estão dirigidos no sentido oposto. Assim, somente a intensidade *V*, associada a um sinal de mais ou de menos, necessita ser registrada para definir completamente os esforços cortantes em um dado ponto da viga. O escalar *V* é comumente denominado *esforço cortante* em um dado ponto da viga.

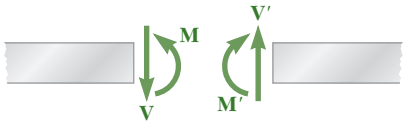
De modo semelhante, *sempre vamos pressupor* que os binários internos **M** e **M′** estão direcionados tal como mostra a Fig. 7.8*c*. Um sinal positivo obtido para sua intensidade *M*, comumente denominada *momento fletor*, indicará que esta hipótese estava certa, e um valor negativo indicará que estava errada. Resumindo as convenções de sinais que apresentamos, temos:

O esforço cortante V e o momento fletor M em um dado ponto de uma viga serão positivos quando as forças internas e os binários exercidas em cada parte da viga estiverem direcionados conforme mostra a Fig. 7.9a.

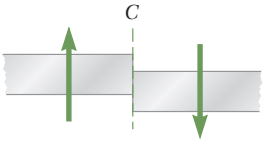
Essas convenções podem ser mais facilmente lembradas se observarmos que:

1. *O esforço cortante em C é positivo quando as forças* **externas** (*cargas e reações*) *exercidas na viga tendem a cisalhá-la em C, tal como indica, a Fig. 7.9b.*
2. *O momento fletor em C é positivo quando as forças* **externas** *exercidas na viga tendem a flexioná-la em C, como indica a Fig. 7.9c.*

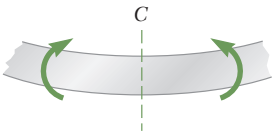
Pode também ser útil observar que a situação descrita na Fig. 7.9, na qual os valores do esforço cortante e do momento fletor são positivos,



(*a*) Forças internas na seção (esforço cortante e momento fletor positivos)



(*b*) Efeito de forças externas (esforço cortante positivo)



(*c*) Efeito de forças externas (momento fletor positivo)

Figura 7.9

* A força e o binário que representam as forças internas exercidas sobre *CB* serão agora representados por **V′**, e **M′**, em vez de −**V** e −**M**, como fizemos anteriormente, de modo a evitar confusão quando aplicarmos a convenção de sinais que estamos apresentando.

é precisamente a situação que ocorre na metade esquerda de uma viga simplesmente apoiada que sustenta uma única carga concentrada em seu ponto médio. Esse exemplo particular é analisado em detalhes na próxima seção.

*7.5 Diagramas de esforço cortante e de momento fletor

Agora que o esforço cortante e o momento fletor foram claramente definidos tanto em sentido como em intensidade, podemos facilmente registrar seus valores em qualquer ponto de uma viga representando-os em um gráfico em função da distância x medida a partir de uma extremidade da viga. Os gráficos obtidos desse modo são denominados, respectivamente, *diagrama de esforço cortante* e *diagrama de momento fletor*. Como exemplo, consideremos uma viga AB simplesmente apoiada, de vão L, sujeita a uma única carga concentrada **P** aplicada em seu ponto médio D (Fig. 7.10*a*). Primeiro determinamos as reações nos apoios a partir do diagrama de corpo livre da viga inteira (Fig. 7.10*b*); descobrimos que a intensidade de cada reação é igual a $P/2$.

Em seguida, cortamos a viga em um ponto C entre A e D e traçamos os diagramas de corpo livre de AC e CB (Fig. 7.10*c*). *Supondo que o esforço cortante e o momento fletor são positivos,* direcionamos as forças internas **V** e **V′** e os binários internos **M** e **M′** tal como indica a Fig. 7.9*a*. Considerando o corpo livre AC e escrevendo que a soma dos componentes verticais e a soma dos momentos em relação a C das forças exercidas no corpo livre são iguais a zero, encontramos $V = +P/2$ e $M = +Px/2$. Tanto o esforço cortante quanto o momento fletor são, portanto, positivos; isso pode ser verificado observando-se que a reação em A tende a cisalhar e a flexionar a viga em C, como mostra a Fig. 7.9*b* e *c*. Podemos traçar em um gráfico V e M entre A e D (Fig. 7.10*e* e *f*); o esforço cortante tem valor constante $V = P/2$, enquanto o momento fletor aumenta linearmente a partir de $M = 0$ em $x = 0$ para $M = PL/4$ em $x = L/2$.

Cortando agora a viga em um ponto E entre D e B e considerando o corpo livre EB (Fig. 7.10*d*), escrevemos que a soma dos componentes verticais e a soma dos momentos em relação a E das forças exercidas no corpo livre são iguais a zero. Obtemos $V = -P/2$ e $M = P(L - x)/2$. O esforço cortante é, portanto, negativo, e o momento fletor, positivo; isso pode ser verificado observando-se que a reação em B flexiona a viga no ponto E, como mostra a Fig. 7.9*c*, mas tende a cisalhá-la de forma oposta àquela mostrada na Fig. 7.9*b*. Podemos completar agora os diagramas de esforço cortante e de momento fletor da Fig. 7.10*e* e *f*; o esforço cortante tem valor constante $V = -P/2$ entre D e B, enquanto o momento fletor decresce linearmente de $M = PL/4$ em $x = L/2$, para $M = 0$, em $x = L$.

Deve-se observar que, quando uma viga está sujeita somente a cargas concentradas, o esforço cortante tem valor constante entre cargas e o momento fletor varia linearmente entre as mesmas; mas, quando uma viga é submetida a cargas distribuídas, o esforço cortante e o momento fletor variam de modo totalmente diferente (ver Problema Resolvido 7.3).

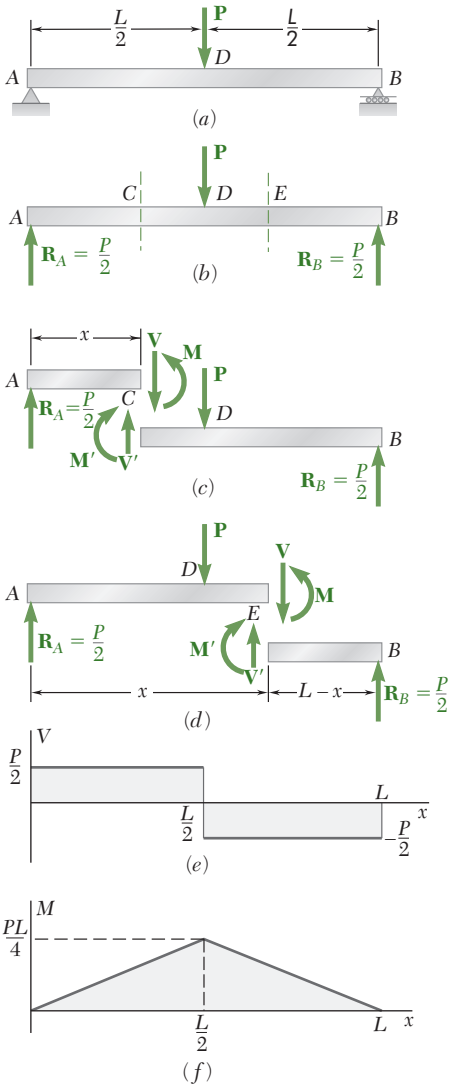
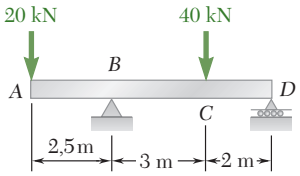


Figura 7.10



PROBLEMA RESOLVIDO 7.2

Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento mostrado.

SOLUÇÃO

Corpo livre: viga interna. A partir do diagrama de corpo livre da viga inteira, encontramos as reações em B e D.

$$\mathbf{R}_B = 46\ \text{kN}\uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14\ \text{kN}\uparrow$$

Esforço cortante e momento fletor. Primeiro, determinamos as forças internas imediatamente à direita da carga de 20 kN em A. Tornando o pedaço da viga à esquerda da seção *1* como corpo livre e considerando V e M positivos (de acordo com a convenção padrão), temos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20\ \text{kN} - V_1 = 0 \quad V_1 = -20\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \quad (20\ \text{kN})(0\ \text{m}) + M_1 = 0 \quad M_1 = 0$$

Em seguida, tomamos como corpo livre a parte da viga esquerda da seção 2 e escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20\ \text{kN} - V_2 = 0 \quad V_2 = -20\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \quad (20\ \text{kN})(2{,}5\ \text{m}) + M_2 = 0 \quad M_2 = 250\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

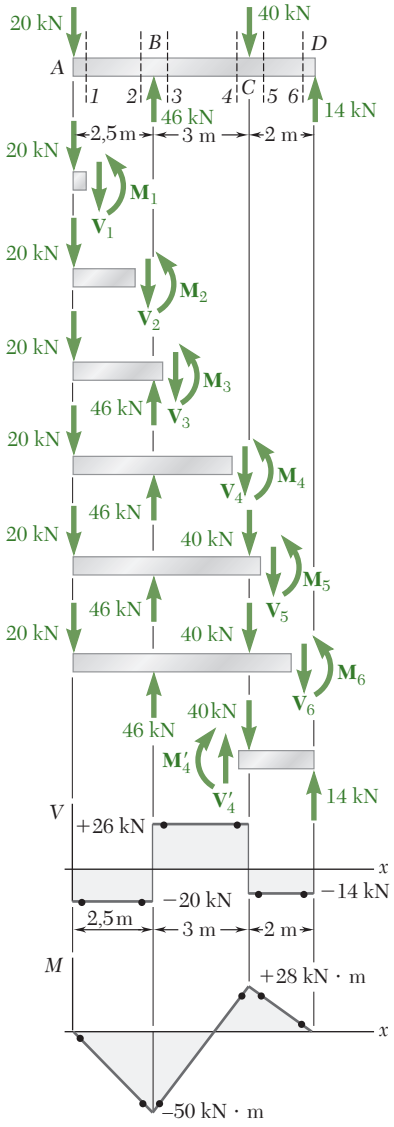
O esforço cortante e o momento fletor nas seções *3*, *4*, *5* e *6* são determinados de maneira análoga a partir dos diagramas de corpo livre mostrados na figura. Obtemos:

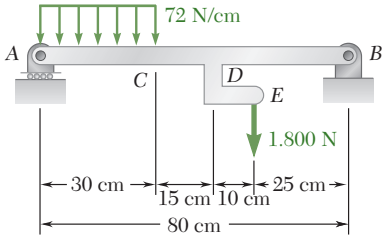
$$V_3 = +26\ \text{kN} \qquad M_3 = -50\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$V_4 = +26\ \text{kN} \qquad M_4 = +28\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$V_5 = -14\ \text{kN} \qquad M_5 = +28\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$V_6 = -14\ \text{kN} \qquad M_6 = 0$$

Para várias das últimas seções, os resultantes são mais facilmente obtidos considerando-se como corpo livre a parte da viga à direita da seção. Por exemplo, considerando a parte da viga à direita da seção *4*, temos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V_4 - 40\ \text{kN} + 14\ \text{kN} = 0 \quad V_4 = +26\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_4 = 0: \quad -M_4 + (14\ \text{kN})(2\ \text{m}) = 0 \quad M_4 = +28\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

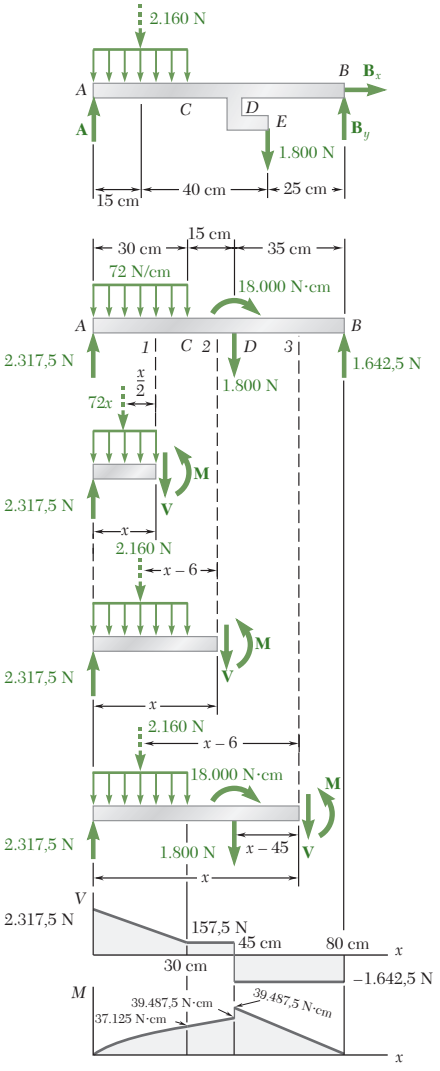
Diagramas de esforço cortante e de momento fletor. Podemos agora traçar os seis pontos mostrados nos diagramas de esforço cortante e de momento fletor. Como indica a Seção 7.5, o esforço cortante tem valor constante entre cargas concentradas e o momento fletor varia linearmente; obtemos, portanto, os diagramas de esforço cortante e de momento fletor mostrados na figura.





PROBLEMA RESOLVIDO 7.3

Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga *AB*. A carga distribuída de 72 N/cm estende-se por 30 cm sobre a viga, de *A* até *C*, e a carga de 1.800 N está aplicada em *E*.



SOLUÇÃO

Corpo livre: viga inteira. As reações são determinadas considerando a viga inteira como um corpo livre.

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$: $B_y(80\text{ cm}) - (2.160\text{ N})(15\text{ cm}) - (1.800\text{ N})(55\text{ m}) = 0$

$B_y = +1.642{,}5\text{ N}$ $\quad \mathbf{B}_y = 365\text{ lb} \uparrow$

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $(2.160\text{ N})(65\text{ cm}) + (1.800\text{ N})(25\text{ cm}) - A(80\text{ cm}) = 0$

$A = +2.317{,}5\text{ N}$ $\quad \mathbf{A} = +2.317{,}5\text{ N} \uparrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $B_x = 0$ $\quad \mathbf{B}_x = 0$

A carga de 1.800 N é agora substituída por um sistema equivalente força-binário atuante na viga no ponto *D*.

Esforço cortante e momento fletor. ***De A até C.*** Determinamos as forças internas a uma distância *x* do ponto *A* considerando a parte da viga à esquerda da seção *1*. A parte da carga distribuída atuante sobre o corpo livre é substituída por sua resultante. Assim, temos:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $2.317{,}5\text{ N} - 72x - V = 0$ $\quad V = 2.317{,}5\text{ N} - 72x$

$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0$: $-2.317{,}5\text{ N} - 72x(\frac{1}{2}x) + M = 0$ $\quad M = 2.317{,}5\text{ N} - 36x^2$

Como o diagrama de corpo livre mostrado pode ser usado para todos os valores de *x* menores que 30 cm, as expressões obtidas para *V* e *M* são válidas por toda a região $0 < x < 30$ cm.

De C até D. Considerando a parte da viga à esquerda da seção 2 e novamente subtituindo a carga distribuída por resultante, obtemos

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $2.317{,}5\text{ N} - 2.160 - V = 0$

$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0$: $-2.317{,}5x + 2.160(x - 15) + M = 0$

$M = (32.400 + 157{,}5x)\text{ N} \cdot \text{cm}$

Essas expressões são válidas na região $30\text{ cm} < x < 45$ cm.

De D para B. Usando a parte da viga à esquerda da seção 3, obtemos para a região $45\text{ cm} < x < 80$ cm.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $2.317{,}5 - 2.160 - 1.800 - V = 0$ $\quad V = -1.642{,}5\text{ N}$

$+\circlearrowleft \Sigma M_3 = 0$: $-2.317{,}5x + 2.160(x - 15) - 18.000 + 1.800(x - 45) + M = 0$

$M = (131.400 - 1.642{,}5x)\text{ N} \cdot \text{cm}$

Diagramas de esforço cortante e de momento fletor. Os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga inteira podem ser traçados. Observamos que o binário de momento 18.000 N·cm aplicado no ponto *D* introduz uma descontinuidade no diagrama de momento fletor.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção aprendemos a determinar o *esforço cortante* V e o *momento fletor* M em qualquer ponto de uma viga. Também aprendemos a traçar o *diagrama de esforço cortante* e o *diagrama de momento fletor* para a viga representando em um gráfico, respectivamente, V e M pela distância x medida ao longo da viga.

A. Determinar o esforço cortante e o momento fletor em uma viga. Para determinar o esforço cortante V e o momento fletor M em um dado ponto C de uma viga, devemos seguir os seguintes passos:

1. Tracar um diagrama de corpo livre da viga inteira e usá-lo para determinar as reações nos apoios da viga.

2. Cortar a viga no ponto C e, usando o carregamento original, selecionar uma das duas partes da viga que você obteve.

3. Traçar um diagrama de corpo livre da parte da viga que você selecionou, mostrando:

a. As cargas e a reação exercidas nessa parte da viga, substituindo cada carga distribuída por uma carga concentrada equivalente tal como explicamos na Seção 5.8.

b. O esforço cortante e o binário fletor que representam as forças internas em C. Para facilitar o registro do esforço cortante V e do momento fletor M depois que eles serem determinados, siga a convenção indicada nas Figs. 7.8 e 7.9. Portanto, se estamos usando a parte da viga localizada à *esquerda de C*, apliquemos em C um *esforço cortante* $\mathbf{V}$ *direcionado para baixo* e um *momento fletor* $\mathbf{M}$ *direcionado no sentido anti-horário.* Se estamos usando a parte da viga localizada à *direita de C*, apliquemos em C um *esforço cortante* $\mathbf{V}'$ *direcionado para cima* e um *momento fletor* $\mathbf{M}'$ *direcionado no sentido horário* [Problema Resolvido 7.2].

4. Escrever as equações de equilíbrio para a parte da viga que foi selecionada. Resolva a equação $\Sigma F_y = 0$ para V e a equação $\Sigma M_C = 0$ para M.

5. Anotar os valores de V e M com os sinais obtidos para cada um deles. Um sinal positivo para V indica que os esforços cortantes exercidos em C em cada uma das duas partes da viga estão direcionados tal como mostram as Figs. 7.8 e 7.9; um sinal negativo indica que eles têm o sentido oposto. De modo análogo, um sinal positivo para M significa que os binários fletores em C estão direcionados tal como mostram essas figuras, e um sinal negativo indica que eles têm o sentido oposto. Além disso, um sinal positivo para M significa que a concavidade da viga em C está direcionada para cima, e um sinal negativo indica que está direcionada para baixo.

B. Traçar os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para uma viga. Esses diagramas são obtidos traçando-se em um diagrama, respectivamente, V e M pela distância x medida ao longo da viga. No entanto, na maioria dos casos, os valores de V e M têm que ser calculados apenas em alguns poucos pontos.

1. Para uma viga sujeita somente a cargas concentradas, observamos [Problema Resolvido 7.2] que:

a. O diagrama de esforço cortante consiste em segmentos de linhas horizontais. Portanto, para traçar o diagrama de esforço cortante da viga, precisaremos apenas calcular V à esquerda ou à direita dos pontos em que as cargas ou as reações são aplicadas.

b. O diagrama de momento fletor consiste em segmentos de retas inclinadas. Portanto, para traçar o diagrama de momento fletor da viga vai precisaremos calcular M somente nos pontos em que as cargas ou reações estão aplicadas.

2. Para uma viga sujeita a cargas uniformemente distribuídas, observamos [Problema Resolvido 7.3] que, sob cada uma das cargas distribuídas:

a. O diagrama de esforço cortante consiste em um segmento de reta inclinado. Portanto, precisaremos calcular V somente onde a carga distribuída começa e onde ela acaba.

b. O diagrama de momento fletor consiste em um arco parabólico. Na maioria dos casos precisaremos calcular M somente onde a carga distribuída começa e onde acaba.

3. Para uma viga com um carregamento mais complicado, é necessário considerar o diagrama de corpo livre de uma parte da viga de comprimento arbitrário x e determinar V e M como funções de x. Pode ser que esse procedimento tenha de ser repetido várias vezes, pois V e M são frequentemente representados por funções diferentes nas várias partes da viga [Problema Resolvido 7.3].

4. Quando um binário é aplicado a uma viga, o esforço cortante tem o mesmo valor em ambos os lados do ponto de aplicação do binário, mas o diagrama de momento fletor mostrará uma descontinuidade nesse ponto, subindo ou descendo de um valor igual à intensidade do binário. Observe que um binário pode ser aplicado diretamente à viga ou resultar da aplicação de uma carga a um elemento rigidamente unido à viga [Problema Resolvido 7.3].

PROBLEMAS

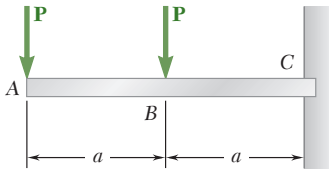


Figura P7.29

7.29 a 7.32 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

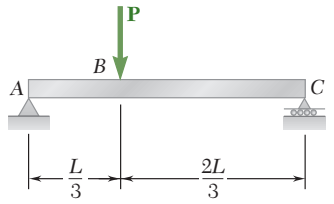


Figura P7.30

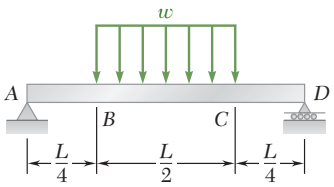


Figura P7.31

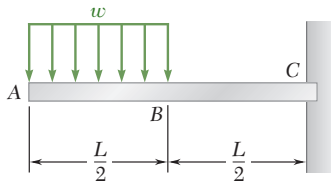


Figura P7.32

7.33 e 7.34 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

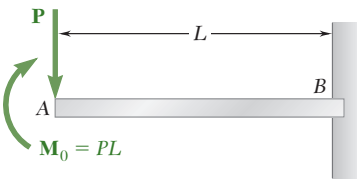


Figura *P7.33*

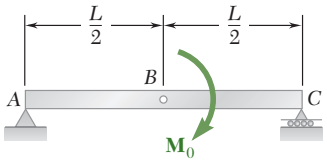


Figura *P7.34*

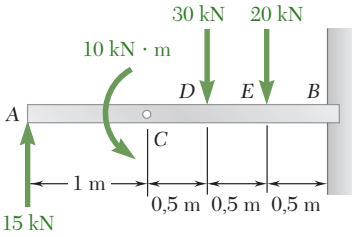


Figura P7.35

7.35 e 7.36 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

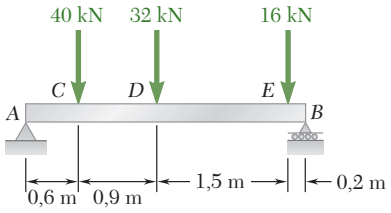


Figura P7.36

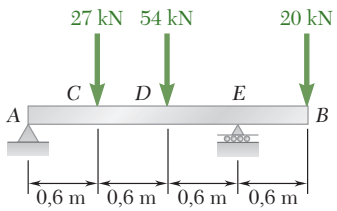


Figura *P7.37*

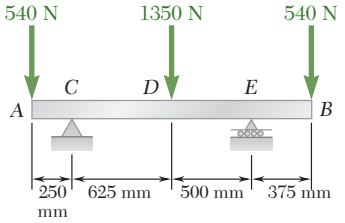


Figura *P7.38*

7.37 e 7.38 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

7.39 a 7.42 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

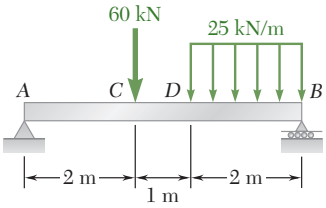


Figura P7.39

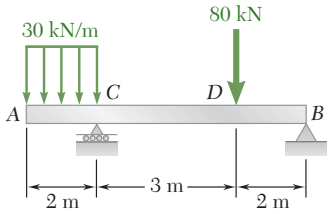


Figura P7.40

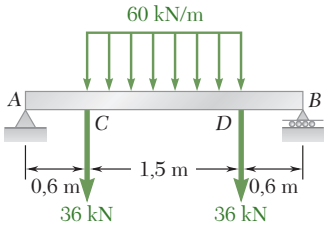


Figura P7.41

7.43 Considerando que a reação, direcionada para cima, do solo sobre a viga *AB* é uniformemente distribuída e sabendo que $a = 0{,}3$ m, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

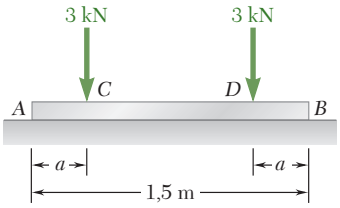


Figura P7.43

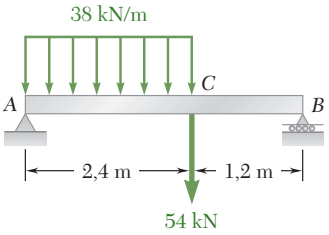


Figura P7.42

7.44 Resolva o Problema 7.43 sabendo que $a = 0{,}5$ m.

7.45 a 7.46 Considerando que a reação, direcionada para cima, do solo sobre a viga *AB* é uniformemente distribuída, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

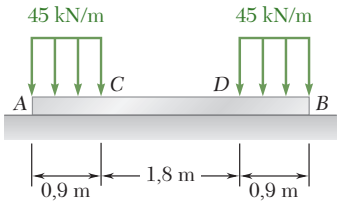


Figura P7.45

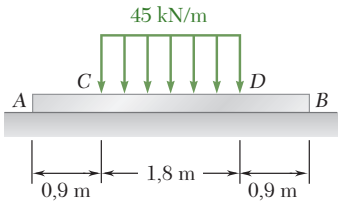


Figura P7.46

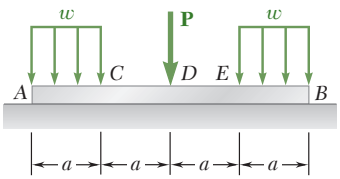


Figura P7.47

7.47 Considerando que a reação, direcionada para cima, do solo sobre a viga *AB* é uniformemente distribuída e sabendo que $P = wa$, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

7.48 Resolva o Problema 7.47 sabendo que $P = 3wa$.

7.49 Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga *AB*, e determine o esforço cortante e o momento fletor (*a*) imediatamente à esquerda de *C*, (*b*) imediatamente à direita de *C*.

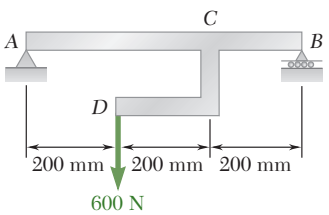


Figura P7.49

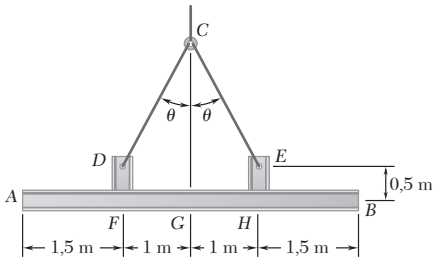


Figura P7.50

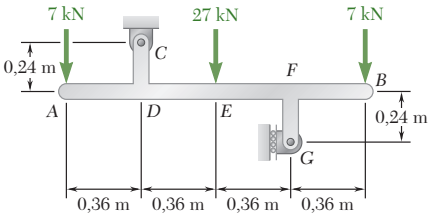


Figura P7.52

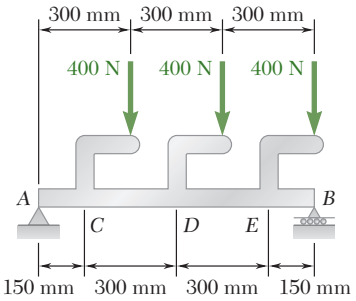


Figura P7.54

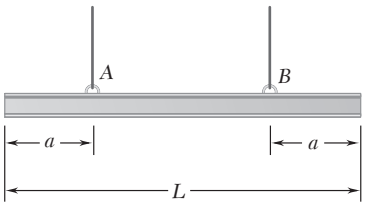


Figura P7.58

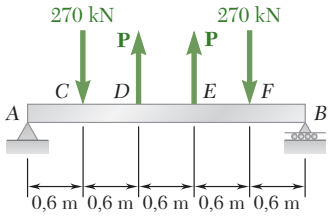


Figura P7.59

7.50 Duas pequenas seções de um canal *DF* e *EH* são soldadas à viga uniforme *AB* de peso $W = 3$ kN, para formar um elemento estrutural rígido como mostra a figura. Este elemento é erguido por dois cabos ligados em *D* e *E*. Sabendo que $\theta = 30°$ e desprezando o peso das pequenas seções, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga *AB*, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor nessa viga.

7.51 Resolva o Problema 7.50 quando $\theta = 60°$.

7.52 a 7.54 Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga *AB*, e determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

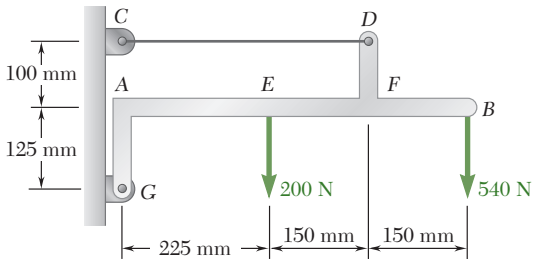


Figura P7.53

7.55 Para o elemento estrutural do Problema 7.50, determine (*a*) o ângulo θ para o qual o valor absoluto máximo do momento fletor na viga *AB* é o menor possível, (*b*) o valor correspondente de $|M|_{máx}$. (*Dica:* trace o diagrama de momento fletor e depois iguale os valores absolutos dos maiores momentos fletores positivo e negativo obtidos.)

7.56 Para a viga do Problema 7.43, determine (*a*) a distância *a* para a qual o valor absoluto máximo do momento fletor na viga é o menor possível, (*b*) o valor correspondente de $|M|_{máx}$. (Ver dica do Problema 7.55.)

7.57 Para a viga do Problema 7.47, determine (*a*) a razão $k = P/wa$ para a qual o valor absoluto máximo do momento fletor na viga é o menor possível, (*b*) o valor correspondente de $|M|_{máx}$. (Ver dica do Problema 7.55.)

7.58 A viga uniforme é elevada por cabos de guindaste ligados em *A* e *B*. Determine a distância *a* das extremidades da viga até os pontos onde os cabos devem ser ligados se o máximo valor absoluto do momento fletor é o menor possível (*Dica:* trace o diagrama de momento fletor em termos de *a*, *L* e o peso *w* por unidade de comprimento, e depois iguale os valores absolutos dos maiores momentos fletores positivo e negativo obtidos.)

7.59 Para a viga mostrada na figura, determine (*a*) a intensidade *P* das duas forças direcionadas para cima para que o valor absoluto máximo do momento fletor na viga é o menor possível, (*b*) o valor correspondente de $|M|_{máx}$. (Ver dica do Problema 7.55.)

7.60 Sabendo que $P = Q = 675$ N, determine (*a*) a distância *a* para a qual o valor absoluto máximo do momento fletor na viga *AB* é o menor possível, (*b*) o valor correspondente de $|M|_{máx}$. (Ver a dica do Problema 7.55).

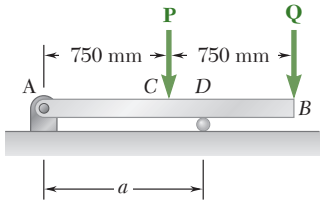


Figura P7.60

7.61 Resolva o Problema 7.60 considerando que $P = 1350$ N e $Q = 675$ N

***7.62** Para reduzir o momento fletor na viga em balanço *AB*, um cabo e um contrapeso são permanentemente ligados à extremidade *B*. Determine o valor do contrapeso para o qual o valor absoluto máximo do momento fletor na viga é o menor possível e o valor correspondente de $|M|_{máx}$. Considere (*a*) o caso em que a carga distribuída é permanentemente aplicada na viga e (*b*) o caso mais geral em que a carga distribuída pode ser aplicada ou retirada.

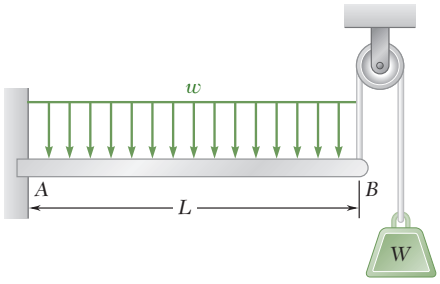


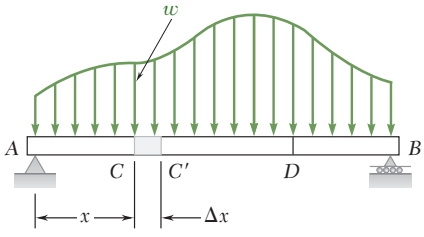
Figura P7.62

*7.6 Relações entre carregamento, esforço cortante e momento fletor

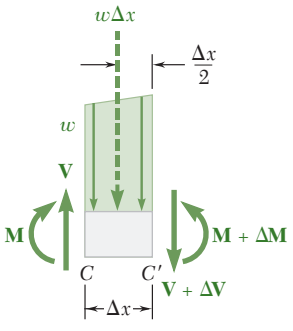
Quando uma viga sustenta mais de duas ou três cargas concentradas, ou quando sustenta cargas distribuídas, o método esboçado na Seção 7.5 para representar graficamente os esforços cortantes e os momentos fletores pode ser muito complicado. A construção do diagrama de esforço cortante e, em especial, do diagrama de momento fletor será bastante facilitada se forem levadas em consideração certas relações existentes entre a carga, o esforço cortante e o momento fletor.

Consideremos uma viga simplesmente apoiada *AB*, que sustenta uma carga distribuída w por unidade de comprimento (Fig. 7.11*a*), e sejam C e C' dois pontos da viga separados por uma distância Δx. O esforço cortante e o momento fletor em C são representados por V e M, respectivamente, e supõe-se que sejam positivos; o esforço cortante e o momento fletor em C' são representados por $V + \Delta V$ e $M + \Delta M$.

Vamos agora separar a parte CC' da viga e traçar seu diagrama de corpo livre (Fig. 7.11*b*), As forças exercidas sobre o corpo livre incluem uma carga de intensidade $w\,\Delta x$ e forças e binários internos em C e C'. Como se supôs que o esforço cortante e o momento fletor eram positivos, as forças e os momentos serão direcionados tal como mostra a figura.



(*a*)



(*b*)

Figura 7.11

Relações entre a carga e o esforço cortante. Escrevemos que a soma dos componentes verticais das forças que atuam no corpo livre CC' é zero:

$$V - (V + \Delta V) - w\,\Delta x = 0$$
$$\Delta V = -w\,\Delta x$$

Dividindo ambos os membros da equação por Δx e depois fazendo Δx tender a zero, obtemos:

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{7.1}$$

A Eq. (7.1) indica que, para uma viga carregada tal como mostra a Fig. 7.11*a*, a inclinação dV/dx da curva de esforço cortante é negativa; o valor absoluto da inclinação em qualquer ponto é igual à carga por unidade de comprimento desse ponto.

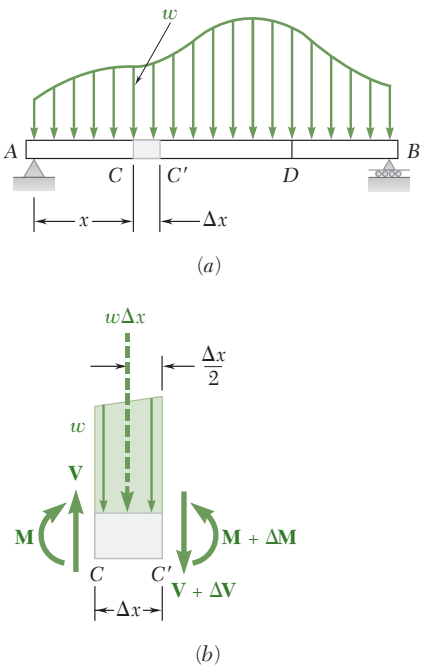


Figura 7.11 (repetida)

Integrando (7.1) entre os pontos C e D, obtemos:

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx \tag{7.2}$$

$$V_D - V_C = -(\text{área sob a curva de carregamento entre } C \text{ e } D) \tag{7.2′}$$

Observe que este resultado poderia também ter sido obtido considerando o equilíbrio na parte CD da viga, uma vez que a área sob a curva de carregamento representa a carga total aplicada entre C e D.

Deve-se observar que a Eq. (7.1) *não é valida* em um ponto em que uma carga concentrada é aplicada; em tal ponto, a curva do esforço cortante é descontínua, como vimos na Seção 7.5. Do mesmo modo, as Eqs. (7.2) e (7.2′) deixam de ser válidas quando cargas concentradas são aplicadas entre C e D, uma vez que elas não levam em consideração a súbita variação no esforço cortante causada por uma carga concentrada. As Eqs. (7.2) e (7.2′), portanto, devem ser aplicadas somente entre cargas concentradas consecutivas.

Relações entre o esforço cortante e o momento fletor. Retornando ao diagrama de corpo livre da Fig. 7.11*b* e escrevendo agora que a soma dos momentos em relação a C' é zero, obtemos:

$$(M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + w\Delta x\frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \tfrac{1}{2}w(\Delta x)^2$$

Dividindo os membros da equação por Δx e fazendo Δx tender a zero, obtemos:

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.3}$$

A Eq. (7.3) indica que a inclinação dM/dx da curva de momento fletor é igual ao valor do esforço cortante. Isto é verdadeiro para qualquer ponto em que o esforço cortante tenha um valor bem definido, ou seja, em qualquer ponto no qual nenhuma carga concentrada está aplicada. A Eq. (7.3) também mostra que o esforço cortante é zero nos pontos em que o momento fletor é o máximo. Essa propriedade facilita a determinação dos pontos em que a viga pode se romper por flexão.

Integrando (7.3) entre os pontos C e D, obtemos:

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx \tag{7.4}$$

$$M_D - M_C = \text{área sob a curva de esforço cortante entre } C \text{ e } D \tag{7.4′}$$

Observe que a área sob a curva de esforço cortante deve ser considerada positiva onde o esforço cortante é positivo, e negativa onde o esforço cortante é negativo. As Eqs. (7.4) e (7.4′) são válidas mesmo quando cargas concentradas são aplicadas entre C e D, desde que a curva de esforço cortante tenha sido corretamente traçada. As equações deixam de ser válidas, no entanto, se um *binário* é aplicado em um ponto entre C e D, uma vez que não levam em consideração a súbita variação no momento fletor causada por um binário (ver Problema Resolvido 7.7).

EXEMPLO Consideremos uma viga AB simplesmente apoiada de vão L que sustenta uma carga uniformemente distribuída w (Fig. 7.12*a*). A partir do diagrama de corpo livre da viga inteira, determinamos a intensidade das reações nos apoios: $R_A = R_B = wL/2$ (Fig. 7.12*b*). Em seguida, traçamos o diagrama de esforço cortante. Junto à extremidade A da viga, o esforço cortante é igual a R_A, ou seja, a $wL/2$, como podemos comprovar tomando uma parte muito pequena da viga como um corpo livre. Utilizando a Eq. (7.2), podemos então determinar o esforço cortante V a qualquer distância x a partir de A. Temos:

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

A curva de esforço cortante é, portanto, uma reta inclinada que corta o eixo x em $x = L/2$ (Fig. 7.12*c*). Considerando agora o momento fletor, primeiro observamos que $M_A = 0$. O valor M do momento fletor a qualquer distância x de A pode então ser obtido a partir da Eq. (7.4). Temos:

$$M - M_A = \int_0^x V\,dx$$

$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right)dx = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

A curva de momento fletor é uma parábola. O valor máximo do momento fletor ocorre quando $x = L/2$, uma vez que V (e, portanto, dM/dx) é zero para esse valor de x. Substituindo $x = L/2$ na última equação, obtemos $M_{máx} = wL^2/8$. ■

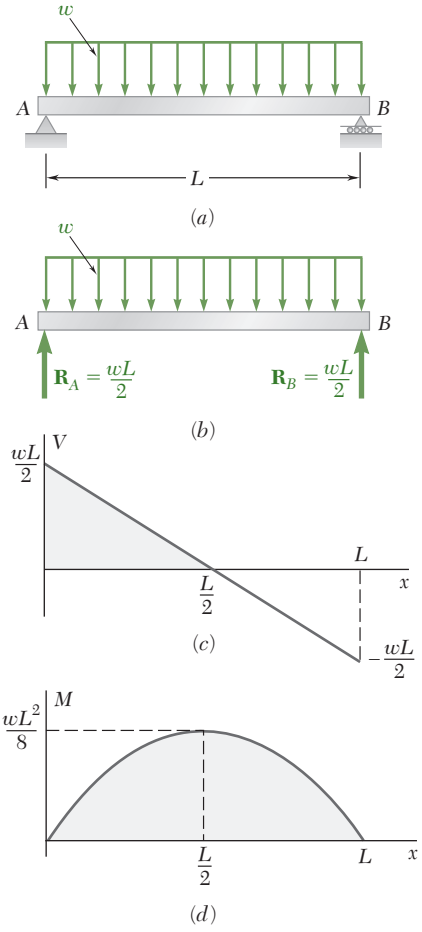
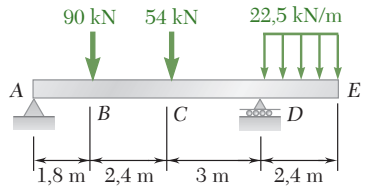


Figura 7.12

Na maior parte das aplicações de engenharia, o valor do momento fletor precisa ser conhecido somente em alguns poucos pontos específicos. Uma vez traçado o diagrama de esforço cortante e após M ter sido determinado em uma das extremidades da viga, pode-se então obter o valor do momento fletor em qualquer ponto dado calculando-se a área sob a curva de esforço cortante e utilizando-se a Eq. (7.4′). Por exemplo, como $M_A = 0$ para a viga da Fig. 7.12, o valor máximo do momento fletor para essa viga pode ser obtido simplesmente calculando-se a área do triângulo sombreado no diagrama de esforço cortante:

$$M_{máx.} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

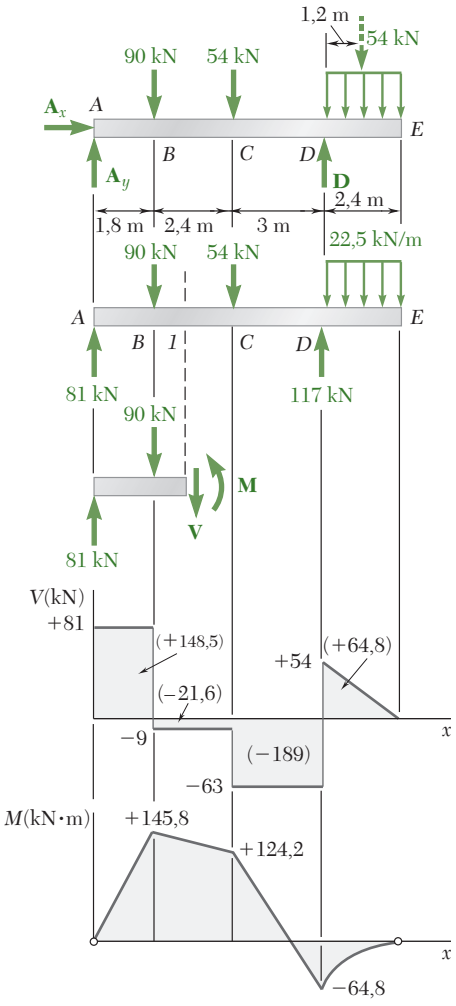
Neste exemplo, a curva de carregamento é uma reta horizontal, a curva de esforço cortante é uma reta inclinada e a curva de momento fletor é uma parábola. Se a curva de carregamento fosse uma reta inclinada (primeiro grau), a curva de esforço cortante seria uma parábola (segundo grau) e a curva de momento fletor, uma cúbica (terceiro grau). As curvas de esforço cortante e de momento fletor serão sempre, respectivamente, um ou dois graus acima da curva de carregamento. Portanto, assim que alguns poucos valores do esforço cortante e do momento fletor forem calculados, devemos ser capazes de esquematizar os diagramas de esforço cortante e de momento fletor sem realmente determinar as funções $V(x)$ e $M(x)$. Os diagramas esquemáticos obtidos serão mais exatos se fizermos uso de fato que, a qualquer ponto em que as curvas são contínuas, a inclinação da curva do esforço cortante é igual a $-w$ e a inclinação da curva do momento fletor é igual a V.



PROBLEMA RESOLVIDO 7.4

Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento mostrados na figura.

SOLUÇÃO



Corpo livre: viga inteira. Considerando a viga inteira como um corpo livre, determinamos as reações:

$$+\Sigma\circlearrowleft M_A = 0:$$
$$D(7{,}2\text{ m}) - (90\text{ kN})(1{,}8\text{ m}) - (54\text{ kN})(4{,}2\text{ m}) - (54\text{ kN})(8{,}4\text{ m}) = 0$$
$$D = +117\text{ kN} \qquad \mathbf{D} = 117\text{ kN}\uparrow$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad A_y - 90\text{ kN} - 54\text{ kN} + 117\text{ kN} - 54\text{ kN} = 0$$
$$A_y = +81\text{ kN} \qquad \mathbf{A}_y = 81\text{ kN}\uparrow$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad A_x = 0 \qquad \mathbf{A}_x = 0$$

Observamos ainda que o momento fletor é zero em A e E; assim, dois pontos (indicados por pequenos círculos) são obtidos no diagrama de momento fletor.

Diagrama de esforço cortante. Como $dV/dx = -w_x$, encontramos que, entre cargas e reações concentradas, a inclinação do diagrama de esforço cortante é zero (ou seja, o esforço cortante é constante). O esforço cortante em qualquer ponto é determinado dividindo-se a viga em duas parte e considerando qualquer dessas partes como uma corpo livre. Por exemplo, utilizando o trecho da viga esquerda da seção *1*, obtemos o esforço cortante entre B e C:

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad +81\text{ kN} - 90\text{ kN} - V = 0 \qquad V = -9\text{ kN}$$

Encontramos também que o esforço cortante é +54 kN imediatamente à direita de D e é zero na extremidade E. Como a inclinação $dV/dx = -w$. é contante entre D e E, o diagrama de esforço cortante entre esses dois pontos é uma linha reta.

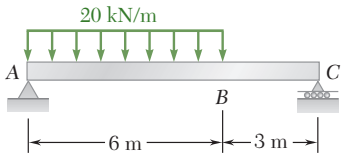
Diagrama de momente fletor. Lembremos que a área sob a curva de esforço cortante entre dois pontos é igual à variação do momento fletor entre esses mesmos dois pontos. Por conveniência, a área em cada trecho do diagrama de esforço cortante é calculada e indicada no diagrama. Uma vez que o momento fletor M_A na extremidade esquerda é zero, temos:

$$M_B - M_A = +108 \qquad M_B = +145{,}8\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_C - M_B = -21{,}6 \qquad M_C = +124{,}2\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_D - M_C = -189 \qquad M_D = -64{,}8\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_E - M_D = +48 \qquad M_E = 0$$

Como sabemos que M_E é nulo, uma verificação dos cálculos é obtida.

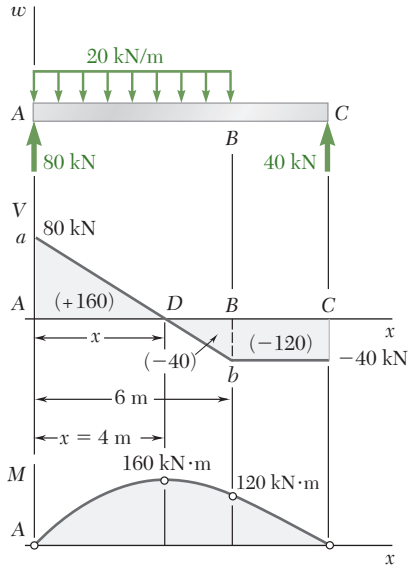
Entre as cargas concentradas e as reações, o esforço cortante é constante; portanto, a inclinação dM/dx é constante e o diagrama de momento fletor é traçado unindo-se os pontos conhecidos por segmentos de reta. Entre D e E, onde o diagrama de esforço cortante é um segmento reto inclinado, o diagrama de momento fletor é uma parábola.

Dos diagramas V e M, observamos que $|V_{máx}| = 81$ kN e $|M_{máx}| = 145{,}8$ kN · m.



PROBLEMA RESOLVIDO 7.6

Trace os diagramas de esforço constante e de momento fletor para a viga e o carregamento mostrados na figura, e determine a localização e a intensidade do momento fletor máximo.



SOLUÇÃO

Corpo livre: viga inteira. Considerando a viga inteira um corpo livre, obtemos as reações:

$$\mathbf{R}_A = 80\ \text{kN}\uparrow \qquad \mathbf{R}_C = 40\ \text{kN}\uparrow$$

Diagrama de esforço cortante. O esforço cortante imediatamente à direita de A é $V_A = +80$ kN. Uma vez que a variação no esforço cortante entre dois pontos é igual a *menos* a área sob a curva de carregamento entre esses dois pontos, obtemos V_B da seguinte maneira:

$$V_B - V_A = -(20\ \text{kN/m})(6\ \text{m}) = -120\ \text{kN}$$
$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40\ \text{kN}$$

Como a inclinação $dV/dx = -w$ é constante entre A e B, o diagrama de esforço cortante entre esses dois pontos é representado por uma linha reta. Entre B e C, a área sob a curva de carregamento é nula. Portanto,

$$V_C - V_B = 0 \qquad V_C = V_B = -40\ \text{kN}$$

e o esforço cortante é constante entre B e C.

Diagrama de momento fletor. Observamos que o momento fletor em cada extremidade da viga é nulo. Para determinar o momento fletor máximo, posicionamos a seção D da viga onde $V = 0$. Temos

$$V_D - V_A = -wx$$
$$0 - 80\ \text{kN} = -(20\ \text{kN/m})x$$

e, para x: $x = 4$ m ◀

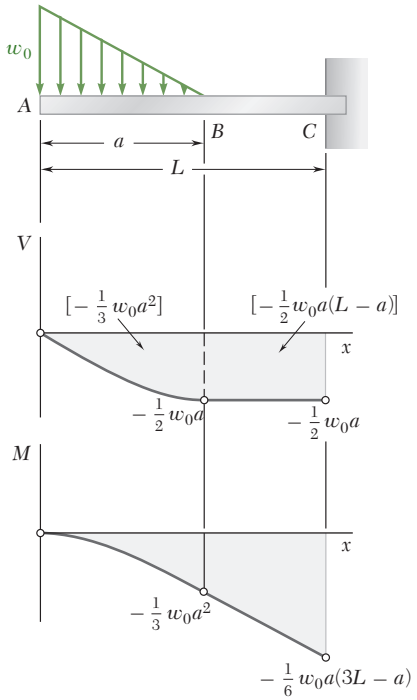
O momento fletor máximo ocorre no ponto D, no qual temos $dM/dx = V = 0$. As áreas das várias partes do diagrama de esforço cortante são calculadas e anotadas (entre parênteses) no diagrama. Como a área do diagrama de esforço cortante entre dois pontos é igual à variação do momento fletor entre esses dois pontos, temos:

$$M_D - M_A = +160\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_D = +160\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_B - M_D = -\ 40\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_B = +120\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_C - M_B = -120\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_C = 0$$

O diagrama de momento fletor consiste em um arco parabólico seguido de um segmento de reta; a inclinação da parábola em A é igual ao valor de V nesse ponto.

O momento fletor máximo é:

$$M_{\text{máx}} = M_D = +160\ \text{kN} \cdot \text{m}$$ ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 7.6

Esboce os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga em balanço mostrada na figura.

SOLUÇÃO

Diagrama de esforço cortante. Na extremidade da viga, encontramos $V_A = 0$. Entre A e B, a área sob a curva de carregamento é $\frac{1}{2}w_0a$; encontramos V_B da seguinte maneira:

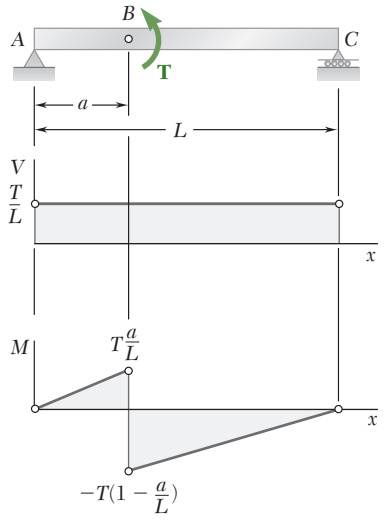
$$V_B - V_A = -\tfrac{1}{2}w_0a \qquad V_B = -\tfrac{1}{2}w_0a$$

Entre B e C, a viga não está carregada; portanto, $V_C = V_B$. Em A, temos $w = w_0$, e, de acordo com a Eq. (7.1), a inclinação da curva de esforço cortante é $dV/dx = -w_0$, enquanto em B a inclinação é $dV/dx = 0$. Entre A e B, o carregamento diminui linearmente, e o diagrama de esforço cortante é parabólico. Entre B e C, $w = 0$, e o diagrama de esforço cortante é uma linha horizontal.

Diagrama de momento fletor. Observamos que $M_A = 0$ na extremidade livre da viga. Calculamos a área sob a curva de esforço cortante da seguinte maneira:

$$M_B - M_A = -\tfrac{1}{3}w_0a^2 \qquad M_B = -\tfrac{1}{3}w_0a^2$$
$$M_C - M_B = -\tfrac{1}{2}w_0a(L-a)$$
$$M_C = -\tfrac{1}{6}w_0a(3L-a)$$

O esboço do diagrama de momento fletor é completado recordando-se que $dM/dx = V$. Encontramos que entre A e B o diagrama é representado por uma curva cúbica com inclinação nula em A, e entre B e C o diagrama é representado por uma linha reta.



PROBLEMA RESOLVIDO 7.7

A viga simplesmente apoiada AC é carregada com binário de intensidade T aplicado no ponto B. Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para viga.

SOLUÇÃO

Corpo livre: viga inteira. A viga inteira é tomada como um corpo livre, e obtemos:

$$\mathbf{R}_A = \frac{T}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_C = \frac{T}{L}\downarrow$$

Diagramas de esforço cortante e de momento fletor. O esforço cortante em qualquer seção é constante e igual a T/L. Como um binário é aplicado em B, o diagrama de momento fletor é descontínuo em B; o momento fletor diminui abruptamente de um valor igual a T.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nessa seção, aprendemos como usar as relações existentes entre carregamento, esforço cortante e momento fletor para simplificar o desenho dos diagramas de esforço cortante e de momento fletor. Essas relações são:

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{7.1}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.3}$$

$$V_D - V_C = -(\text{área sob a curva de carregamento entre } C \text{ e } D) \tag{7.2'}$$

$$M_D - M_C = (\text{área sob a curva de esforço cortante entre } C \text{ e } D) \tag{7.4'}$$

Levando em conta essas relações, podemos usar os seguintes procedimentos para traçar os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para uma viga:

1. Traçar um diagrama de corpo livre para a viga inteira e usá-lo para determinar as reações nos apoios da viga.

2. Traçar o diagrama de esforço cortante. Isso pode ser feito como na seção anterior, cortando a viga em vários pontos e considerando o diagrama de corpo livre de uma das duas partes da viga que você obteve [Problema Resolvido 7.3]. Podemos, no entanto, considerar um dos seguintes procedimentos alternativos:

a. O esforço cortante *V* em qualquer ponto da viga é a soma das reações e das cargas à esquerda desse ponto: uma força para cima é contada como positiva e uma força para baixo é contada como negativa.

b. Para uma viga que carrega uma carga distribuída, podemos começar de um ponto onde V é conhecido e usar a Eq. (7.2′) repetidamente para encontrar V em todos os outros pontos de interesse.

3. Traçar o diagrama de momento fletor usando o seguinte procedimento:

a. Calcular a área sob cada parte da curva de esforço cortante, atribuindo um sinal positivo às áreas localizadas acima do eixo x e um sinal negativo às áreas localizadas abaixo do eixo x.

b. Aplicar a Eq. (7.4′) repetidamente [Problemas Resolvidos 7.4 e 7.5], começando da extremidade esquerda da viga, onde $M = 0$ (exceto se um binário for aplicado nessa extremidade, ou se a viga for uma viga em balanço com a extremidade esquerda fixa).

c. No caso de um binário ser aplicado à viga, tome o cuidado de mostrar uma descontinuidade no diagrama do momento fletor *aumentando* o valor de M nesse ponto por um valor igual à intensidade do binário, se o binário estiver no *sentido horário*, ou *diminuindo* o valor de M desse valor se o binário estiver no *sentido anti-horário* [Problema Resolvido 7.7].

4. Determine a localização e a intensidade de $|M|_{max}$. O máximo valor absoluto do momento fletor ocorre em um dos pontos onde $dM/dx = 0$, ou seja, conforme a Eq. (7.3), em um ponto onde V é igual a zero ou muda de sinal. Devemos, então:

a. determinar, pelo diagrama de esforço cortante, os valores de $|M|$ em que *V* muda de sinal: isso ocorrerá sob cargas concentradas [Problema Resolvido 7.4].

(*continua*)

b. determinar os pontos em que $V = 0$ e os valores correspondentes de $|M|$: ocorrerá sob uma carga distribuída. Para achar a distância x entre o ponto C, onde a carga distribuída começa, e o ponto D, onde o esforço cortante é zero, use a Eq. (7.2′); para V_C, usemos o valor conhecido do esforço cortante no ponto C; para V_D, usemos zero e demonstremos a área sob a curva de carregamento como função de x [Problema Resolvido 7.5].

5. É possível melhorar a qualidade dos desenhos lembrando que, a qualquer ponto dado, de acordo com as Eqs. (7.1) e (7.3), a inclinação da curva V é igual a $-w$ e a inclinação da curva M é igual a V. Em particular, seus desenhos devem mostrar claramente onde a inclinação das curvas é nula.

6. Finalmente, para vigas que sustentam uma carga distribuída demonstrada como uma função $w(x)$, lembremo-nos de que o esforço cortante V pode ser obtido integrando a função $-w(x)$ e o momento fletor M, integrando $V(x)$ [Eqs. (7.3) e (7.4)].

PROBLEMAS

7.63 Usando o método da Seção 7.6, resolva o Problema 7.29.

7.64 Usando o método da Seção 7.6, resolva o Problema 7.30.

7.65 Usando o método da Seção 7.6, resolva o Problema 7.31.

7.66 Usando o método da Seção 7.6, resolva o Problema 7.32.

7.67 Usando o método da Seção 7.6, resolva o Problema 7.33.

7.68 Usando o método da Seção 7.6, resolva o Problema 7.34.

7.69 e 7.70 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

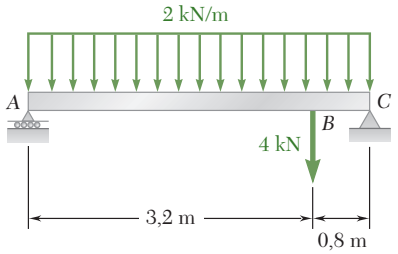


Figura P7.69

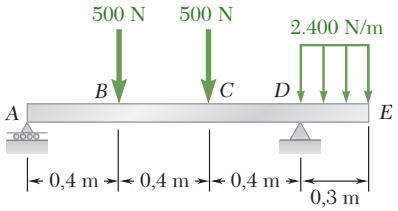


Figura P7.70

7.71 Usando o método da Seção 7.6, resolva o Problema 7.39.

7.72 Usando o método da Seção 7.6, resolva o Problema 7.40.

7.73 Usando o método da Seção 7.6, resolva o Problema 7.41.

7.74 Usando o método da Seção 7.6, resolva o Problema 7.42.

7.75 e 7.76 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

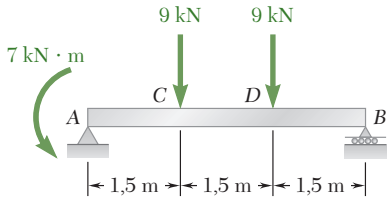


Figura P7.75

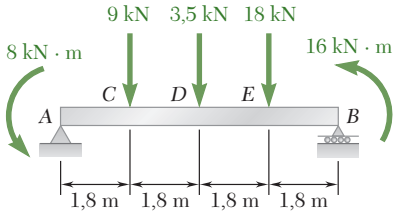


Figura P7.76

7.77 e 7.78 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine a intensidade e a localização do momento fletor máximo.

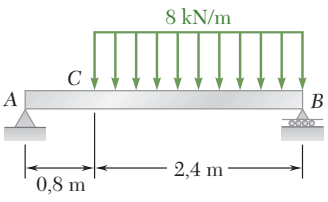


Figura P7.77

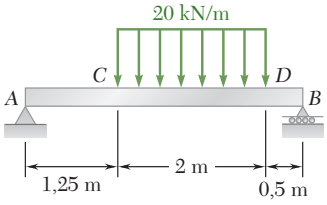


Figura P7.78

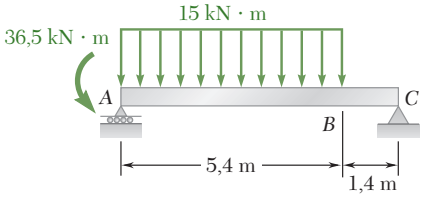


Figura P7.79

7.79 e 7.80 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine a intensidade e a localização do máximo valor absoluto do momento fletor.

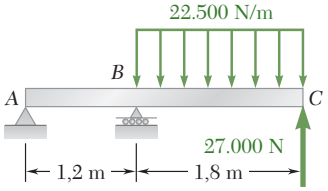


Figura P7.80

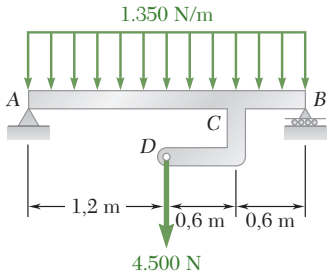


Figura P7.81

7.81 (*a*) Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga *AB*. (*b*) Determine a intensidade e a localização do máximo valor absoluto do momento fletor.

7.82 Resolva o Problema 7.81, considerando que a força aplicada de 4.500 N em *D* é direcionada para cima.

7.83 Para a viga e carregamento mostrados na figura, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine a intensidade e localização do máximo valor absoluto do momento fletor.

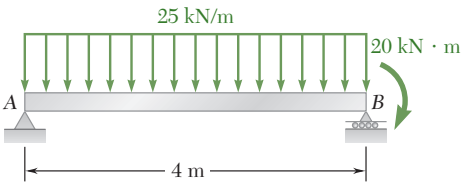


Figura P7.83

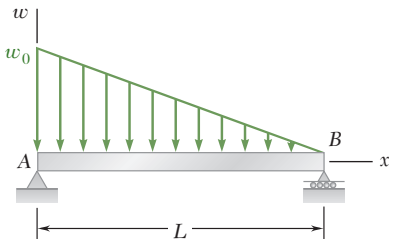


Figura P7.85

7.84 Resolva o Problema 7.83 considerando que o momento de 20 kN · m aplicado em *B* é no sentido anti-horário.

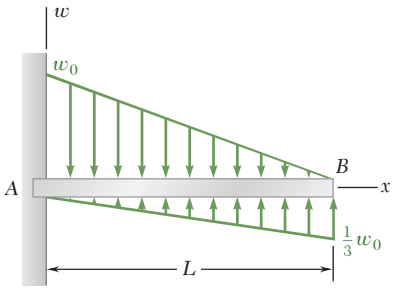


Figura P7.86

7.85 e 7.86 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, (*a*) deduza as equações das curvas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine a intensidade e a localização do máximo momento fletor.

7.87 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, (*a*) deduza as equações das curvas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine a intensidade e a localização do máximo momento fletor.

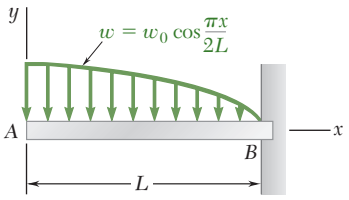


Figura P7.87

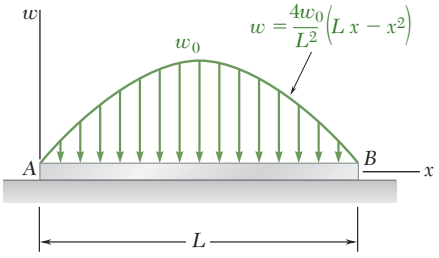


Figura P7.88

7.88 A viga *AB*, que está disposta sobre o solo, sustenta a carga parabólica mostrada na figura. Considerando que a reação para cima do solo é uniformemente distribuída, (*a*) escreva as equações das curvas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine o máximo momento fletor.

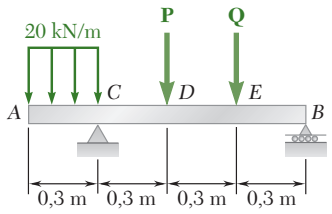


Figura P7.89

7.89 A viga *AB* está sujeita ao carregamento uniformemente distribuído mostrado na figura e a duas forças desconhecidas **P** e **Q**. Sabendo que foi experimentalmente determinado que o momento fletor é +800 N · m em *D* e +1.300 N · m em *E*, (*a*) determine **P** e **Q**, (*b*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga.

7.90 Resolva o Problema 7.89, considerando que o momento fletor que foi encontrado era +650 N · m em *D* e +1.450 N · m em *E*.

***7.91** A viga *AB* está sujeita ao carregamento uniformemente distribuído mostrado na figura e a duas forças desconhecidas **P** e **Q**. Sabendo que foi experimentalmente determinado que o momento fletor é +8,2 kN · m em *D* e +7,5 kN · m em *E*, (*a*) determine **P** e **Q**, (*b*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga.

***7.92** Resolva o Problema 7.91, considerando que o momento fletor que foi encontrado era +8 kN · m em *D* e +9,2 kN · m em *E*.

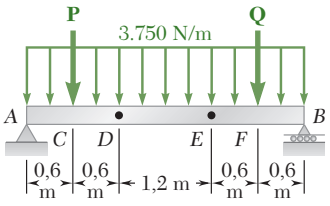


Figura P7.91

CABOS

*7.7 Cabos com cargas concentradas

Cabos são usados em muitos usos da engenharia, tais como pontes suspensas, linhas de transmissão, teleféricos, cabos de fixação para torres elevadas, etc. Os cabos podem ser divididos em duas categorias, de acordo com seu carregamento: (1) cabos que sustentam cargas concentradas e (2) cabos que sustentam cargas distribuídas. Nesta seção, são examinados os cabos da primeira categoria.

Considere um cabo preso a dois pontos fixos *A* e *B* sustentando *n* cargas verticais concentradas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, ..., $\mathbf{P}_n$ (Fig.7.13*a*). Supomos que o cabo é *flexível*, ou seja, que sua resistência à flexão é pequena e pode ser desprezada. Além disso, supomos que o *peso do cabo é desprezível* comparado com as cargas sustentadas pelo mesmo. Qualquer parte de cabo entre cargas sucessivas pode, portanto, ser considerada um elemento submetido à ação de duas forças, e as forças internas em qualquer ponto do cabo se reduzem a uma força *de tração direcionada ao longo do cabo.*

Consideramos que cada uma das cargas está em uma dada linha vertical, ou seja, que a distância horizontal do apoio *A* até cada uma das cargas é conhecida; supomos também que as distâncias horizontal e vertical entre os apoios são conhecidas. Nossa proposta é que se determinem a forma do cabo, isto é, a distância vertical do apoio *A* até cada um dos pontos C_1, C_2, ..., C_n e também a tração *T* em cada parte do cabo.

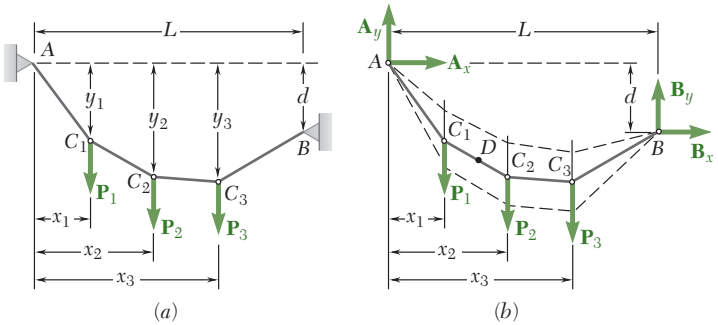


Figura 7.13

Em primeiro lugar, traçamos o diagrama de corpo livre do cabo inteiro (Fig. 7.13*b*). Como a inclinação dos trechos de cabo presos em *A* e *B* não é conhecida, as reações em *A* e *B* devem ser representadas por dois componentes cada. Assim, quatro incógnitas estão envolvidas, e as três equações de equilíbrio não são suficientes para se determinar as reações em *A* e *B*.* Devemos, então, obter uma equação adicional considerando

Foto 7.3 Como o peso do cabo do teleférico mostrado é desprezível, em comparação com o peso das cadeiras e dos esquiadores, podem-se usar os métodos desta seção para se determinar a força em qualquer ponto do cabo.

* É evidente que, o cabo não é um corpo rígido; as equações de equilíbrio representam, portanto, *condições necessárias, mas não suficientes* (ver Seção 6.11).

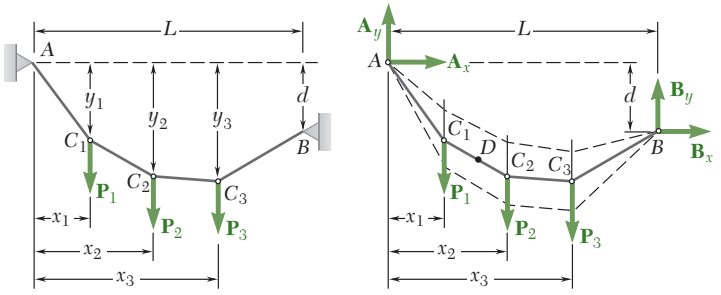


Figura 7.13 (repetida)

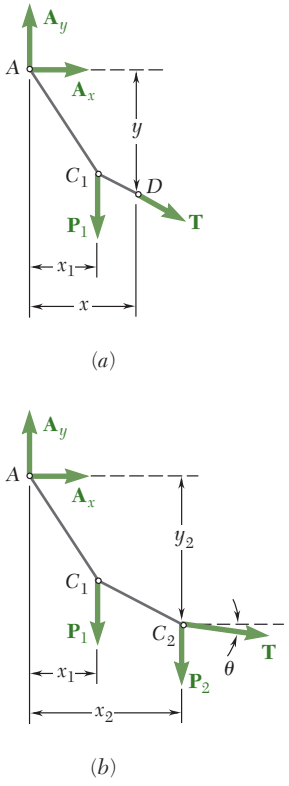


Figura 7.14

o equilíbrio de uma parte do cabo. Isto será possível se conhecermos as coordenadas x e y de um ponto D do cabo. Traçando o diagrama de corpo livre do trecho AD do cabo (Fig.7.14*a*) e escrevendo $\Sigma M_D = 0$, obtemos uma relação adicional entre os componentes escalares A_x e A_y e podemos determinar as reações em A e B. No entanto, o problema permaneceria indeterminado se não conhecêssemos as coordenadas de D, a não ser que fosse dada alguma outra relação entre A_x e A_y (ou então entre B_x e B_y). O cabo pode ficar suspenso em qualquer um dos vários modos possíveis, como indicam as linhas tracejadas da Fig. 7.13*b*.

Uma vez que A_x e A_y sejam determinados, pode-se facilmente encontrar a distância vertical de A até qualquer ponto do cabo. Considerando o ponto C_2, por exemplo, traçamos o diagrama de corpo livre da parte AC_2 do cabo (Fig. 7.14*b*). Dado $\Sigma M_{C_2} = 0$, obtemos uma equação que pode ser resolvida para y_2. Dado $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, obtemos os componentes da força $\mathbf{T}$ que representa a tração no trecho do cabo à direita de C_2. Observamos que $T \cos \theta = -A_x$; *o componente horizontal da força de tração é o mesmo em qualquer ponto do cabo.* Segue-se que a tração T é máxima quando $\cos \theta$ é mínimo, isto é, na parte do cabo que tem o maior ângulo de inclinação θ. Evidentemente, tal parte do cabo deve ser adjacente a um dos dois apoios do cabo.

*7.8 Cabos com cargas distribuídas

Considere um cabo preso a dois pontos fixos A e B e sustentando uma carga *distribuída* (Fig. 7.15*a*). Vimos na seção precedente que, para um cabo que sustenta cargas concentradas, a força interna em qualquer ponto é uma força de tração direcionada ao longo do cabo. No caso de um cabo que sustenta uma carga distribuída, o mesmo toma a forma de uma curva e a força interna em um ponto D torna-se uma força de tração $\mathbf{T}$ *direcionada ao longo da tangente a essa curva.* Nesta seção, você vai aprender a determinar a tração em qualquer ponto de um cabo que sustenta uma dada carga distribuída. Nas próximas seções, a forma do cabo será determinada para dois tipos específicos de cargas distribuídas.

Considerando o caso mais geral de carga distribuída, traçamos o diagrama de corpo livre do trecho do cabo que se estende do ponto mais baixo C até um dado ponto D do cabo (Fig. 7.15*b*). As forças exercidas no corpo livre são: a força de tração $\mathbf{T}_0$ em C, que é horizontal, a força

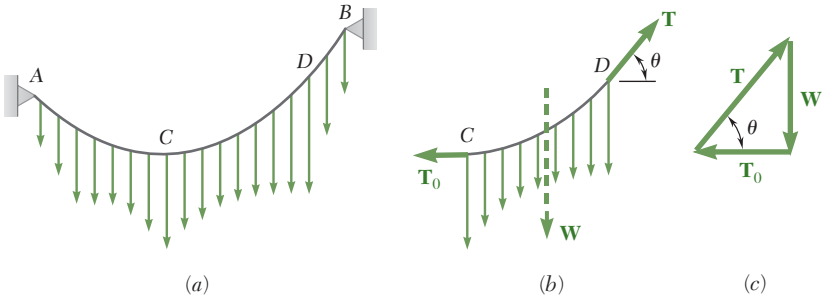


Figura 7.15

de tração **T** em D, direcionada ao longo da tangente ao cabo em D, e a resultante **W** da carga distribuída sustentada pela parte CD do cabo. Desenhando o correspondente triângulo de forças (Fig. 7.15*c*), obtemos as seguintes relações:

$$T\cos\theta = T_0 \qquad T\,\text{sen}\,\theta = W \tag{7.5}$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{W}{T_0} \tag{7.6}$$

A partir das Eqs. (7.5), é evidente que o componente horizontal da força de tração **T** é o mesmo em qualquer ponto e que o componente vertical de **T** é igual à intensidade W da carga medida a partir do ponto mais baixo. As Eqs. (7.6) mostram que a tração T é mínima no ponto mais baixo e máxima em um dos dois pontos de apoio.

*7.9 Cabo parabólico

Vamos supor, agora, que o cabo AB sustenta uma carga *uniformemente distribuída ao longo da horizontal* (Fig. 7.16*a*). Cabos de pontes suspensas podem ser considerados como sendo carregados desse modo, desde que o peso dos cabos seja leve comparado com o peso dos tabuleiros da ponte. Representamos por w a carga por unidade de comprimento (*medida horizontalmente*) e a indicamos em N/m. Escolhendo eixos coordenados com a origem no ponto mais baixo C do cabo, descobrimos que a intensidade W da carga total, sustentada pela parte do cabo que se estende desde C até o ponto D de coordenadas x e y, é $W = wx$. As relações (7.6), definindo a intensidade e a direção da força de tração em D, tornam-se:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2x^2} \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{wx}{T_0} \tag{7.7}$$

Além disso, a distância de D até a linha de ação da resultante **W** é igual à metade da distância horizontal de C até D (Fig. 7.16*b*). Somando os momentos em relação a D, temos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad wx\frac{x}{2} - T_0 y = 0$$

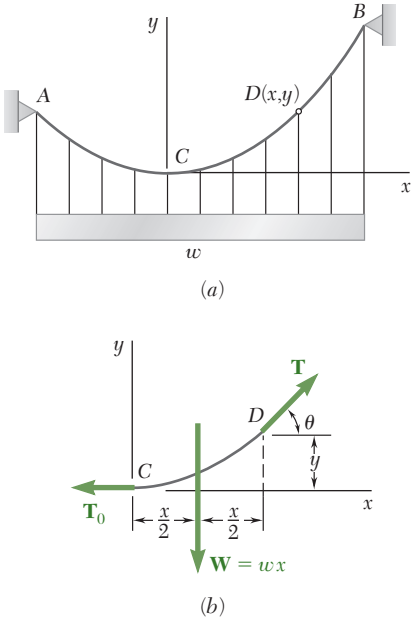


Figura 7.16

e, para y:

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

Esta é a equação de uma *parábola* com um eixo vertical e seu vértice na origem do sistema de coordenadas. A curva formada por cabos uniformemente carregados ao longo da horizontal é, portanto, uma parábola.*

Quando os apoios A e B do cabo têm a mesma elevação, a distância L entre esses apoios é chamada de *vão* do cabo e a distância vertical h, desde os apoios até o ponto mais baixo, é denominada *flecha* do cabo (Fig. 7.17*a*). Se o vão e a flecha de um cabo são conhecidos e se a carga w por unidade de comprimento horizontal é dada, pode-se encontrar a tração mínima T_0 substituindo-se $x = L/2$ e $y = h$ na Eq. (7.8). As Eqs. (7.7) vão, então, fornecer a tração e a inclinação em qualquer ponto do cabo, e a Eq. (7.8) vai definir a forma do cabo.

Quando os apoios tiverem diferentes elevações, a posição do ponto mais baixo do cabo não é conhecida, e as coordenadas x_A, y_A e x_B, y_B dos apoios devem ser determinadas. Para fazer isso, indicamos que as coordenadas de A e B satisfazem a Eq. (7.8) e que $x_B - x_A = L$ e $y_B - y_A = d$, onde L e d representam, respectivamente, as distâncias horizontal e vertical entre os dois apoios (Fig. 7.17*b* e *c*).

O comprimento do cabo desde seu ponto mais baixo C até o apoio B pode ser obtido por meio da equação:

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{7.9}$$

Ao distinguir a Eq. (7.8), obtemos o derivado $dy/dx = wx/T_0$; substituindo na Eq. (7.9) e expandindo a raiz quadrada em uma série infinita, temos

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{w^2x^2}{T_0^2}}\, dx = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{w^2x^2}{2T_0^2} - \frac{w^4x^4}{8T_0^4} + \cdots\right) dx$$

$$s_B = x_B\left(1 + \frac{w^2x_B^2}{6T_0^2} - \frac{w^4x_B^4}{40T_0^4} + \cdots\right)$$

e, como, $wx_B^2/2T_0 = y_B$,

$$s_B = x_B\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^4 + \cdots\right] \tag{7.10}$$

A série converge para valores da razão y_B/x_B menores que 0,5; na maioria dos casos, essa razão é muito menor, e somente os dois primeiros termos da série precisam ser calculados.

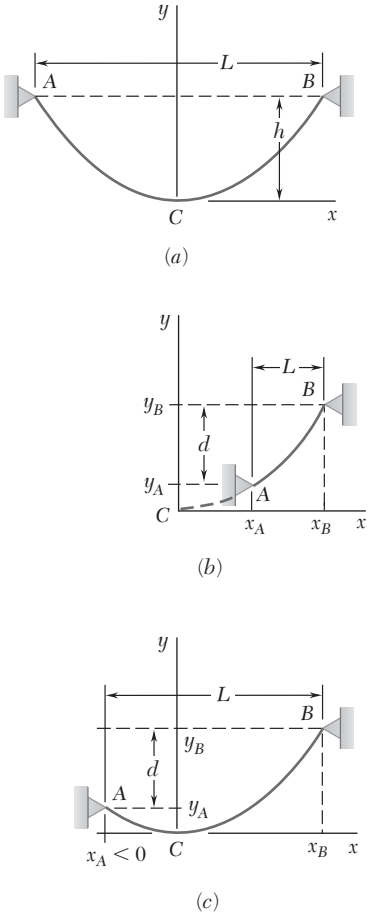
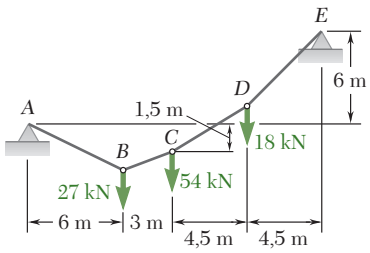


Figura 7.17

* Cabos suspensos sob a ação de seu próprio peso não são uniformemente carregados na direção horizontal e não formam uma parábola. No entanto, o erro apresentado, considerando uma forma parabólica para cabos suspensos sob a ação de seu próprio peso, é pequeno quando o cabo está suficientemente tenso. Uma discussão completa dos cabos suspensos sob ação de seu próprio peso é dada na próxima seção.



PROBLEMA RESOLVIDO 7.8

O cabo AE sustenta três cargas verticais nos pontos indicados. Se o ponto C está 1,5 m abaixo do apoio esquerdo, determine (*a*) a elevação dos pontos B e D, (*b*) a inclinação e a tração máximas no cabo.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. Os componentes da reação $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$ são determinados como se segue:

Corpo livre: cabo inteiro

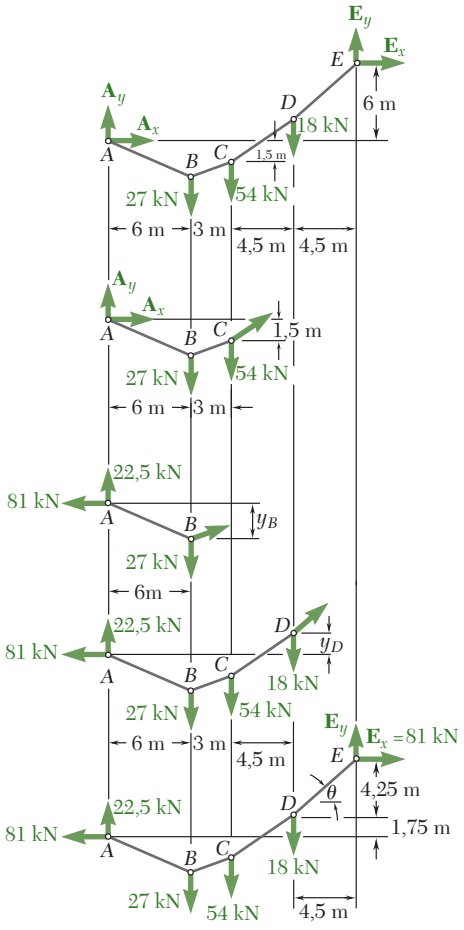
$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0:$$
$$A_x(6\text{ m}) - A_y(18\text{ m}) + (27\text{ kN})(12\text{ m}) + (54\text{ kN})(9\text{ m}) + (18\text{ kN})(4{,}5\text{ m}) = 0$$
$$6A_x - 18A_y + 891 = 0$$

Corpo livre: ABC

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad -A_x(15\text{ m}) - A_y(9\text{ m}) + (27\text{ kN})(3\text{ m}) = 0$$
$$-1{,}5A_x - 9A_y + 81 = 0$$

Resolvendo as duas equações simultaneamente, obtemos:

$$A_x = -81\text{ kN} \qquad \mathbf{A}_x = 81\text{ kN} \leftarrow$$
$$A_y = +22{,}5\text{ kN} \qquad \mathbf{A}_y = 22{,}5\text{ kN} \uparrow$$



a. Elevação dos pontos *B* e *D*.

Corpo livre: AB Considerando a parte AB do cabo um corpo livre, temos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (81\text{ kN})y_B - (22{,}5\text{ kN})(6\text{ m}) = 0$$
$$y_B = 1{,}67\text{ m abaixo de } A \quad \blacktriangleleft$$

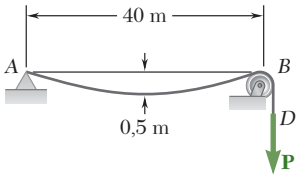
Corpo livre: ABCD. Usando a parte $ABCD$ do cabo como um corpo livre, temos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0:$$
$$-(81\text{ kN})y_D - (22{,}5\text{ kN})(13{,}5\text{ m}) + (27\text{ kN})(7{,}5\text{ m}) + (54\text{ kN})(4{,}5\text{ m}) = 0$$
$$y_D = 1{,}75\text{ m acima de } A \quad \blacktriangleleft$$

b. Inclinação e tração máximas Observamos que a inclinação máxima ocorre na parte DE. Como o componente horizontal da tração é constante e igual a 81 kN, temos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{4{,}25}{4{,}5\text{ m}} \qquad \theta = 43{,}4° \quad \blacktriangleleft$$

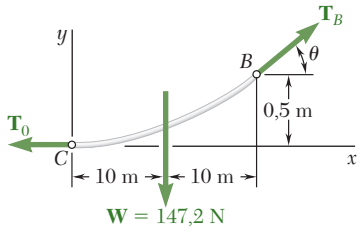
$$T_{\text{máx.}} = \frac{81\text{ kN}}{\cos\theta} \qquad T_{\text{máx}} = 111{,}6\text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 7.9

Um cabo leve é preso a um apoio em *A*, passa por uma pequena roldana em *B* e sustenta uma carga **P**. Sabendo que a flecha do cabo é 0,5 m e que a massa por unidade de comprimento do cabo é 0,75 kg/m, determine (*a*) a intensidade da carga **P**, (*b*) a inclinação do cabo em *B*, (*c*) o comprimento total do cabo de *A* até *B*. Como a razão entre a flecha e o vão é pequena, suponha que o cabo é parabólico. Despreze, também, o peso do trecho do cabo *B* até *D*.

SOLUÇÃO



a. Carga P. Representamos por *C* o ponto mais baixo do cabo e traçamos o diagrama de corpo livre do trecho *CB* do cabo. Considerando que a carga é uniformemente distribuída ao longo da horizontal, temos:

$$w = (0{,}75\ \text{kg/m})(9{,}81\ \text{m/s}^2) = 7{,}36\ \text{N/m}$$

A carga total para a parte *CB* do cabo é

$$W = wx_B = (7{,}36\ \text{N/m})(20\ \text{m}) = 147{,}2\ \text{N}$$

e é aplicada no ponto médio entre *C* e *B*. Somando os momentos em relação a *B*, temos

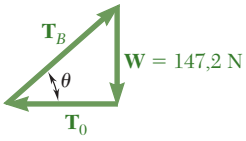
$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (147{,}2\ \text{N})(10\ \text{m}) - T_0(0{,}5\ \text{m}) = 0 \qquad T_0 = 2.944\ \text{N}$$

Do triângulo de forças, obtemos:

$$T_B = \sqrt{T_0^2 + W^2}$$
$$= \sqrt{(2.944\ \text{N})^2 + (147{,}2\ \text{N})^2} = 2.948\ \text{N}$$

Como a tração em cada lado da roldana é a mesma, encontramos:

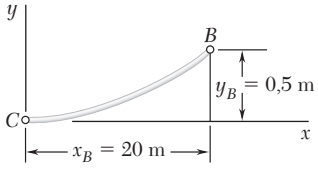
$$P = T_B = 2.948\ \text{N} \quad \blacktriangleleft$$



b. Inclinação do cabo em *B*. Obtemos também do triângulo de forças:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{W}{T_0} = \frac{147{,}2\ \text{N}}{2.944\ \text{N}} = 0{,}05$$

$$\theta = 2{,}9° \quad \blacktriangleleft$$



c. Comprimento do cabo. Aplicando a Eq. (7.10) entre *C* e *B*, temos:

$$s_B = x_B\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 + \cdots\right] =$$
$$= (20\ \text{m})\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{0{,}5\ \text{m}}{20\ \text{m}}\right)^2 + \cdots\right] = 20{,}00833\ \text{m}$$

O comprimento total do cabo entre *A* e *B* é o dobro desse valor.

$$\text{Comprimento} = 2s_B = 40{,}0167\ \text{m} \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas desta seção, aplicaremos as equações de equilíbrio a *cabos contidos em um plano vertical.* Consideramos que o cabo não resiste à flexão, de modo que a força de tração no cabo é sempre direcionada ao longo do cabo.

A. Na primeira parte desta seção, consideramos cabos sujeitos a cargas concentradas. Como o peso do cabo é desprezado, o cabo é reto entre as cargas.

Sua solução consistirá nos seguintes passos:

1. Traçar um diagrama de corpo livre do cabo inteiro mostrando as **cargas** e os componentes horizontal e vertical da reação em cada apoio. Usar esse diagrama de corpo livre para escrever as equações de equilíbrio correspondentes.

2. Deparames com quatro componentes desconhecidos e somente três equações de equilíbrio (ver Fig. 7.13). Devemos, portanto, encontrar uma informação adicional, tal como a *posição* de um ponto no cabo ou a *inclinação* do cabo em um dado ponto.

3. Depois que tivermos identificado no cabo o ponto em que a informação adicional existe, corte o cabo nesse ponto e tracemos um diagrama de corpo livre de uma das duas partes do cabo que obtevemos.

a. Se sabemos a posição do ponto em que cortamos o cabo, ao escrever $\Sigma M = 0$ em relação àquele ponto para o novo corpo livre, fornecerá as equações adicionais necessárias para resolver os quatro componentes desconhecidos das reações [Problema Resolvido 7.8].

b. Se sabemos a inclinação da parte do cabo que cortamos, ao escrever $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$ para o novo corpo livre, fornecerá duas equações de equilíbrio que, junto com as três equações originais, poderão ser resolvidas para os quatro componentes de reação e para a tração no cabo em que ele foi cortado.

4. Para achar a elevação de um dado ponto do cabo e a inclinação e a tração nesse ponto quando as reações nos apoios tiverem sido encontradas, você deve cortar o cabo nesse ponto e traçar um diagrama de corpo livre de uma das duas partes do cabo que você obteve. Escrever $\Sigma M = 0$ em relação ao ponto dado, obtemos sua elevação. Considerando $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, obtemos os componentes da força de tração, a partir dos quais a sua intensidade e a sua direção podem ser facilmente encontradas.

5. Para um cabo que sustenta somente cargas verticais, observaremos que *o componente horizontal da força de tração é o mesmo em qualquer ponto.* Assim, para um cabo sujeito a essas condições de carregamento, a *tração máxima ocorre onde o cabo tem a inclinação máxima.*

B. Na segunda parte desta seção, consideramos cabos que carregam uma carga uniformemente distribuída ao longo da horizontal. A forma do cabo é, então, parabólica.

(*continua*)

Essa solução vai usar um ou mais dos seguintes conceitos:

1. Colocando a origem do sistema de coordenadas no ponto mais baixo do cabo e direcionando os eixos x e y para a direita e para cima, respectivamente, descobrimos que *a equação da parábola* é:

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

A tração mínima no cabo ocorre na origem, onde o cabo é horizontal e a tração máxima ocorre no apoio em que a inclinação é máxima.

2. Se os apoios do cabo têm a mesma elevação, a flecha h do cabo é a distância vertical entre o ponto mais baixo do cabo até a linha horizontal que une os suportes. Para resolver um problema que envolva esse tipo de cabo parabólico, devemos escrever a Eq. (7.8) para um dos apoios; essa equação pode ser resolvida para uma das incógnitas.

3. Se os apoios do cabo têm elevações diferentes, teremos que escrever a Eq. (7.8) para cada um dos apoios (ver Fig. 7.17).

4. Para encontrar o comprimento do cabo desde o seu ponto mais baixo até um dos seus apoios, poderemos usar a Eq. (7.10). Na maioria dos casos, teremos que calcular somente os dois primeiros termos da série.

PROBLEMAS

7.93 Duas cargas estão suspensas no cabo *ABCD* tal como mostra a figura. Sabendo que $h_B = 1{,}8$ m, determine (*a*) a distância h_C, (*b*) os componentes da reação em *D*, (*c*) a tração máxima no cabo.

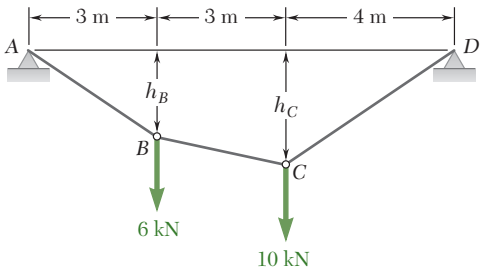


Figura P7.93 e P7.94

7.94 Sabendo que a tensão máxima do cabo *ABCD* é 15 kN, determine (*a*) a distância h_B, (*b*) a distância h_C.

7.95 Se $d_C = 2{,}4$ m, determine (*a*) a reação em *A*, (*b*) a reação em *E*.

7.96 Se $d_C = 1{,}4$ m, determine (*a*) a reação em *A*, (*b*) a reação em *E*.

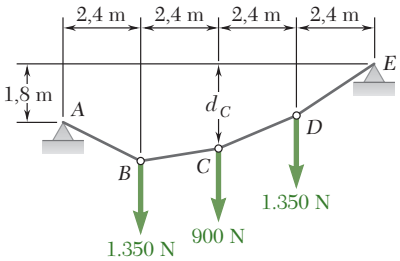


Figura P7.95 e P7.96

7.97 Sabendo que $d_C = 3$ m, determine (*a*) as distâncias d_B e d_D, (*b*) a reação em *E*.

7.98 Determine (*a*) a distância d_C para a que a parte *DE* do cabo seja horizontal, (*b*) as correspondentes reações em *A* e *E*.

7.99 Se $d_C = 4{,}5$ m, determine (*a*) as distâncias d_B e d_D, (*b*) a máxima tensão no cabo.

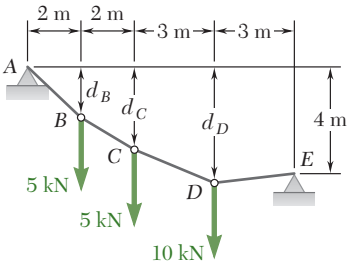


Figura P7.97 e P7.98

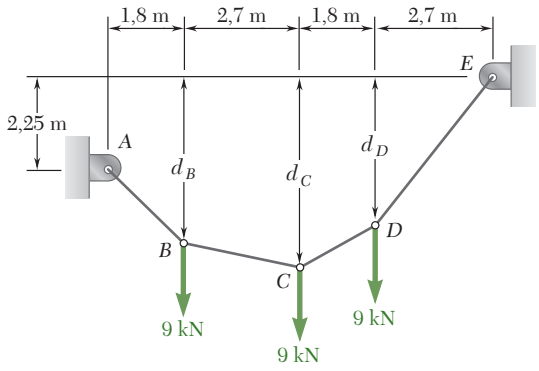


Figura *P7.99 e P7.100*

7.100 Determine (*a*) a distância d_C para a que a parte *BC* do cabo seja horizontal, (*b*) os componentes correspondentes da reação em *E*.

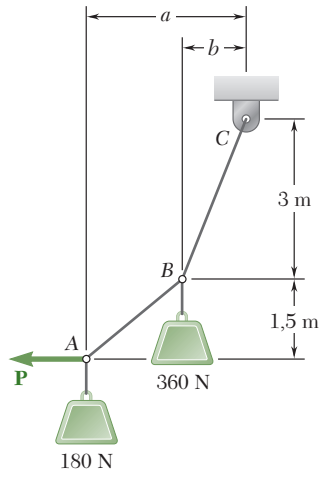


Figura P7.101 e P7.102

7.101 O cabo *ABC* sustenta duas cargas tal como mostra a figura. Sabendo que $b = 1{,}2$ m, determine (*a*) a intensidade necessária da força horizontal **P**, (*b*) a distância correspondente *a*.

7.102 O cabo *ABC* sustenta duas cargas tal como mostra a figura. Determine as distâncias *a* e *b* quando uma força horizontal **P** de intensidade 270 N é aplicada em *A*.

7.103 Sabendo que $m_B = 70$ kg e $m_C = 25$ kg, determine a intensidade da força **P** necessária para se manter o equilíbrio.

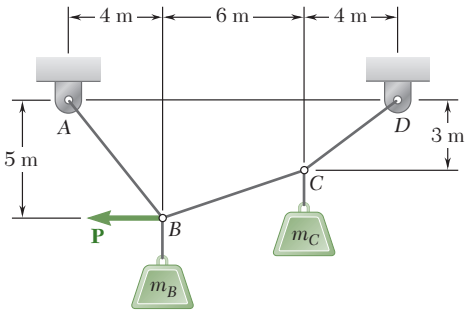


Figura P7.103 e P7.104

7.104 Sabendo que $m_B = 18$ kg e $m_C = 10$ kg, determine a intensidade da força **P** necessária para se manter o equilíbrio.

7.105 Se $a = 3$ m, determine as intensidades de **P** e **Q** necessárias para se manter o cabo na forma mostrada na figura.

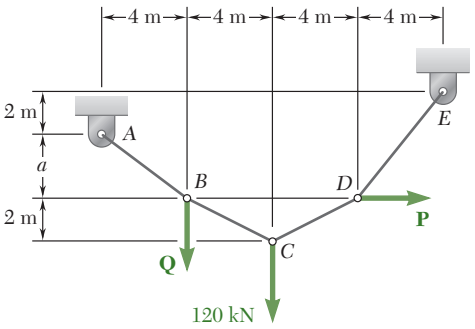


Figura P7.105 e P7.106

7.106 Se $a = 4$ m, determine as intensidades de **P** e **Q** necessárias para se manter o cabo na forma mostrada na figura.

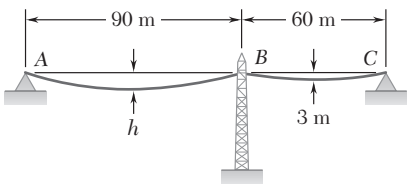


Figura P7.108

7.107 Um cabo tem massa por unidade de comprimento de 0,65 kg/m e é suspenso em dois isoladores de igual elevação separados a uma distância de 120 m entre si. Se a flecha do cabo é 30 m, determine (*a*) o comprimento total do cabo, (*b*) a tração máxima no cabo.

7.108 Dois cabos de igual bitola são presos a uma torre de transmissão em *B*. Como a torre é estreita, o componente horizontal da resultante das forças exercidas pelos cabos em *B* deve ser nulo. Sabendo que a massa por unidade de comprimento dos cabos é 0,4 kg/m, determine (*a*) a flecha necessária *h*, (*b*) a tração máxima em cada cabo.

7.109 Cada cabo da ponte Golden Gate sustenta uma carga $w = 166{,}5$ kN/m ao longo da horizontal. Sabendo que o vão L é 1.245 m e que a flecha h é 139,2 m, determine, (*a*) a tração máxima em cada cabo (*b*) o comprimento de cada cabo.

7.110 O vão central da ponte George Washington, tal como foi originalmente construída, consistia em um tabuleiro uniforme suspenso por quatro cabos. A carga uniforme sustentada por cada cabo era $w = 146{,}25$ kN/m ao longo da horizontal. Sabendo que o vão L é 1.050 m e que a flecha h é 94,8 m, determine, para a configuração original, (*a*) a tração máxima em cada cabo, (*b*) o comprimento de cada cabo.

7.111 A massa total do cabo AC é 25 kg. Considerando que a massa do cabo é distribuída uniformemente ao longo da horizontal, determine a flecha h e a inclinação do cabo entre A e C.

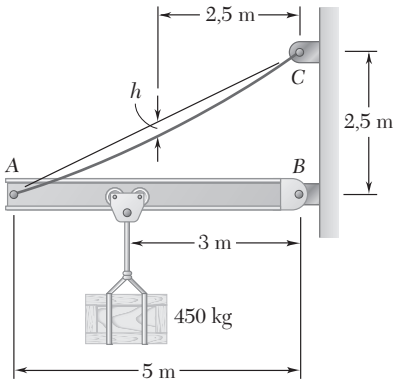


Figura P7.111

7.112 Um comprimento de 50,5 m do arame tendo a massa por unidade de comprimento de 0,75 kg/m é usado em um vão de 50 m. Determine (*a*) a flecha aproximada do arame, (*b*) a tensão máxima no arame. [*Dica*: Use apenas o primeiro termo da Eq. (7.10)].

7.113 Um cabo de comprimento $L + \Delta$ é suspenso entre dois pontos que estão na mesma elevação e que tem uma distância L entre si. (*a*) Considerando que Δ é curto comparado com L e que o cabo é parabólico, determine a flecha aproximada em termos de L e Δ. (*b*) Se $L = 30$ m e $\Delta = 1{,}2$ m, determine a flecha aproximada. [*Dica:* use somente os dois primeiros termos da Eq. (7.10)].

7.114 O vão central da ponte Verrazano-Narrows consiste em dois tabuleiros uniformes suspensos por quatro cabos. O projeto da ponte levou em conta o efeito de mudanças extremas de temperatura, que fazem a flecha do vão central variar de $h_w = 115{,}8$ m no inverno a $h_s = 118{,}2$ m no verão. Sabendo que o vão é $L = 1.278$ m, determine a mudança no comprimento dos cabos por causa dessas variações extremas de temperatura.

7.115 Cada cabo dos vãos laterais da ponte Golden Gate sustenta uma carga $w = 153$ kN/m ao longo da horizontal. Sabendo que para os vãos laterais a distância vertical máxima h de cada cabo até a corda AB é 9 m e ocorre no ponto médio do vão, determine (*a*) a tração máxima em cada cabo, (*b*) a inclinação em B.

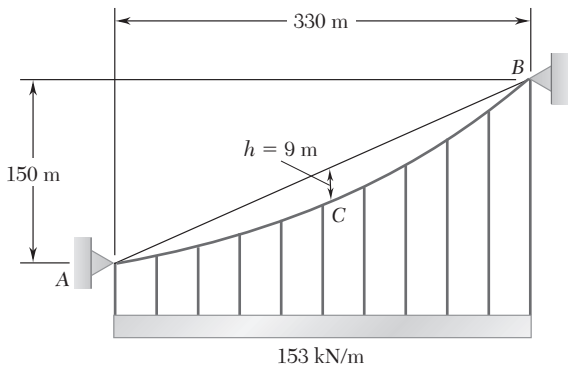


Figura P7.115

7.116 Um cano de vapor pesando 675 N/m que passa entre dois prédios, distanciados 12 m entre si, é sustentado por um sistema de cabos tal como mostra a figura. Considerando que o peso do cabo é equivalente a um carregamento uniformemente distribuído de 125 N/m, determine (*a*) a localização do ponto mais baixo *C* no cabo, (*b*) a tração máxima no cabo.

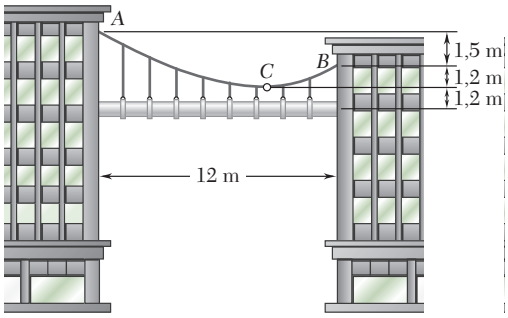


Figura P7.116

7.117 O cabo *AB* sustenta um carga uniformemente distribuída ao longo da horizontal, como mostra a figura. Sabendo que em *B* o cabo forma um ângulo $\theta_B = 35°$ com a horizontal, determine (*a*) a máxima tensão no cabo, (*b*) a distância vertical *a* de *A* até o ponto mais baixo do cabo.

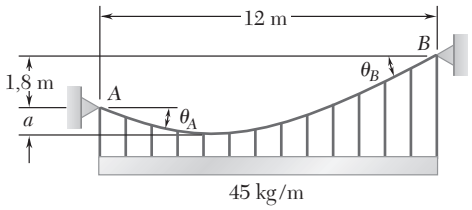


Figura P7.117 e P7.118

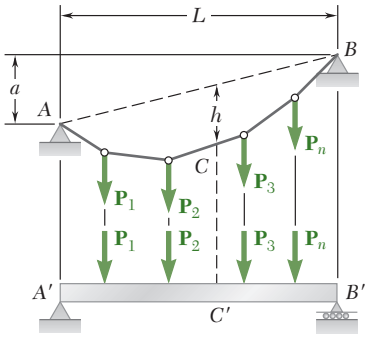


Figura P7.119

7.118 O cabo *AB* sustenta um carga uniformemente distribuída ao longo da horizontal, como mostra a figura. Sabendo que o ponto mais baixo do cabo é localizado a uma distância $a = 0{,}6$ m abaixo de *A*, determine (*a*) a máxima tensão no cabo, (*b*) o ângulo θ_B que o cabo forma com a horizontal em *B*.

***7.119** Um cabo *AB* de vão *L* e uma viga simplesmente apoiada *A′B′* de mesmo vão estão sujeitos a carregamentos verticais idênticos, como mostra a figura. Mostre que a intensidade do momento fletor no ponto *C′* da viga é igual ao produto T_0h, sendo T_0 a intensidade do componente horizontal da força de tração no cabo e *h* a distância vertical entre o ponto *C* e a corda que une os pontos de apoio *A* e *B*.

7.120** a ***7.123 Utilizando a propriedade estabelecida no Problema **7**.119, resolva o problema indicado, resolvendo primeiro o problema de viga correspondente.

7.120 Problema 7.94*a*.
7.121 Problema 7.97*a*.
7.122 Problema 7.99*a*.
7.123 Problema 7.100*a*.

***7.124** Mostre que a curva assumida por um cabo que carrega uma carga distribuída $w(x)$ é definida pela equação diferencial $d^2y/dx^2 = w(x)/T_0$, sendo T_0 a tração no ponto mais baixo.

***7.125** Usando a propriedade indicada no Problema 7.124, determine a curva assumida por um cabo de vão L e flecha h que sustenta uma carga distribuída $w = w_0 \cos(\pi x/L)$, onde x é medido a partir do ponto médio do vão. Determine também os valores máximo e mínimo da tração no cabo.

***7.126** Se o peso por unidade de comprimento do cabo AB é $w_0/\cos^2\theta$, prove que a curva formada pelo cabo é um arco de círculo. (*Dica:* use a propriedade indicada no Problema 7.124.)

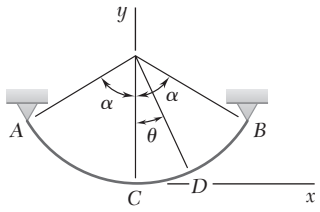


Figura P7.126

*7.10 Catenária

Agora vamos considerar um cabo AB que sustenta uma carga *uniformemente distribuída ao longo do próprio cabo* (Fig. 7.18*a*). Cabos suspensos sob seu próprio peso são carregados dessa maneira. Representamos por w a carga por unidade de comprimento (*medida ao longo do cabo*) e a indicamos em N/m. A intensidade W da carga total sustentada por uma parte de cabo de comprimento s que se estende do ponto mais baixo C a um ponto D é $W = ws$. Substituindo esse valor por W na Eq. (7.6), obtemos a tração em D:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2}$$

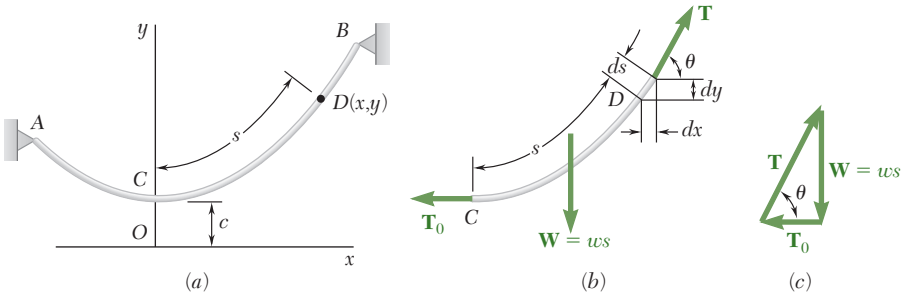


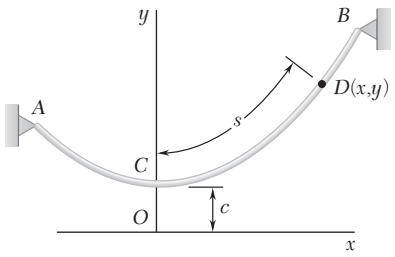
Figura 7.18

Para simplificar os cálculos subsequentes, introduzimos a constante $c = T_0/w$. Temos, então:

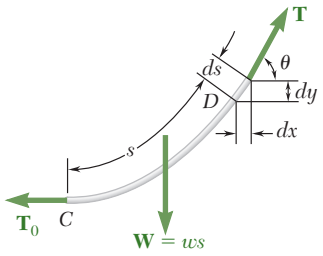
$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = w\sqrt{c^2 + s^2} \tag{7.11}$$

O diagrama de corpo livre da parte CD do cabo é mostrado na Fig. 7.18*b*. Esse diagrama, no entanto, não pode ser usado se para obter diretamente a equação da curva traçada pelo cabo, uma vez que não conhecemos a distância horizontal de D até a linha de ação da resultante **W** da carga. Para obter essa equação, primeiro escrevemos que a projeção horizontal de um pequeno elemento de cabo de comprimento ds é

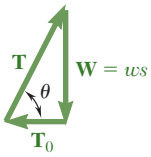
Foto 7.4 As forças nos apoios e as forças internas nos cabos da linha de transmissão mostradas são discutidas nesta seção.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.18 (continua)

$dx = ds \cos\theta$. Observando na Fig. 7.18*c* que $\cos\theta = T_0/T$ e utilizando as Eqs. (7.11), temos:

$$dx = ds\cos\theta = \frac{T_0}{T}ds = \frac{wc\,ds}{w\sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}}$$

Selecionando a origem O das coordenadas a uma distância c diretamente abaixo de C (Fig. 7.18*a*), e integrando de $C(0, c)$ até $D(x, y)$, obtemos:*

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} = c\left[\operatorname{senh}^{-1}\frac{s}{c}\right]_0^s = c\,\operatorname{senh}^{-1}\frac{s}{c}$$

Esta equação, que relaciona o comprimento s da parte CD do cabo e a distância horizontal x, pode ser escrita na forma:

$$s = c\,\operatorname{senh}\frac{x}{c} \tag{7.15}$$

Pode-se agora obter a relação entre as coordenadas x e y escrevendo $dy = dx\ \text{tg}\,\theta$. Observando da Fig. 7.18*c* que $\text{tg}\,\theta = W/T_0$ e utilizando as Eqs. (7.11) e (7.15), temos:

$$dy = dx\ \text{tg}\,\theta = \frac{W}{T_0}dx = \frac{s}{c}dx = \operatorname{senh}\frac{x}{c}dx$$

Integrando de $C(0, c)$ até $D(x, y)$ e usando as Eqs. (7.12) e (7.13), obtemos

$$y - c = \int_0^x \operatorname{senh}\frac{x}{c}dx = c\left[\cosh\frac{x}{c}\right]_0^x = c\left(\cosh\frac{x}{c} - 1\right)$$

$$y - c = c\cosh\frac{x}{c} - c$$

---

* Essa integral pode ser encontrada em qualquer tabela de integrais. A função

$$z = \operatorname{senh}^{-1} u$$

(leia-se; "arco do seno hiperbólico de u") é o *inverso* da função $u = \operatorname{senh} z$ (leia-se "seno hiperbólico de z"). Essa função $v = \cosh z$ (leia-se: "cosseno hiperbólico de z") são definidas como se segue:

$$u = \operatorname{senh} z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \qquad v = \cosh z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

Os valores numéricos das funções senh z e cosh z são encontrados em tabelas de *funções hiperbólicas*. Podem, também, ser obtidos na maioria das calculadoras, seja diretamente, seja a partir das definições anteriores. O aluno deve procurar qualquer livro de cálculo para ter uma descrição completa das propriedades dessas funções. Nesta seção, utilizamos somente as seguintes propriedades, que podem ser facilmente deduzidas a partir de definições anteriores:

$$\frac{d\,\operatorname{senh} z}{dz} = \cosh z \qquad \frac{d\cosh z}{dz} = \operatorname{senh} z \tag{7.12}$$

$$\operatorname{senh} 0 = 0 \qquad \cosh 0 = 1 \tag{7.13}$$

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1 \tag{7.14}$$

que se reduz a

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{7.16}$$

Esta é a equação de uma *catenária* com um eixo vertical. A ordenada c do ponto inferior C é denominada *parâmetro* da catenária. Elevando ao quadrado os lados das Eqs. (7.15) e (7.16), subtraindo e considerando a Eq. (7.14), obtemos a seguinte relação entre y e s:

$$y^2 - s^2 = c^2 \tag{7.17}$$

Ao resolver a Eq. (7.17) para s^2 e transmitir seu valor para a última das relações das Eqs. (7.11), escrevemos essas relações como se segue:

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = wy \tag{7.18}$$

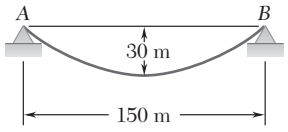
A última relação indica que a tração em qualquer ponto D do cabo é proporcional à distância vertical de D até a linha horizontal que representa o eixo x.

Quando os apoios A e B do cabo tiverem a mesma elevação, a distância L entre esses apoios é denominada *vão* do cabo e a distância vertical h desde os apoios até o ponto mais baixo C é chamada de *flecha* do cabo. Essas definições são as mesmas que foram dadas para o caso de cabos parabólicos; porém, deve-se notar que, em virtude de nossa escolha de eixos coordenados, a flecha h é agora:

$$h = y_A - c \tag{7.19}$$

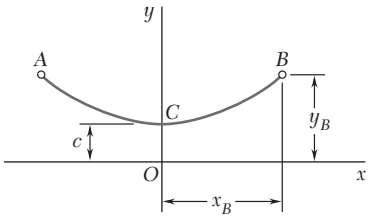
Deve-se também observar que certos problemas de catenária envolvem equações transcendentais, que devem ser resolvidas por aproximações sucessivas (ver Problema Resolvido 7.10). Quando o cabo está razoavelmente esticado, no entanto, pode-se supor que a carga é uniformemente distribuída *ao longo da horizontal* e a catenária pode ser substituída por uma parábola. Isto simplifica bastante a solução do problema, e o erro apresentado é pequeno.

Quando os apoios A e B têm elevações diferentes, a posição do ponto mais baixo do cabo não é conhecida. O problema pode, então, ser resolvido de maneira semelhante à indicada para cabos parabólicos, demonstrando que o cabo deve passar pelos apoios e que $x_B - x_A = L$ e $y_B - y_A = d$, onde L e d representam, respectivamente, as distâncias horizontal e vertical entre os dois apoios.



PROBLEMA RESOLVIDO 7.10

Um cabo uniforme pesando 45 N/m está suspenso entre dois pontos A e B tal como mostra a figura. Determine (*a*) os valores máximo e mínimo da tração no cabo, (*b*) o comprimento do cabo.



SOLUÇÃO

Equação do cabo. A origem das coordenadas é colocada a uma distância c abaixo do ponto inferior do cabo. A equação do cabo é dada pela Eq. (7.16).

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

As coordenadas do ponto B são:

$$x_B = 75 \text{ m} \qquad y_B = 30 + c$$

Substituindo essas coordenadas na equação do cabo, obtemos:

$$30 + c = c \cosh \frac{75}{c}$$
$$\frac{30}{c} + 1 = \cosh \frac{75}{c}$$

O valor de c é determinado considerando sucessivos valores por tentativas, como mostra a tabela a seguir:

c	$\frac{250}{c}$	$\frac{100}{c}$	$\frac{100}{c} + 1$	$\cosh \frac{250}{c}$
300	0,833	0,333	1,333	1,367
350	0,714	0,286	1,286	1,266
330	0,758	0,303	1,303	1,301
328	0,762	0,305	1,305	1,305

Considerando $c = 98{,}4$, temos:

$$y_B = 30 + c = 128{,}4 \text{ m}$$

a. Valores máximo e mínimo da tração. Usando as Eq. (7.18), obtemos:

$$T_{\text{min}} = T_0 = wc = (45 \text{ N/m})(98{,}4 \text{ m}) \qquad T_{\text{min}} = 4.428 \text{ N} \blacktriangleleft$$
$$T_{\text{máx}} = T_B = wy_B = (45 \text{ N/m})(128{,}4 \text{ m}) \qquad T_{\text{máx}} = 5.578 \text{ N} \blacktriangleleft$$

b. Comprimento do cabo. Metade do comprimento do cabo é encontrada resolvendo-se a Eq. (7.17):

$$y_B^2 - s_{CB}^2 = c^2 \qquad s_{CB}^2 = y_B^2 - c^2 = (128{,}4)^2 - (98{,}4)^2 \qquad s_{CB} = 82{,}5 \text{ m}$$

O comprimento total do cabo é, portanto:

$$s_{AB} = 2s_{CB} = 2(82{,}5 \text{ m}) \qquad s_{AB} = 165 \text{ m} \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Na última seção deste capítulo, aprendemos a resolver problemas que envolviam um *cabo carregando uma carga uniformemente distribuída ao longo do cabo.* A forma traçada pelo cabo é uma catenária e é definida pela equação:

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{7.16}$$

1. Devemos ter em mente que a origem das coordenadas para uma catenária está localizada a uma distância c diretamente abaixo do ponto mais baixo da catenária. O comprimento do cabo desde a origem até qualquer ponto é indicado como:

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c} \tag{7.15}$$

2. Devemos primeiro identificar todas as quantidades conhecidas e desconhecidas. Em seguida, considere cada uma das equações listadas no texto (Eqs. 7.15 a 7.19) e resolva uma equação que contenha apenas uma incógnita. Substitua o valor encontrado em uma outra equação e resolva essa equação para uma outra incógnita.

3. Se a flecha *h* é dada, use a Eq. (7.19) para substituir y por $h + c$ na Eq. (7.16) se x é conhecido [Problema Resolvido 7.10], ou na Eq. (7.17) se s é conhecido, e resolva as equações obtidas para a constante c.

4. Muitos dos problemas que encontraremos envolverão soluções por tentativa e erro de uma equação que envolva um seno ou cosseno hiperbólico. Podemos facilitar o trabalho mantendo um histórico de seus cálculos em uma tabela, como no Problema Resolvido 7.10, ou adotando uma técnica de solução numérica que use um computador ou uma calculadora.

PROBLEMAS

7.127 Um cabo de 30 m é pendurado entre dois edifícios como mostra a figura. A tensão máxima encontrada é 500 N e o ponto mais baixo do cabo observado está a 4 m acima do solo. Determine (*a*) a distância horizontal entre os edifícios, (*b*) a massa total do cabo.

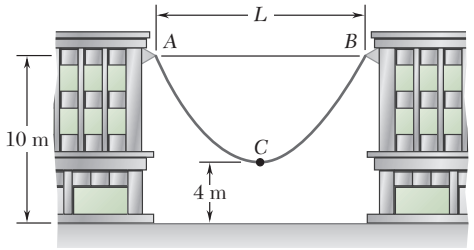


Figura P7.127

7.128 Uma trena de 60 m pesa 18 N. Sendo a fita esticada entre dois pontos de igual elevação e puxada até que a tração em cada ponta seja de 72 N, determine a distância horizontal entre as pontas da fita. Despreze o alongamento da fita devido à tração.

7.129 Um cabo para teleférico de 200 m de comprimento e massa por unidade de comprimento de 3,5 kg/m é suspenso entre dois pontos de igual elevação. Sabendo que a flecha é 50 m, determine (*a*) a distância horizontal entre os apoios, (*b*) a tração máxima no cabo.

7.130 Um cabo de transmissão elétrica de 120 m de comprimento e peso por unidade de comprimento de 37,5 N/m é suspenso entre dois pontos de igual elevação. Sabendo que a flecha é 30 m, determine a distância horizontal entre os apoios e a tração máxima.

7.131 Um fio de 20 m de comprimento, que tem massa por unidade de comprimento igual a 0,2 kg/m, está preso a um apoio fixo em *A* e a um colar em *B*. Desprezando o efeito do atrito, determine (*a*) a força **P** para a qual $h = 8$ m, (*b*) o vão *L* correspondente.

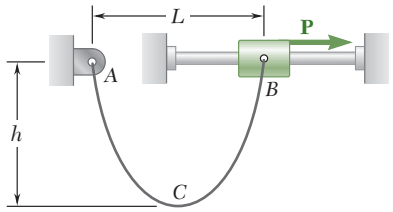


Figura *P7.131*, *P7.132* e P7.133

7.132 Um fio de 20 m de comprimento, que tem massa por unidade de comprimento igual a 0,2 kg/m está preso a um apoio fixo em *A* e a um colar em *B*. Sabendo que a intensidade da força horizontal aplicada ao colar é $P = 20$ N, determine (*a*) a flecha *h*, (*b*) o vão *L* correspondente.

7.133 Um fio de 20 m de comprimento, que tem massa por unidade de comprimento igual a 0,2 kg/m, está preso a um apoio fixo em *A* e a um colar em *B*. Desprezando o efeito do atrito, determine (*a*) a flecha *h* para a qual $L = 15$ m, (*b*) a força **P** correspondente.

7.134 Determine a flecha de uma corrente de 9 m que está presa a dois pontos de igual elevação, distanciados 6 m um do outro.

7.135 Um fio de 90 m de comprimento está suspenso por dois pontos de igual elevação, que estão afastados 60 m entre si. Sabendo que a tração máxima é 300 N, determine (*a*) a flecha do fio e (*b*) a massa total do fio.

7.136 Um contrapeso D é fixado a um cabo que passa por uma pequena roldana em A e é preso no suporte em B. Sabendo que $L = 13{,}5$ m e $h = 4{,}5$ m, determine (a) o comprimento do cabo de A até B, (b) o peso por unidade de comprimento do cabo. Despreze o peso do cabo de A até D.

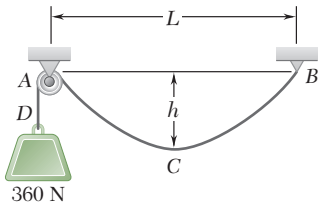


Figura P7.136

7.137 Uma corda uniforme de 1.250 mm de comprimento passa por uma roldana em B e é fixada em um pino de apoio em A. Sabendo que $L = 500$ mm e desprezando o efeito do atrito, determine o menor dos dois valores de h para que a corda esteja em equilíbrio.

7.138 Um cabo, que tem peso por unidade de comprimento igual a 30 N/m, é suspenso entre dois pontos de igual elevação, distanciados 48 m entre si. Determine a menor flecha possível do cabo se a tração máxima não exceder 1.800 N.

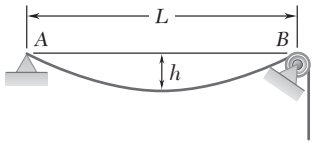


Figura P7.137

7.139 Um motor M é usado para enrolar lentamente o cabo mostrado na figura. Sabendo que a massa por unidade de comprimento do cabo é 0,4 kg/m, determine a tração máxima no cabo quando $h = 5$ m.

7.140 Um motor M é usado para enrolar lentamente o cabo, mostrado na figura. Sabendo que a massa por unidade de comprimento do cabo é 0,4 kg/m, determine a tração máxima no cabo quando $h = 3$ m.

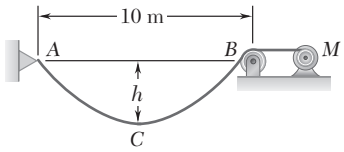


Figura P7.139 e P7.140

7.141 O cabo uniforme pesando 15 N/m é mantido na posição mostrada na figura por uma força horizontal **P** aplicada em B. Sabendo que $P = 810$ N e $\theta_A = 60°$, determine (a) a localização do ponto B, (b) o comprimento do cabo.

7.142 O cabo uniforme da massa 15 N/m é mantido na posição mostrada na figura por uma força horizontal **P** aplicada em B. Sabendo que $P = 675$ N e $\theta_A = 60°$, determine (a) a localização do ponto B, (b) o comprimento do cabo.

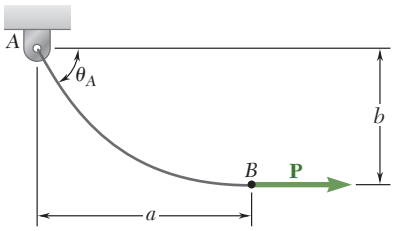


Figura P7.141 e P7.142

7.143 À esquerda do ponto B, o cabo longo $ABDE$ repousa sobre a superfície horizontal áspera mostrada na figura. Sabendo que a massa por unidade de comprimento do cabo é 2 kg/m, determine a força **F** quando $a = 3{,}6$ m.

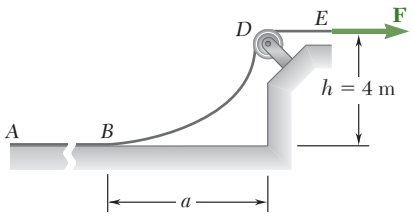


Figura P7.143 e P7.144

7.144 À esquerda do ponto B, o cabo longo $ABDE$ repousa sobre a superfície horizontal áspera mostrada na figura. Sabendo que a massa por unidade de comprimento do cabo é 2 kg/m, determine a força **F** quando $a = 6$ m.

7.145 O cabo *ACB* tem massa por unidade de comprimento de 0,45 kg/m. Sabendo que o ponto mais baixo do cabo está localizado a uma distância $a = 0{,}6$ m abaixo do apoio *A*, determine (*a*) a localização do ponto mais baixo *C*, (*b*) a tração máxima no cabo.

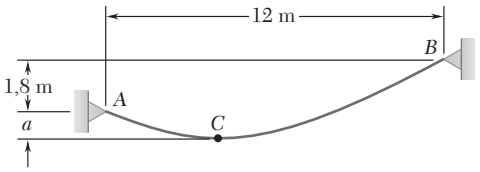


Figura P7.145 e P7.146

7.146 O cabo *ACB* tem massa por unidade de comprimento de 0,45 kg/m. Sabendo que o ponto mais baixo do cabo está localizado a uma distância $a = 2$ m abaixo do apoio *A*, determine (*a*) a localização do ponto mais baixo *C*, (*b*) a tração máxima no cabo.

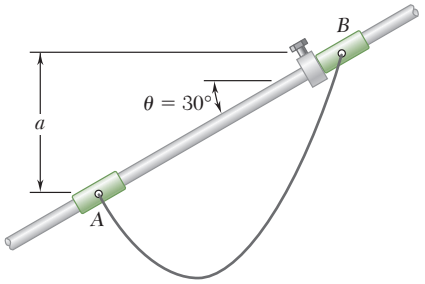


Figura P7.147

***7.147** Um cabo *AB* de 3 m é fixado em dois colares como mostra a figura. O colar em *A* pode deslizar livremente ao longo da haste; um batente de fixação na haste evita que o colar *B* se mova na haste. Desprezando o efeito do atrito e os pesos dos colares, determine a distância *a*.

***7.148** Resolva o Problema 7.147 considerando que o ângulo θ formado pela barra e pela horizontal é 45°.

7.149 Sendo θ o ângulo formado entre um cabo uniforme e a horizontal, mostre que, em qualquer ponto, (*a*) $s = c \operatorname{tg} \theta$, (*b*) $y = c \sec \theta$.

***7.150** (*a*) Determine o vão horizontal máximo permitido para um cabo uniforme de peso por unidade de comprimento w se a tração no cabo não exceder um valor dado T_m. (*b*) Usando o resultado da parte *a*, determine o vão máximo de um cabo de aço para o qual $w = 3{,}75$ N/m e $T_m = 36$ kN.

***7.151** Um cabo tem massa por unidade de comprimento de 3 kg/m e é erguido tal como mostra a figura. Sabendo que o vão *L* é 6 m, determine os dois valores da flecha *h* para os quais a tração máxima é 350 N.

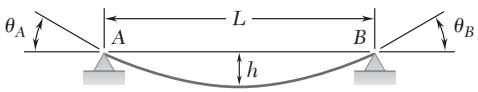


Figura P7.151, P7.152 e P7.153

***7.152** Determine a razão flecha por vão para a qual a tração máxima no cabo é igual ao peso total do cabo *AB* inteiro.

***7.153** Um cabo de peso w por unidade de comprimento é suspenso entre dois pontos de mesma elevação, a uma distância *L* entre si. Determine (*a*) a razão flecha por vão para a qual a tração máxima é a menor possível, (*b*) os valores correspondentes de θ_B e T_m.

REVISÃO E RESUMO

Neste capítulo, aprendemos a determinar as forças internas que mantêm unidas as várias partes de um dado elemento em uma estrutura.

Forças em elementos retos sujeitos à ação de duas forças

Considerando primeiro um *elemento reto sujeito à ação de duas forças AB* [Seção 7.2], recordamos que tal elemento é sujeito, em *A* e *B*, a forças iguais e opostas **F** e $-\mathbf{F}$ direcionadas ao longo de *AB* (Fig. 7.19*a*). Cortando o elemento *AB* em *C* e traçando o diagrama de corpo livre da parte *AC*, concluímos que as forças internas que existiam em *C* no elemento *AB* são equivalentes a uma *força axial* $-\mathbf{F}$ igual e oposta a **F** (Fig. 7.19*b*). Observamos que, no caso de um elemento sujeito a duas forças que não é reto, as forças internas se reduzem a um sistema força-binário, e não a uma força única.

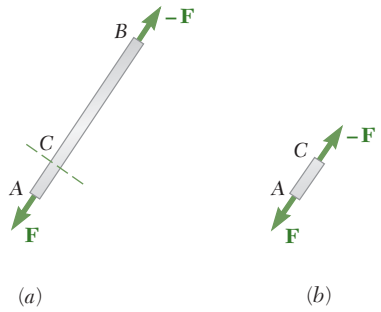


Figura 7.19

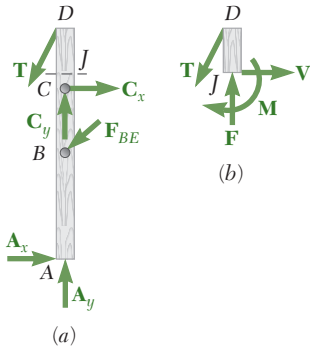


Figura 7.20

Forças em elementos sujeitos à ação de múltiplas forças

Considerando a seguir um *elemento sujeito à ação de múltiplas forças AD* (Fig. 7.20*a*), ao cortar o mesmo em *J* e traçar o diagrama de corpo livre da parte *JD*, concluímos que as forças internas em *J* são equivalentes a um sistema força-binário que consiste na *força axial* **F**, no *esforço cortante* **V** e em um binário **M** (Fig. 7.20*b*). A intensidade do esforço cortante mede o *cisalhamento* no ponto *J*, e o momento do binário é chamado de *momento fletor* em *J*. Visto que um sistema força-binário igual e oposto pode ser obtido considerando-se o diagrama de corpo livre da parte *AJ*, é necessário especificar qual parte do elemento *AD* foi usada quando se escreveram as respostas [Problema Resolvido 7.1].

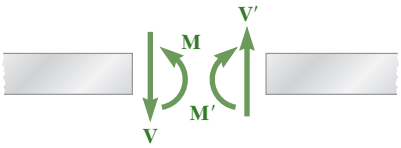
Forças em vigas

A maior parte deste capítulo foi dedicada à análise das forças internas nos dois tipos de estruturas de engenharia mais importantes: *vigas* e *cabos*. *Vigas* são geralmente elementos longos, retos e prismáticos projetados para sustentar cargas aplicadas em vários pontos ao longo do elemento. Em geral, as cargas são perpendiculares ao eixo da viga e produzem somente *cisalhamento e flexão* na viga. As cargas podem ser tanto *concentradas* em pontos específicos como *distribuídas* ao longo de todo o comprimento ou de uma parte da viga. A própria viga pode ser apoiada de várias maneiras; como somente vigas estaticamente determinadas são consideradas neste capítulo, limitamos nossa análise ao exame de *vigas*

simplesmente apoiadas, *vigas apoiadas com extremidade em balanço* e *vigas em balanço* [Seção 7.3].

Esforço cortante e momento fletor em uma viga

Para obter o *esforço cortante* V e o *momento fletor* M em um dado ponto C de uma viga, primeiro determinamos as reações nos apoios considerando a viga inteira como um corpo livre. Cortamos, então, a viga em C e usamos o diagrama de corpo livre de uma das duas partes obtidas dessa maneira para determinar V e M. Para se evitar qualquer confusão em relação ao sentido do esforço cortante V e do binário M (atuantes em direções opostas nas duas partes da viga), foi adotada [Seção 7.4] a convenção de sinais ilustrada na Fig. 7.21. Uma vez que os valores do esforço cortante e do momento fletor serem determinados em alguns pontos selecionados da viga, geralmente é possível traçar um *diagrama de esforço cortante* e um *diagrama de momento fletor* representando, respectivamente, o cisalhamento e a flexão em qualquer ponto da viga [Seção 7.5]. Quando uma viga está sujeita somente a cargas concentradas, o esforço cortante tem valor constante entre cargas e o momento fletor varia linearmente entre cargas [Problema Resolvido 7.2]. Por outro lado, quando uma viga é sujeita a cargas distribuídas, o esforço cortante e o momento fletor variam de maneira bem diferente [Problema Resolvido 7.3].



Forças internas na seção
(esforço cortante e momento fletor positivos)

Figura 7.21

A construção dos diagramas de esforço cortante e de momento fletor é facilitada se forem levadas em consideração as relações a seguir. Sendo w a carga distribuída por unidade de comprimento (considerada positiva se dirigida para baixo), temos [Seção 7.5]

Relações entre carregamento, esforço cortante e momento fletor

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{7.1}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.3}$$

ou, na forma integrada,

$$V_D - V_C = -\text{área sob a curva de carregamento entre } C \text{ e } D) \tag{7.2′}$$

$$M_D - M_C = \text{área sob a curva de esforço cortante entre } C \text{ e } D \tag{7.4′}$$

A Eq. (7.2′) torna possível traçar o diagrama de esforço cortante de uma viga a partir da curva que representa a carga distribuída nessa viga e do valor de V em uma extremidade da viga. De maneira similar, a Eq. (7.4′) torna possível traçar o diagrama de momento fletor a partir do diagrama de esforço cortante e do valor de M em uma extremidade da viga. No entanto, cargas concentradas apresentam descontinuidades no diagrama de esforço cortante e binários concentrados no diagrama de momento fletor, sendo que nenhuma dessas descontinuidades é levada em consideração nessas equações [Problemas Resolvidos 7.4 e 7.7]. Por fim, observamos, a partir da Eq. (7.3), que os pontos da viga em que o momento fletor é máximo ou mínimo são também os pontos em que o esforço cortante é zero [Problema Resolvido 7.5]

Cabos com cargas concentradas

A segunda parte do capítulo foi dedicada à análise de *cabos flexíveis*. Consideramos, inicialmente, um cabo de peso desprezível sustentando

cargas concentradas [Seção 7.7]. Usando o cabo *AB* inteiro como um corpo livre (Fig. 7.22), observamos que as três equações de equilíbrio não são suficientes para determinar as quatro incógnitas, representando as reações nos apoios *A* e *B*. No entanto, se as coordenadas de um ponto *D* do cabo forem conhecidas, pode-se obter uma outra equação considerando-se o diagrama de corpo livre da parte *AD* ou *DB* do cabo. Uma vez que as reações nos apoios tiverem sido determinadas, a elevação de qualquer ponto do cabo e a tração em qualquer parte do cabo podem ser encontradas utilizando-se o diagrama de corpo livre apropriado [Problema Resolvido 7.8]. Foi observado que o componente horizontal da força **T**, representando a tração, é o mesmo em qualquer ponto do cabo.

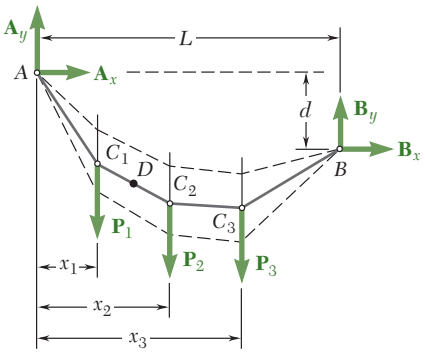


Figura 7.22

Em seguida, consideramos cabos sustentando *cargas distribuídas* [Seção 7.8]. Utilizando como um corpo livre uma parte do cabo *CD* que se estende do ponto mais baixo *C* até um ponto arbitrário *D* do cabo (Fig. 7.23), observamos que o componente horizontal da força de tração **T** em *D* é constante e igual à tração T_0 em *C*, enquanto seu componente vertical é igual ao peso *W* da parte *CD* do cabo. A intensidade e a direção de **T** foram obtidas do triângulo de força:

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{W}{T_0} \tag{7.6}$$

Cabos com cargas distribuídas

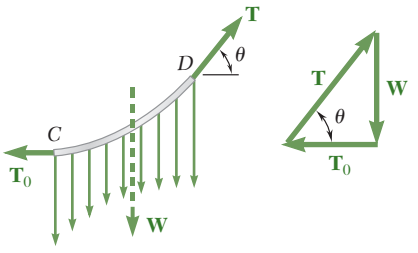


Figura 7.23

No caso de uma carga *uniformemente distribuída ao longo da horizontal* – como em uma ponte suspensa (Fig. 7.24) – a carga sustentada pelo trecho *CD* é $W = wx$, sendo *w* a carga constante por unidade de comprimento horizontal [Seção 7.9]. Encontramos também que a curva formada pelo cabo é uma *parábola* de equação

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

e que o comprimento do cabo pode ser encontrado usando-se a expansão em série dada na Eq. (7.10) [Problema Resolvido 7.9].

Cabo parabólico

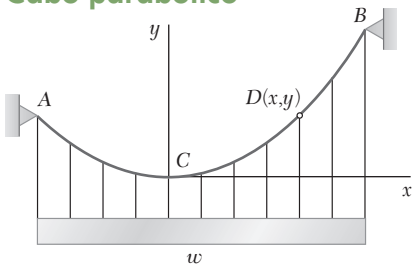


Figura 7.24

No caso de uma carga *uniformemente distribuída ao longo do próprio cabo* [por exemplo, um cabo que pende sujeito ao seu próprio peso (Fig. 7.25)], a carga sustentada pela parte *CD* é $W = ws$, sendo *s* o comprimento medido ao longo do cabo e *w* a carga constante por unidade de comprimento [Seção 7.10]. Escolhendo a origem *O* dos eixos coordenados a uma distância $c = T_0/w$ abaixo de *C*, deduzimos as relações

$$s = c\,\text{senh}\,\frac{x}{c} \tag{7.15}$$

$$y = c\,\cosh\frac{x}{c} \tag{7.16}$$

$$y^2 - s^2 = c^2 \tag{7.17}$$

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = wy \tag{7.18}$$

que podem ser utilizadas para resolver os problemas que envolvem cabos suspensos sujeitos ao seu próprio peso [Problema Resolvido 7.10]. A Eq. (7.16), que define a forma do cabo, é a equação de uma *catenária*.

Catenária

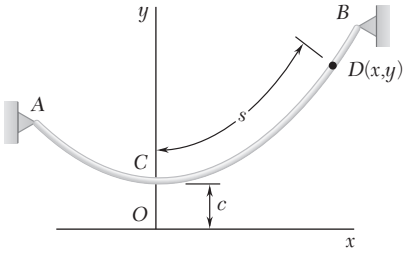


Figura 7.25

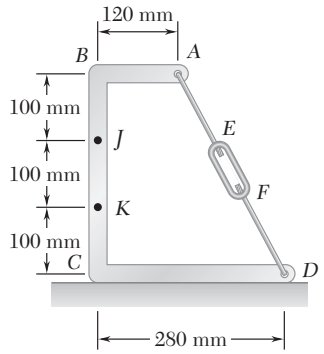


Figura P7.154

7.154 Foi determinado experimentalmente que o momento fletor no ponto K da estrutura mostrada na figura é 300 N · m. Determine (*a*) a tração nas hastes AE e FD, (*b*) a força interna correspondente no ponto J.

7.155 Sabendo que o raio de cada roldana é 200 mm e desprezando o atrito, determine as forças internas no ponto J da estrutura mostrada na figura.

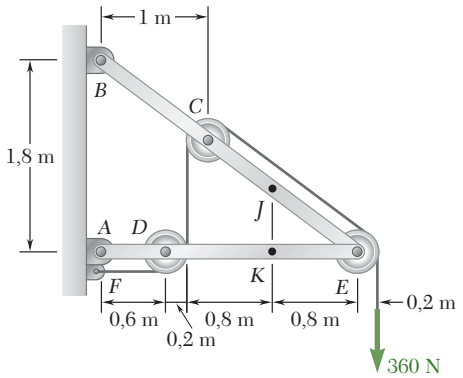


Figura P7.155

7.156 Uma calha de aço de peso por unidade de comprimento $w = 300$ N/m forma um dos lados de um lance de escada. Determine a força interna no centro C da calha em razão do seu próprio peso para cada condição de suporte mostrada na figura.

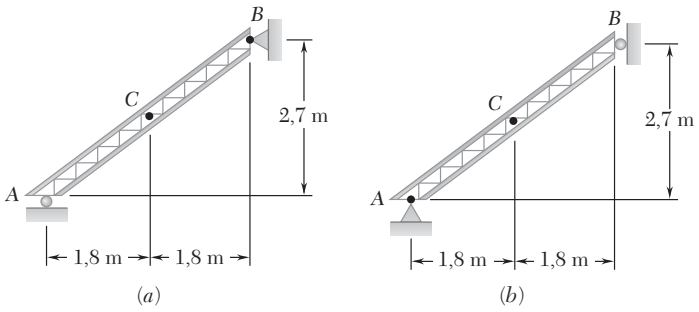


Figura P7.156

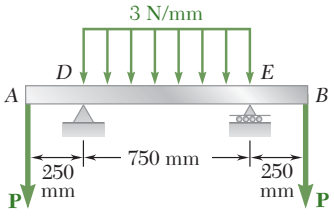


Figura P7.157 e *P7.158*

7.157 Para a viga mostrada, determine (*a*) a intensidade P das duas forças concentradas para que o máximo valor absoluto do momento fletor seja o menor possível, (*b*) o valor correspondente de $|M|_{\text{máx}}$.

7.158 Sabendo que a intensidade da carga concentrada **P** é 340 N, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e momento fletor para a viga AB, (*b*) determine o máximo valor absoluto do esforço cortante e momento fletor.

7.159 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, (*a*) trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, (*b*) determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.

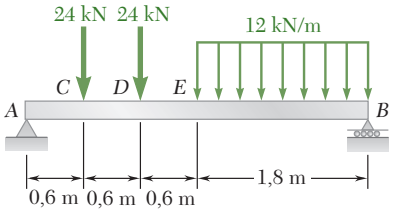


Figura P7.159

7.160 Para a viga mostrada *AB*, trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor e determine a intensidade e a localização do máximo valor absoluto do momento fletor, sabendo que (*a*) $P = 27$ kN, (*b*) $P = 13{,}5$ kN

7.161 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, (*a*) escreva as equações das curvas do esforço cortante e do momento fletor, (*b*) determine o máximo momento fletor.

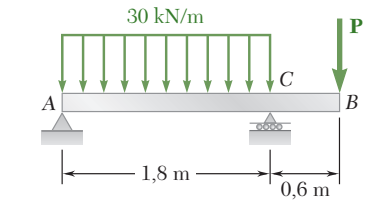


Figura P7.160

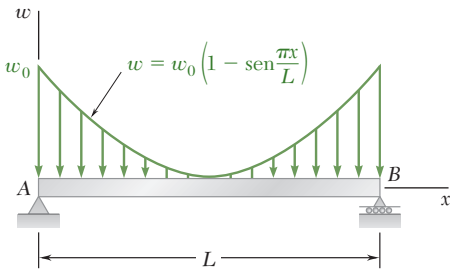


Figura P7.161

7.162 Uma tubulação de óleo é sustentada em intervalos de 1,8 m, por ganchos verticais presos ao cabo mostrado na figura. Em razão do peso combinado do tubo e seu conteúdo, a tração em cada gancho é de 1.800 N. Sabendo que $d_C = 3{,}6$ m, determine (*a*) a tração máxima no cabo, (*b*) a distância d_D.

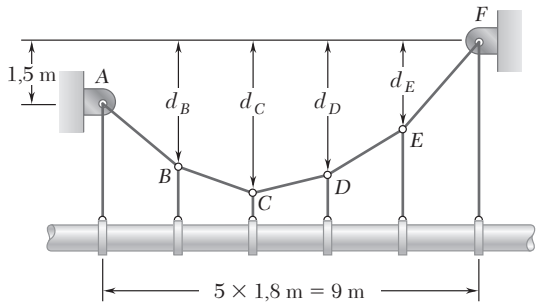


Figura P7.162

7.163 Resolva o Problema 7.162 considerando que $d_C = 2{,}7$ m.

7.164 Um cabo de transmissão de massa por unidade de comprimento de 0,8 kg/m é amarrado entre dois isolantes de mesma elevação e distanciados a 75 m. Sabendo que a flecha do cabo é 2 m, determine (*a*) a máxima tração no cabo, (*b*) o comprimento do cabo.

7.165 O cabo *ACB* suporta um carregamento uniformemente distribuído ao longo da horizontal como mostra a figura. O ponto mais baixo *C* está a 9 m à direita de *A*. Determine (*a*) a distância vertical *a*, (*b*) o comprimento do cabo, (*c*) os componentes da reação em *A*.

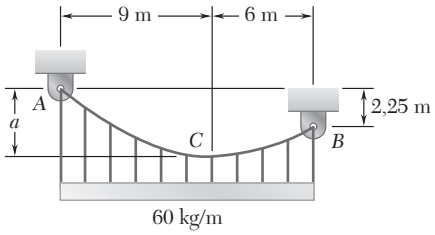


Figura P7.165

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

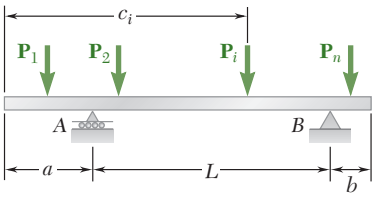


Figura P7.C1

7.C1 Uma viga saliente é projetada para suportar várias cargas concentradas. Um dos primeiros passos do projeto da viga é determinar os valores dos momentos fletores que podem ser esperados nos apoios *A* e *B* e em cada carregamento concentrado. Usando um aplicativo computacional calcule estes valores para a viga de carregamento abritrado mostrado na figura. Ues este aplicativo para a viga e a carga do (*a*) Problema 7.36, (*b*) Problema 7.37, (*c*) Problema 7.38.

7.C2 Várias cargas concentradas e uma carga uniformemente distribuída são aplicadas na viga *AB* simplesmente apoiada. Como primeiro passo no projeto da viga, crie um programa de computador para calcular o esforço cortante e o momento fletor na viga para o carregamento arbitrário como mostra a figura, dando incrementos Δx. Use esse programa para a viga do (*a*) Problema 7.39, com $\Delta x = 0{,}25$ m, (*b*) Problema 7.41, com $\Delta x = 0{,}15$ m, (*c*) Problema 7.42, com $\Delta x = 0{,}15$ m.

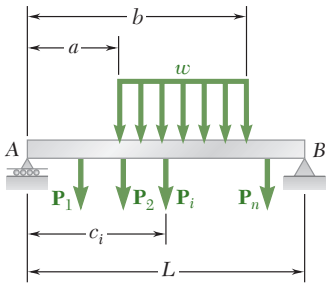


Figura P7.C2

7.C3 Uma viga *AB* articulada em *B* e apoiada por um rolete em *D* deve ser projetada para sustentar uma carga uniformemente distribuída, *com máxima eficiência*, a partir de sua extremidade *A* até seu ponto médio *C*. Como parte do processo de projeto, crie um aplicativo computacional para determinar a distância *a* a partir da extremidade *A* até o ponto *D* em que o rolete deve ser colocado para minimizar o valor absoluto do momento fletor *M* na viga. (*Nota:* uma pequena análise preliminar vai mostrar que o rolete deve ser colocado sob a carga, e que o maior valor negativo de *M* ocorrerá em *D*, enquanto seu maior valor positivo ocorrerá em algum lugar entre *D* e *C*. Veja também a dica do Problema 7.55.)

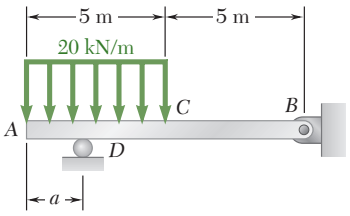


Figura P7.C3

7.C4 O tabuleiro de uma ponte consiste em pranchas estreitas dispostas sobre duas vigas simplesmente apoiadas, uma das quais é mostrada na figura. Como parte do projeto da ponte, deseja-se simular o efeito que a passagem de um caminhão de 13,5 kN sobre a ponte terá sobre essa viga. A distância entre os eixos do caminhão é 1,8 m e considera-se que o peso do caminhão está igualmente

distribuído sobre suas quatro rodas. (*a*) Usando um aplicativo computacional, calcule a intensidade e a localização do momento fletor máximo na viga como função de x de −0,9 m até 3 m usando 0,15 m de incremento. (*b*) Usando, se necessário, incrementos menores, determine o maior valor do momento fletor que ocorre na viga à medida que o caminhão é conduzido sobre a ponte e determine o valor correspondente de x.

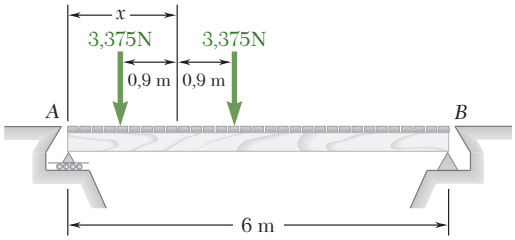


Figura P7.C4

***7.C5** Crie um aplicativo computacional que possa ser usado para representar os diagramas de esforço cortante e momento fletor da viga do Problema 7.C1. Usando esse aplicativo computacional com incrementos $\Delta x \leq L/100$, represente os diagramas de V e M para a viga e carga do (*a*) Problema 7.36, (*b*) Problema 7.37, (*c*) Problema 7.38.

***7.C6** Crie um aplicativo computacional que represente o esforço cortante e o momento fletor da viga do Problema 7.C2. Usando esse programa, com incrementos $\Delta x \leq L/100$, represente os diagramas de V e M para a viga e carga do (*a*) Problema 7.39, (*b*) Problema 7.41, (*c*) Problema 7.42.

7.C7 Crie um aplicativo computacional que projete o cabo suspenso para calcular as componentes vertical e horizontal dos componentes de reação no suporte A_n para os valores de P_1, P_2, ..., P_{n-1}, as distâncias horizontais d_1, d_2, ..., d_n e duas distâncias verticais h_0 e h_k. Use esse aplicativo para resolver os Problemas 7.95*b*, 7.96*b* e 7.97*b*.

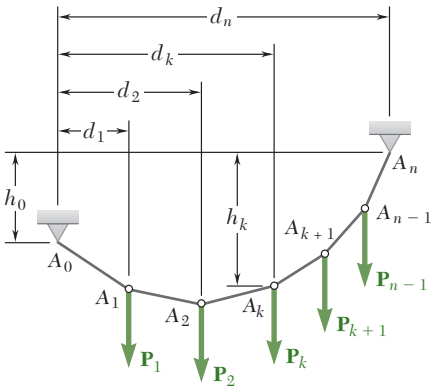


Figura P7.C7

7.C8 Uma instalação típica de linha de transmissão consiste em um cabo de comprimento s_{AB} e peso por unidade de comprimento w suspenso entre dois pontos de igual elevação, tal como mostra a figura. Usando um aplicativo computacional, construa uma tabela que possa ser usada no projeto de futuras instalações. A tabela deve apresentar as quantidades adimensionais h/L, s_{AB}/L, T_0/wL e $T_{máx}/wL$ para valores de c/L de 0,2 até 0,5, usando incrementos de 0,025, e de 0,5 até 4, usando incrementos de 0,5.

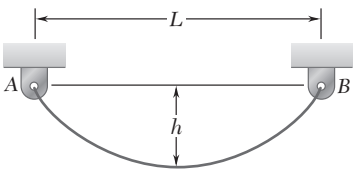


Figura P7.C8

7.C9 Usando um aplicativo computacional resolva o Problema 7.132 para valores de P de 0 a 50 N usando incrementos de 5 N.

A força de tração que a locomotiva pode desenvolver depende da resistência ao atrito entre as rodas motrizes e os trilhos. Quando há possibilidade de ocorrer descarrilhamento, como quando o trem corre sobre trilhos molhados, areia é depositada no topo do boleto dos trilhos para aumentar esse atrito.

CAPÍTULO 8

Atrito

8 Atrito

8.1 Introdução
8.2 As leis de atrito seco e coeficientes de atrito
8.3 Ângulos de atrito
8.4 Problemas que envolvem atrito seco
8.5 Cunhas
8.6 Parafusos de rosca quadrada
8.7 Mancais de deslizamento e atrito em eixo
8.8 Mancais de escora e atrito em disco
8.9 Atrito em roda e resistência ao rolamento
8.10 Atrito em correia

8.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, consideramos que superfícies que estão em contato são *sem atrito* (lisas) ou *rugosas* (ásperas). Se forem sem atrito, a força exercida por uma superfície sobre a outra será normal às superfícies e as duas superfícies poderão se mover livremente uma em relação à outra. Se forem rugosas, admitimos que forças tangenciais podem se desenvolver a ponto de evitar o movimento de uma superfície em relação à outra.

Esse ponto de vista é simplificado. Na verdade, não existe uma superfície perfeitamente sem atrito. Quando duas superfícies estão em contato, as forças tangenciais, chamadas *forças de atrito,* sempre irão aparecer ao tentarmos mover uma superfície em relação à outra. Por outro lado, essas forças de atrito são de intensidade limitada e não impedirão o movimento caso sejam aplicadas forças suficientemente grandes. Desse modo, a distinção entre superfícies sem atrito e superfícies rugosas é mera questão de gradação. Isso será visto mais claramente neste capítulo, dedicado ao estudo do atrito e suas aplicações a situações corriqueiras de engenharia.

Existem dois tipos de atrito: o *atrito seco,* por vezes denominado *atrito de Coulomb,* e o *atrito fluido.* O atrito fluido aparece entre camadas de fluido que se movem a diferentes velocidades. O atrito fluido é de grande importância em problemas que envolvam o escoamento de fluidos por meio de tubos e orifícios ou que tratem de corpos imersos em fluidos em movimento. Esse tipo de atrito também é básico na análise do movimento de *mecanismos lubrificados.* Tais problemas são levados em consideração em textos sobre mecânica dos fluidos. O presente estudo é limitado ao atrito seco, ou seja, a problemas que envolvam corpos rígidos em contato com superfícies *sem lubrificação.*

Na primeira parte deste capítulo, será analisado o equilíbrio de diversos corpos e estruturas rígidas, admitindo-se atrito seco nas superfícies de contato. Em seguida, serão consideradas algumas situações específicas de engenharia em que o atrito seco desempenha papel importante: cunhas, parafusos de rosca quadrada, mancais de deslizamento, mancais de escora, resistência ao rolamento e atrito em correia.

8.2 As leis de atrito seco e coeficientes de atrito

As leis de atrito seco são exemplificadas pelo seguinte experimento: um bloco de peso **W** é colocado sobre uma superfície plana horizontal. (Fig. 8.1*a*). As forças exercidas sobre o bloco são seu peso **W** e a reação da superfície. Como o peso não tem componente horizontal, a reação da superfície também não apresenta componente horizontal; logo, a reação é *normal* à superfície e é representada por **N** na Fig. 8.1*a*. Suponha agora que uma força horizontal **P** seja aplicada sobre o bloco (Fig. 8.1*b*). Se **P** for de pouca intensidade, o bloco não se moverá; portanto, alguma outra força horizontal deverá existir para contrabalançar **P**. Essa outra força é a *força de atrito estático* **F**, que, na verdade, é resultante de um grande número de forças exercidas sobre toda a su-

perfície de contato entre o bloco e o plano. A natureza dessas forças não é conhecida exatamente, mas, em geral, admite-se que elas são irregularidades das superfícies que estão em contato e, em certa medida, uma atração molecular.

Se a força **P** aumentar, a força de atrito **F** também aumentará, permanecendo oposta a **P** até que sua intensidade atinja um certo *valor máximo* F_m (Fig. 8.1*c*). Se **P** aumentar ainda mais, a força de atrito não mais poderá contrabalançá-la, e o bloco começará a deslizar.* Logo o bloco

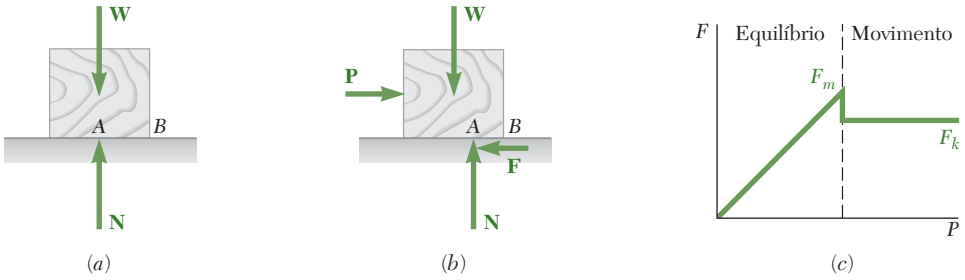


Figura 8.1

entra em movimento, a intensidade de **F** cai de F_m para um valor menor F_k. Isto porque há menos interpenetração entre as irregularidades das superfícies que estão em contato quando estas se movem entre si. Daí em diante, o bloco continuará deslizando em velocidade crescente, enquanto a força de atrito, representada por $\mathbf{F}_k$ e denominada *força de atrito cinético,* permanecerá mais ou menos constante.

Evidências experimentais mostram que o valor máximo F_m da força de atrito estático é proporcional ao componente normal N da reação da superfície. Temos:

$$F_m = \mu_s N \tag{8.1}$$

sendo μ_s uma constante denominada *coeficiente de atrito estático.* De modo semelhante, a intensidade F_k da força de atrito cinético pode ser determinada pela forma

$$F_k = \mu_k N \tag{8.2}$$

sendo μ_k uma constante denominada *coeficiente de atrito cinético.* Os coeficientes de atrito μ_s e μ_k não dependem da área das superfícies que estão em contato. Os coeficientes, porém, dependem muito da *natureza*

* Deve-se observar que à medida que a intensidade F da força de atrito aumenta de zero até F_m, o ponto de aplicação A da resultante **N** das forças normais de contato desloca-se para a direita, de modo que os binários formados, respectivamente, por **P** e **F** e por **W** e **N** permaneçam contrabalançados. Caso **N** atinja B antes que F alcance seu valor máximo F_m, o bloco irá inclinar sobre B antes que possa começar a deslizar (ver Problemas 8.15 e 8.16).

das superfícies em contato. Como eles dependem também da condição exata das superfícies, seus valores raramente são conhecidos em uma precisão maior que 5%. Valores aproximados dos coeficientes de atrito estático para diversas superfícies secas são dados na Tabela 8.1. Os valores correspondentes do coeficiente de atrito cinético seriam algo em torno de 25% menores. Como os coeficientes de atrito são grandezas adimensionais, os valores dados na Tabela 8.1 podem ser usados em qualquer sistema de unidades.

Tabela 8.1 Valores aproximados do coeficiente de atrito estático para superfícies secas

Metal sobre metal	0,15 a 0,60
Metal sobre madeira	0,20 a 0,60
Metal sobre pedra	0,30 a 0,70
Metal sobre couro	0,30 a 0,60
Madeira sobre madeira	0,25 a 0,50
Madeira sobre couro	0,25 a 0,50
Pedra sobre pedra	0,40 a 0,70
Terra sobre terra	0,20 a 1,00
Borracha sobre concreto	0,60 a 0,90

A partir da descrição fornecida anteriormente, quatro situações aparentemente podem ocorrer quando um corpo rígido está em contato com uma superfície horizontal:

1. As forças aplicadas sobre o corpo não tendem a movê-lo ao longo da superfície de contato; não há força de atrito (Fig. 8.2*a*).
2. As forças aplicadas tendem a mover o corpo ao longo da superfície de contato, mas não são grandes o suficiente para colocá-lo em movimento. Pode-se determinar a força de atrito **F** que se desenvolve resolvendo-se as equações de equilíbrio para o corpo. Como não há evidência de que **F** tenha atingido seu valor máximo, a equação $F_m = \mu_s N$ *não pode ser usada* para determinar a força de atrito (Fig. 8.2*b*).
3. As forças aplicadas são tais que o corpo está prestes a deslizar. Dizemos que *o movimento é iminente.* A força de atrito **F** atingiu seu valor máximo F_m e, junto com a força normal **N**, contrabalança com as forças aplicadas. Tanto as equações de equilíbrio quanto a equação $F_m = \mu_s N$ *podem ser usadas.* Observemos também que a força de atrito tem sentido contrário a do movimento iminente (Fig. 8.2*c*).
4. O corpo está deslizando sob ação das forças aplicadas, e as equações de equilíbrio não mais se aplicam. Porém, **F** é agora igual a $\mathbf{F}_k$ e a equação $F_k = \mu_k N$ pode ser usada. O sentido de $\mathbf{F}_k$ é contrário ao do movimento (Fig. 8.2*d*).

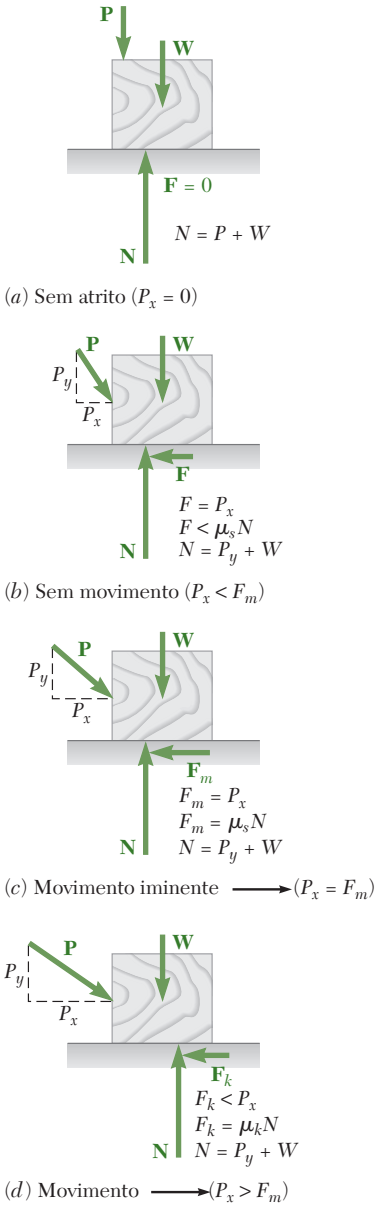


Figura 8.2

8.3 Ângulos de atrito

Convém às vezes substituir a força normal **N** e a força de atrito **F** pela sua resultante **R**. Consideremos novamente um bloco de peso **W** em repouso sobre uma superfície plana horizontal. Se nenhuma força horizontal é aplicada sobre o bloco, a resultante **R** reduz-se à força normal **N** (Fig. 8.3*a*). Porém, se a força aplicada **P** tiver um componente horizontal $\mathbf{P}_x$ que tenda a mover o bloco, a força **R** terá um componente horizontal **F** e, portanto, formará um ângulo ϕ com a normal à superfície (Fig. 8.3*b*). Se $\mathbf{P}_x$ aumentar até o movimento tornar-se iminente, o ângulo entre **R** e a força vertical crescerá e atingirá um valor máximo (Fig. 8.3*c*). Esse valor é denominado *ângulo de atrito estático* e é representado por ϕ_s. Da geometria da Fig. 8.3*c*, observamos que:

$$\text{tg } \phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$$

$$\text{tg } \phi_s = \mu_s \tag{8.3}$$

Se o movimento de fato ocorrer, a intensidade da força de atrito cairá para F_k; de modo similar, o ângulo ϕ entre **R** e **N** diminuirá para um valor menor ϕ_k, denominado *ângulo de atrito cinético* (Fig. 8.3*d*). Da geometria da Fig. 8.3*d*, temos:

$$\text{tg } \phi_k = \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$$

$$\text{tg } \phi_k = \mu_k \tag{8.4}$$

Outro exemplo mostrará como o uso do ângulo de atrito pode ser vantajoso na análise de alguns problemas. Considere um bloco em repouso sobre uma prancha sujeito apenas ao seu peso **W** e à reação **R** da prancha. A prancha pode assumir qualquer inclinação desejada. Se a prancha está na horizontal, a força **R** exercida pela prancha sobre o bloco é perpendicular à prancha e contrabalança o peso **W** (Fig. 8.4*a*). Se a prancha assumir um pequeno ângulo de inclinação θ, a força **R** se desviará da perpendicular à prancha do ângulo θ e continuará a contrabalançar **W** (Fig. 8.4*b*); a força terá então um componente normal **N** de intensidade $N = W \cos \theta$ e um componente tangencial **F** de intensidade $F = W \text{ sen } \theta$.

Se continuarmos a aumentar o ângulo de inclinação, o movimento logo se tornará iminente. Nesse momento, o ângulo entre **R** e a normal terá atingido seu valor máximo ϕ_s (Fig. 8.4*c*). O valor do ângulo de inclinação correspondente ao movimento iminente é denominado *ângulo de repouso*. Fica claro que o ângulo de repouso equivale ao ângulo de atrito estático ϕ_s. Se o ângulo de inclinação aumentar ainda mais, o movimento terá início, e o ângulo entre **R** e a normal cairá para o valor menor ϕ_k (Fig. 8.4*d*). A reação **R** não mais será vertical, e as forças exercidas sobre o bloco estarão desequilibradas.

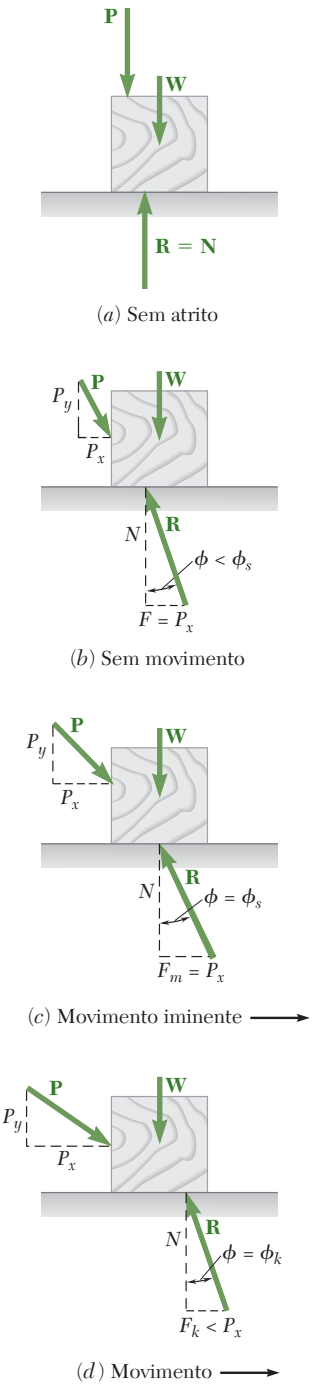
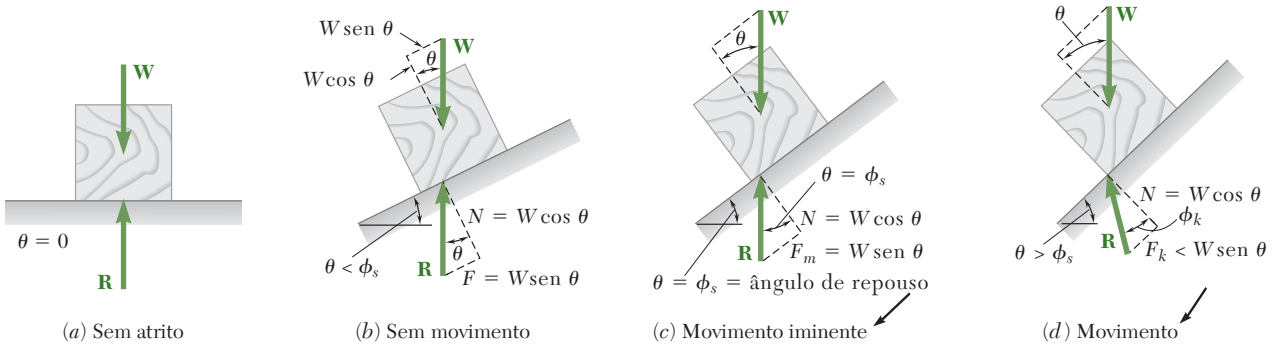


Figura 8.3



(*a*) Sem atrito (*b*) Sem movimento (*c*) Movimento iminente (*d*) Movimento

Figura 8.4

8.4 Problemas que envolvem atrito seco

Foto 8.1 O coeficiente de atrito estático entre um dos pacotes e a correia transportadora inclinada deve ser grande o suficiente para possibilitar que o pacote seja transportado sem deslizar.

Encontram-se problemas que envolvem atrito seco em muitos usos de engenharia. Alguns tratam de situações simples, tais como as do bloco deslizando sobre um plano, descrito nas seções anteriores. Outros envolvem situações mais complicadas, como as do Problema Resolvido 8.3; muitos tratam da estabilidade de corpos rígidos em movimento acelerado e serão estudados em dinâmica. Além disso, diversas máquinas e mecanismos comuns podem ser analisados pela aplicação das leis do atrito seco. Incluem-se aqui cunhas, parafusos, mancais de deslizamento e de escora e transmissões por correia. Esses casos serão estudados nas próximas seções.

Os *métodos* a serem adotados na resolução de problemas que envolvam atrito seco são os mesmos já adotados nos capítulos anteriores. Se o problema envolve apenas um movimento de translação, sem possíveis rotações, o corpo em consideração geralmente pode ser tratado como uma partícula, e aplicando-se os métodos do Cap. 2. Se o problema envolve uma possível rotação, o corpo deve ser considerado rígido e os métodos do Cap. 4 devem ser adotados. Se a estrutura considerada é constituída de diversas partes, deve-se utilizar o princípio de ação e reação, como foi feito no Cap. 6.

Se o corpo considerado sofrer ação de mais do que três forças (incluindo as reações das superfícies de contato), a reação de cada superfície será representada pelos seus componentes **N** e **F**, e o problema será resolvido a partir das equações de equilíbrio. Se apenas três forças atuam sobre o corpo em consideração, pode ser mais conveniente representar cada reação por uma força única **R** e resolver o problema desenhando um triângulo de forças.

A maioria dos problemas que envolvem atrito recai em um dos seguintes *três grupos*. No *primeiro grupo* de problemas, todas as forças aplicadas são dadas, e os coeficientes de atrito são conhecidos; devemos, então, determinar se o corpo considerado permanecerá em repouso ou deslizará. A força de atrito **F** *necessária para manter o equilíbrio* é desconhecida (sua intensidade *não* é igual a $\mu_s N$) e deve ser determinada em conjunto com a força normal **N** traçando-se um diagrama de corpo livre e *resolvendo-se as equações de equilíbrio* (Fig. 8.5*a*). O valor encontrado para a intensidade F da força de atrito é, então, comparado com o valor máximo $F_m = \mu_s N$. Se F for menor ou igual a F_m, o corpo permanecerá em repouso. Se o valor encontrado para F for maior que F_m, o equilíbrio

não poderá ser mantido e ocorrerá movimento; a intensidade real da força de atrito será, então, $F_k = \mu_k N$.

Nos problemas do *segundo grupo*, são dadas todas as forças aplicadas e sabe-se que o movimento é iminente; devemos, então, determinar o valor do coeficiente de atrito estático. Novamente, determinamos a força de atrito e a força normal traçando um diagrama de corpo livre e resolvendo as equações de equilíbrio (Fig. 8.5*b*). Como agora sabemos que o valor encontrado para F é igual ao valor máximo F_m, podemos determinar o coeficiente de atrito escrevendo e resolvendo a equação $F_m = \mu_s N$.

Nos problemas do *terceiro grupo*, é dado o coeficiente de atrito estático e sabe-se que o movimento é iminente em uma dada direção; devemos, então, determinar a intensidade ou a direção de uma das forças aplicadas. A força de atrito deve ser mostrada no diagrama de corpo livre com um *sentido contrário ao do movimento iminente* e uma intensidade $F_m = \mu_s N$. (Fig. 8.5*c*). Podem-se, então, escrever as equações de equilíbrio e determinar a força desejada.

Conforme se observou anteriormente, quando apenas três forças estiverem envolvidas, pode ser mais conveniente representar a reação da superfície por uma força única **R** e resolver o problema traçando-se um triângulo de forças. Tal resolução é empregada no Problema Resolvido 8.2.

Quando dois corpos A e B estão em contato (Fig. 8.6*a*), as forças de atrito exercidas, respectivamente, por A sobre B e por B sobre A são iguais e opostas (terceira lei de Newton). Ao se traçar o diagrama de corpo livre de um dos corpos, é importante incluir a força de atrito apropriada com seu sentido correto. Deve-se então observar a seguinte regra: *o sentido da força de atrito exercida sobre A é contrário ao do movimento (ou movimento iminente) de A observado de B* (Fig. 8.6*b*).* O sentido da força de atrito atuante sobre B é determinado de modo similar (Fig. 8.6*c*). Observe-se que o movimento de A observado de B é um *movimento relativo*. Por exemplo, se o corpo A está parado e o corpo B se move, o corpo A terá um movimento em relação a B. Além disso, se os corpos A e B movem-se para baixo, mas B é mais rápido que A, o movimento do corpo A observado do corpo B será para cima.

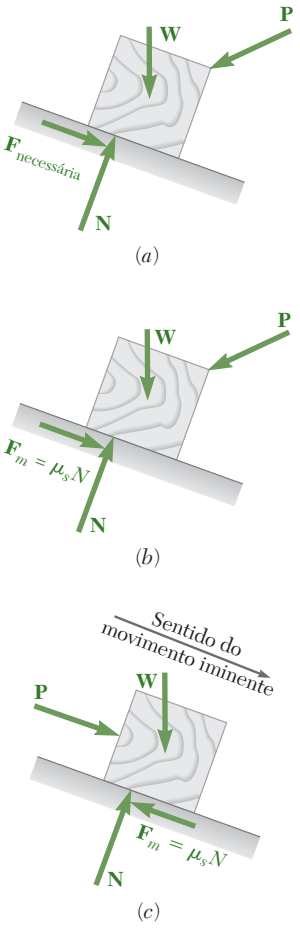


Figura 8.5

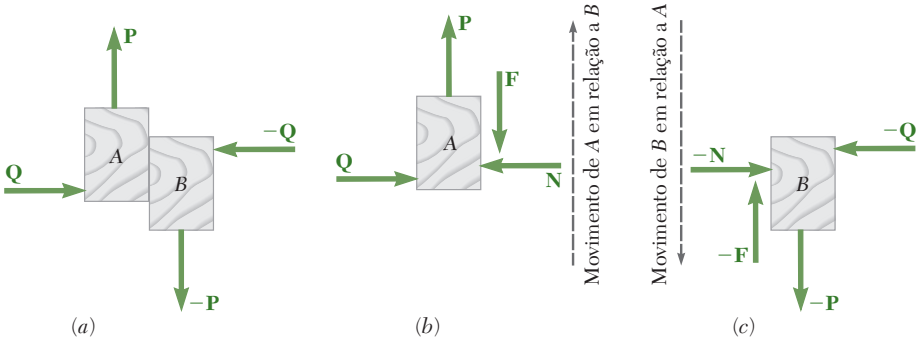
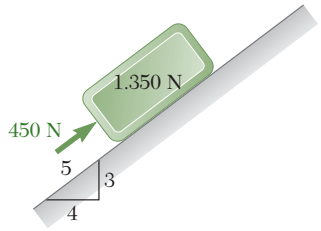


Figura 8.6

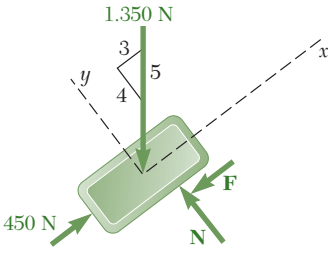
* Portanto, *é o mesmo sentido do movimento de B observado de A*.



PROBLEMA RESOLVIDO 8.1

Uma força de 450 N atua como na figura, sobre um bloco de 1.350 N posicionado sobre um plano inclinado. Os coeficinetes de atrito entre o bloco e o plano são $\mu_s = 0{,}25$ e $\mu_k = 0{,}20$. Determine se o bloco está em equilíbrio e encontre o valor da força de atrito.

SOLUÇÃO



Força necessária para equilíbrio. Determinamos primeiramente o valor da força de atrito *necessária para se manter o equilíbrio*. Admitindo que **F** seja direcionada para baixo e para esquerda, traçamos o diagrama de corpo livre do bloco da seguinte maneira:

$$+\nearrow \Sigma F_x = 0: \qquad 450\text{ N} - \tfrac{3}{5}(1.350\text{ N}) - F = 0$$
$$F = -360\text{ N} \qquad \mathbf{F} = 360\text{ N}\nearrow$$

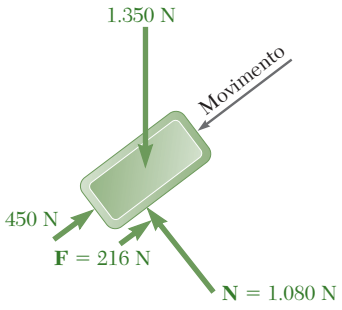
$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0: \qquad N - \tfrac{4}{5}(1.350\text{ N}) = 0$$
$$N = +1.080\text{ N} \qquad \mathbf{N} = 1.080\text{ N}\nwarrow$$

A força **F** necessária para se manter o equilíbrio é 360 N, direcionada para cima e para direita; logo, a tendência do bloco é deslizar plano abaixo.

Força de atrito máxima. A intensidade de força de atrito máxima que pode se desenvolver é:

$$F_m = \mu_s N \qquad F_m = 0{,}25(1.080\text{ N}) = 270\text{ N}$$

Como o valor da força necessária para manter o equilíbrio (360 N) é maior que o valor máximo que pode ser obtido (270 N), o equilíbrio não será mantido e o *bloco deslizará plano abaixo*.



Valor real da força de atrito. A intensidade da força de atrito real é obtida como se segue:

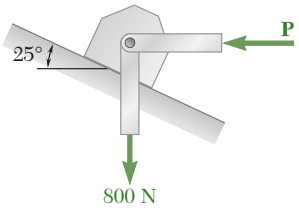
$$F_{\text{real}} = F_k = \mu_k N$$
$$= 0{,}20(1.080\text{ N}) = 216\text{ N}$$

O sentido dessa força é contrário ao sentido do movimento; logo, a força é direcionada para cima e para direita:

$$\mathbf{F}_{\text{real}} = 216\text{ N}\nearrow \quad \blacktriangleleft$$

Deve-se observar que as forças exercidas sobre o bloco não estão equilibradas; a resultante é:

$$\tfrac{3}{5}(1.350\text{ N}) - 450\text{ N} - 216\text{ N} = 144\text{ N}\swarrow$$



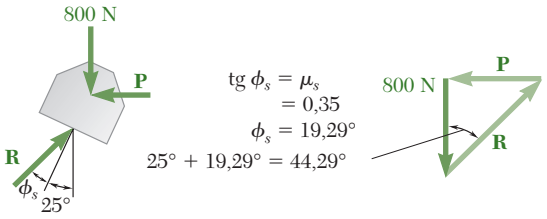
PROBLEMA RESOLVIDO 8.2

Um bloco de apoio sofre a ação de duas forças, tal como mostra a figura. Sabendo que os coeficientes de atrito entre o bloco e o plano inclinado são $\mu_s = 0{,}35$ e $\mu_k = 0{,}25$, determine (*a*) a força **P** para que o movimento de bloco para cima seja iminente, (*b*) a força de atrito quando o bloco estiver movendo-se para cima, (*c*) a menor força de **P** necessária para se evitar que o bloco deslize para baixo.

SOLUÇÃO

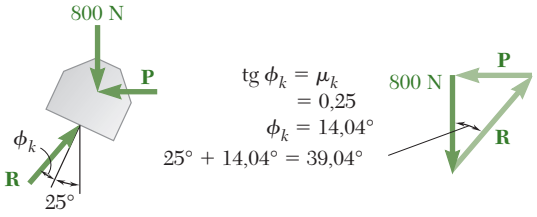
Diagrama de corpo livre. Para cada parte do problema, traçamos um diagrama de corpo livre do bloco e um triângulo de forças formado pela força vertical de 800 N, a força horizontal **P** e a força **R** exercida pelo plano inclinado sobre o bloco. A direção de **R** deve ser determinada em cada caso. Observamos que, sendo **P** perpendicular à força de 800 N, o triângulo de forças é retângulo, possibilitando uma fácil resolução para **P**. Na maioria dos problemas, porém, o triângulo de forças é escaleno, devendo-se aplicar a lei dos senos para se obter a solução.

a. Força *P* para o movimento iminente do bloco para acima



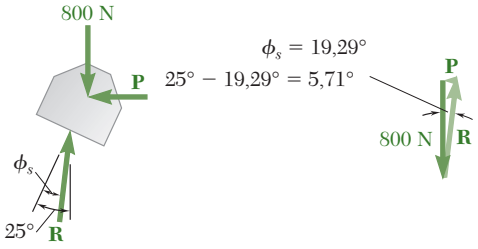
$$P = (800\text{ N}) \tan 44{,}29° \qquad \mathbf{P} = 780\text{ N} \leftarrow \blacktriangleleft$$

b. Força *P* para manter o bloco em movimento plano acima

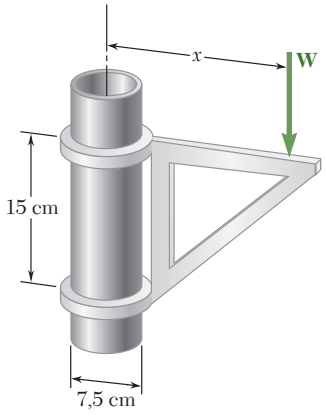


$$P = (800\text{ N}) \tan 39{,}04° \qquad \mathbf{P} = 649\text{ N} \leftarrow \blacktriangleleft$$

c. Força *P* para evitar que o bloco deslize plano abaixo



$$P = (800\text{ N}) \tan 5{,}71° \qquad \mathbf{P} = 80{,}0\text{ N} \leftarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 8.3

O suporte móvel mostrado na figura pode ser posicionado a qualquer altura sobre o tubo de 7,5 cm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entro o tubo e o suporte é 0,25, determine a distância mínima x para qual a carga **W** pode ser sustentada. Desconsidere o peso do suporte.

SOLUÇÃO

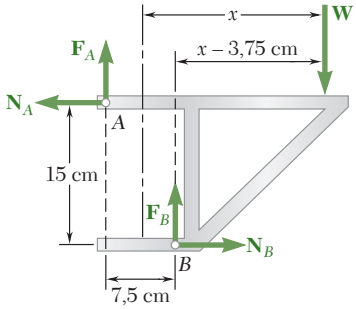


Diagrama de corpo livre. Traçamos um diagrama de corpo livre do suporte. Quando **W** for aplicada à distância mínima x do eixo do tubo, o suporte estará prestes a deslizar e as forças do atrito em A e B terão atingido seus valores máximos:

$$F_A = \mu_s N_A = 0{,}25\, N_A$$
$$F_B = \mu_s N_B = 0{,}25\, N_B$$

Equações de equilíbrio

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad N_B - N_A = 0$$
$$N_B = N_A$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad F_A + F_B - W = 0$$
$$0{,}25N_A + 0{,}25N_B = W$$

E, uma vez que se concluiu que N_B é igual a N_A:

$$0{,}50N_A = W$$
$$N_A = 2W$$

Dúvida nas distâncias de Fa e Na

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad N_A(15\text{ cm}) - F_A(7{,}5\text{ cm}) - W(x - 3{,}75\text{ cm}) = 0$$
$$15N_A - 7{,}5(0{,}25N_A) - Wx + 3{,}75W = 0$$
$$15(2W) - 1{,}875(2W) - Wx + 3{,}75W = 0$$

Dividindo-se por W e resolvendo para x:

$$x = 30\text{ cm} \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, estudamos e aplicamos as *leis de atrito seco.* Antes havíamos nos deparado apenas com (*a*) superfícies sem atrito (lisas) que podem se mover livremente umas em relação às outras, (*b*) superfícies rugosas (ásperas) que não admitiam movimento relativo entre si.

A. Na resolução de problemas que envolvam atrito seco, devemos ter em mente o seguinte.

1. A reação R exercida por uma superfície sobre um corpo livre pode ser decomposta em um componente normal **N** e um componente tangencial **F**. O componente tangencial é denominado *força de atrito.* Quando um corpo está em contato com uma superfície fixa, a direção da força de atrito **F** é contrário ao do movimento real ou iminente do corpo.

a. Não ocorrerá movimento enquanto F não exceder o valor máximo $F_m = \mu_s N$, sendo μ_s o *coeficiente de atrito estático.*

b. Ocorrerá movimento se um valor de F maior que F_m for necessário para se manter o equilíbrio. Estabelecendo-se o movimento, o valor real de F cai para $F_k = \mu_k N$, sendo μ_k o *coeficiente de atrito cinético* [Problema Resolvido 8.1].

2. Quando apenas três forças estiverem envolvidas, pode ser preferível uma outra abordagem para a análise do atrito [Problema Resolvido 8.2]. A reação **R** é definida pela sua intensidade R e pelo ângulo ϕ que ela forma com a normal à superfície. Não ocorrerá movimento enquanto ϕ não exceder ao valor máximo ϕ_s, sendo $\text{tg}\,\phi_s = \mu_s$. Ocorrerá movimento se um valor de ϕ maior que ϕ_s for necessário para se manter o equilíbrio, e o valor real de ϕ cairá para ϕ_k, sendo $\text{tg}\,\phi_k = \mu_k$.

3. Quando dois corpos estiverem em contato, o sentido do movimento relativo real ou iminente do ponto de contato deve ser determinado. Em cada um dos dois corpos, devemos mostrar uma força de atrito **F** de sentido contrário ao do movimento real ou iminente do corpo visto em relação ao outro corpo.

(*continua*)

B. Métodos de resolução. A primeira etapa da sua resolução consiste em *traçar um diagrama de corpo livre* do corpo sob consideração, decompondo-se a força exercida em cada plano em que existe atrito em um componente normal **N** e uma força de atrito **F**. Se vários corpos estiverem envolvidos, tracemos um diagrama de corpo livre para cada um deles, rotulando e direcionando as forças em cada superfície de contato, do modo que aprendemos a fazer ao analisar as estruturas no Cap. 6.

O problema que temos de resolver pode enquadrar-se em uma das cinco categorias seguintes:

1. Todas as forças aplicadas e os coeficientes de atrito são conhecidos e deve-se determinar se o equilíbrio é mantido. Observe que, nesta situação, a força de atrito é desconhecida e *não pode ser considerada igual a* $\mu_s N$.

a. Escrever as equações de equilíbrio para determinar *N* e *F*.

b. Calcular a força de atrito admissível máxima, $F_m = \mu_s N$. Se $F \leq F_m$, o equilíbrio e mantido. Se $F > F_m$, ocorre movimento e a intensidade da força de atrito é $F_k = \mu_k N$. [Problema Resolvido 8.1].

2. Todas as forças aplicadas são conhecidas e deve-se encontrar o menor valor admissível de μ_s para o qual o equilíbrio é mantido. Admitiremos que o movimento é iminente e determinaremos o valor correspondente de μ_s.

a. Escrever as equações de equilíbrio para determinar *N* e *F*.

b. Como o movimento é iminente, $F = F_m$. Substituir os valores encontrados para N e F na equação $F_m = \mu_s N$ e resolver para μ_s.

3. O movimento do corpo é iminente e μ_s é conhecido; deve-se encontrar alguma grandeza desconhecida, tal como uma distância, um ângulo, a intensidade de uma força ou a direção de uma força.

a. Supor um possível movimento iminente do corpo e, no diagrama de corpo livre, traçar a força de atrito em sentido contrário ao do suposto movimento.

b. Como o movimento é iminente, $F = F_m = \mu_s N$. Considerando o valor conhecido de μ_s, podemos expressar F em termos de N no diagrama de corpo livre e, assim, eliminar uma incógnita.

c. Escrever e resolver as equações de equilíbrio para a incógnita que é procurada [Problema Resolvido 8.3].

PROBLEMAS

8.1 Determine se o bloco mostrado na figura está em equilíbrio e encontre a intensidade e o sentido da força de atrito quando $\theta = 25°$ e $P = 675$ N.

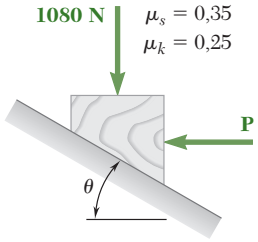


Figura P8.1 e P8.2

8.2 Determine se o bloco mostrado na figura está em equilíbrio e encontre a intensidade e a direção da força de atrito quando $\theta = 30°$ e $P = 135$ N.

8.3 Determine se o bloco mostrado na figura está em equilíbrio e encontre a intensidade e o sentido da força de atrito quando $\theta = 40°$ e $P = 400$ N.

8.4 Determine se o bloco mostrado na figura está em equilíbrio e encontre a intensidade e o sentido da força de atrito quando $\theta = 35°$ e $P = 200$ N.

8.5 Sabendo que $\theta = 35°$, determine o intervalo de valores de P para o qual o equilíbrio é mantido.

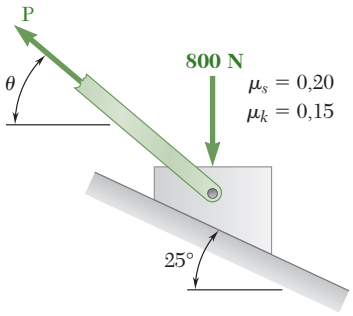


Figura P8.3, P8.4 e P8.5

8.6 Determine o intervalo de valores de P para o qual o equilíbrio do bloco mostrado na figura é mantido.

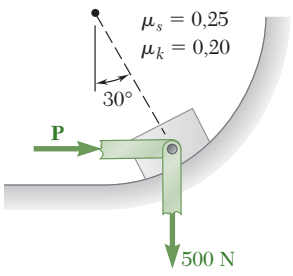


Figura P8.6

8.7 Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco de 15 kg e o plano inclinado é $\mu_s = 0{,}25$, determine (*a*) o menor valor de P necessário para se manter o bloco em equilíbrio, (*b*) o valor correspondente de β.

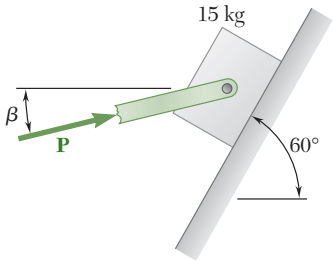


Figura P8.7

8.8 Considerando apenas valores de θ menores que 90°, determine o menor valor de θ solicitado para o qual o movimento do bloco para a direita é iminente quando (*a*) $W = 340$ N, (*b*) $W = 450$ N.

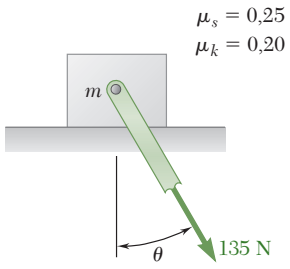


Figura P8.8

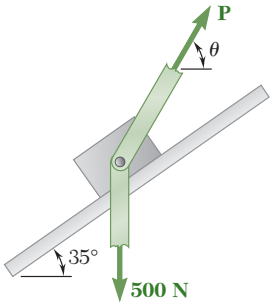


Figura P8.9

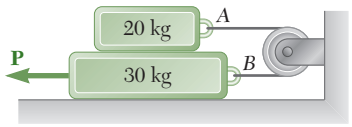


Figura P8.11

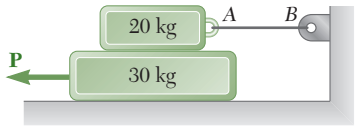


Figura P8.12

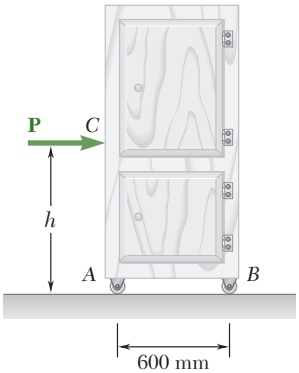


Figura P8.15 e P8.16

8.9 Os coeficientes de atrito entre o bloco e o trilho são $\mu_s = 0{,}30$ e $\mu_k = 0{,}25$. Sabendo que $\theta = 65°$, determine o menor valor da força P necessária (a) para iniciar o movimento do bloco sobre o trilho (b) para manter o bloco em movimento para baixo.

8.10 O bloco de 360 N está ligado à articulação AB e repousa sobre uma esteira em movimento. Sabendo que $\mu_s = 0{,}25$ e $\mu_k = 0{,}20$ determine a intensidade da força horizontal **P** que pode ser aplicada na esteira para manter esse movimento (a) para a direita, (b) para a esquerda.

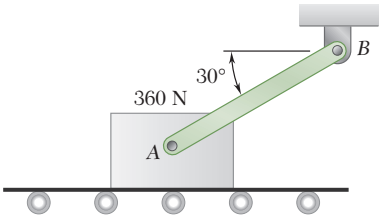


Figura P8.10

8.11 e 8.12 Os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0{,}40$ e $\mu_k = 0{,}30$ entre todas as superfícies de contato. Determine a menor força **P** necessária para iniciar o movimento do bloco de 30 kg se o cabo AB (a) está ligado tal como mostra a figura, (b) é removido.

8.13 Três pacotes de 4 kg A, B e C são colocados em uma esteira transportadora que está em repouso. Entre a esteira e os pacotes A e C, os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0{,}30$ e $\mu_k = 0{,}20$; entre o pacote B e a esteira, os coeficientes são $\mu_s = 0{,}10$ e $\mu_k = 0{,}08$. Os pacotes são colocados na esteira tal que eles estejam em contato cada um com o outro e em repouso. Determine qual dos pacotes, se houver, moverá e a força de atrito atuante em cada um dos pacotes.

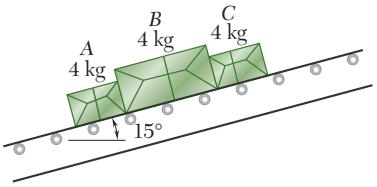


Figura P8.13

8.14 Resolva o Problema 8.13 considerando que o pacote B é colocado à direita dos pacotes A e C.

8.15 Um armário de 540 N é montado sobre rodízios que podem ser travados para se evitar seu rolamento. O coeficiente de atrito estático entre o piso e cada rodízio é 0,30. Se $h = 800$ mm, determine a intensidade da força **P** necessária para o movimento iminente do armário para a direita (a) se todos os rodízios estiverem travados, (b) se os rodízios em B estiverem travados e os rodízios em A estiverem livres para rodar, (c) se os rodízios em A estiverem travados e os rodízios em B estiverem livres para rodar.

8.16 Um armário de 540 N é montado sobre rodízios que podem ser travados para se evitar seu rolamento. O coeficiente de atrito estático entre o piso e cada rodízio é 0,30. Considerando que os rodízios em A e B estejam travados, determine (a) a força **P** necessária para o movimento iminente do armário para a direita, (b) a máxima altura admissível h para que o armário não tombe.

8.17 O cilindro mostrado na figura tem peso W e raio r, e o coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo em A e B. Determine a intensidade do maior binário **M** que pode ser aplicado ao cilindro para que ele não gire.

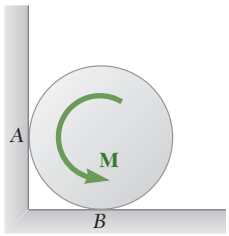


Figura P8.17 e P8.18

8.18 O cilindro mostrado na figura tem peso W e raio r. Expresse, em termos de W e r, a intensidade do maior binário **M** que pode ser aplicado ao cilindro para que ele não gire, considerando que o coeficiente de atrito estático seja (*a*) zero em A e 0,30 em B, (*b*) 0,25 em A e 0,30 em B.

8.19 O cilindro hidráulico mostrado na figura exerce uma força de 3 kN para a direita no ponto B e para a esquerda no ponto E. Determine a intensidade do binário **M** necessária para girar o tambor no sentido horário a uma velocidade constante.

8.20 Um binário **M** de intensidade 100 N · m é aplicado ao tambor, tal como mostra a figura. Determine a menor força que deve ser exercida pelo cilindro hidráulico nas uniões B e E para que o tambor não gire.

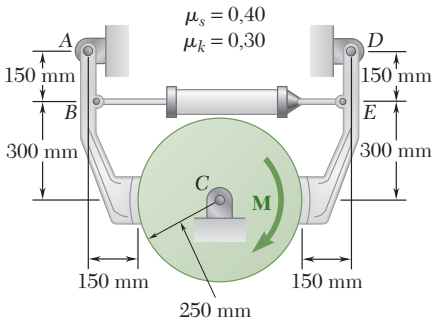


Figura P8.19 e P8.20

8.21 Uma escada AB de 6,5 m encosta-se em uma parede como mostrado na figura. Considerando que o coeficiente de atrito estático μ_s é zero em B, determine o menor valor de μ_s em A para que o equilíbrio seja mantido.

8.22 Uma escada AB de 6,5 m encosta-se em uma parede como mostrado na figura. Considerando que o coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo para A e B, determine o menor valor de μ_s para que o equilíbrio seja mantido.

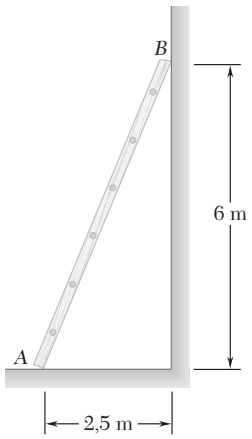


Figura P8.21 e *P8.22*

8.23 e *8.24* A extremidade A de uma haste delgada e uniforme de comprimento L e peso W é mantida em equilíbrio na superfície como mostrado na figura, enquanto a extremidade B é suportada por uma corda BC. Sabendo que os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0{,}40$ e $\mu_k = 0{,}30$, determine (*a*) o maior valor de θ para qual o movimento é iminente, (*b*) o valor correspondente da tensão na corda.

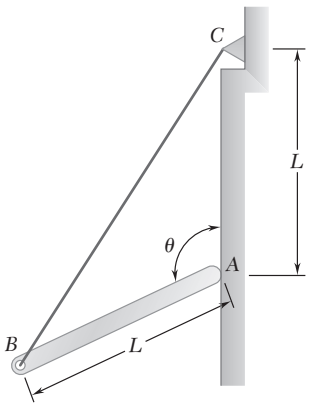


Figura P8.23

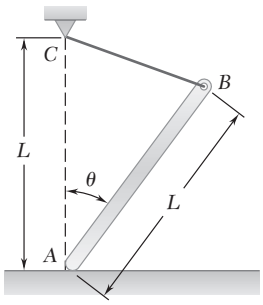


Figura *P8.24*

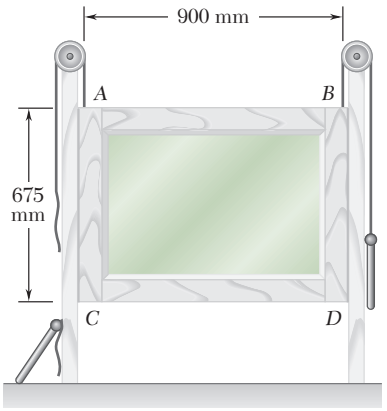


Figura P8.25

8.25 Uma janela corrediça pesando 50 N é geralmente sustentada por dois pesos de 25 N. Sabendo que a janela permanece aberta depois que uma das cordas dos pesos foi cortada, determine o menor valor possível do coeficiente de atrito estático. (Considere que os pesos são levemente menores que a estrutura e se prenderão apenas nos pontos *A* e *D*.)

8.26 Um bloco de concreto de 500 N é elevado por um par de pinças mostrado na figura. Determine o menor valor admissível do coeficiente de atrito estático entre o bloco e as pinças em *F* e *G*.

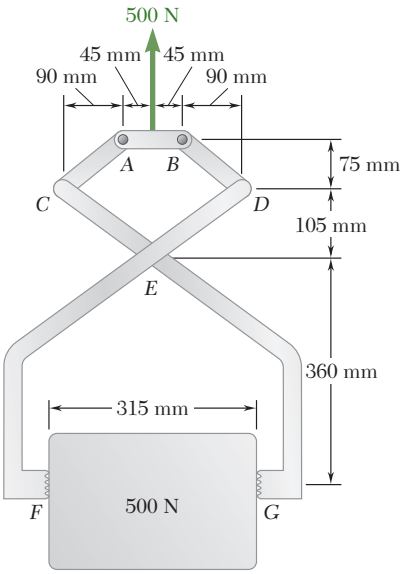


Figura P8.26

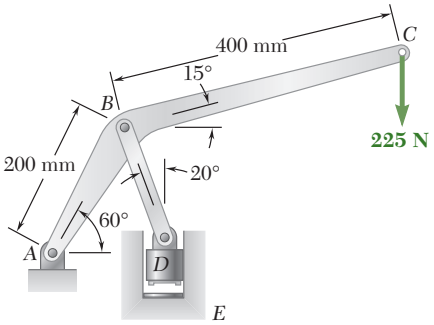


Figura P8.25

8.27 Uma prensa mostrada é usada para cunhar um pequeno carimbo em *E*. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a guia vertical e a matriz de cunhagem *D* é 0,30, determine a força exercida pelo cunho sobre o carimbo.

8.28 Um eixo excêntrico de 100 mm de raio mostrado na figura é usado para controlar o movimento da placa *CD*. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o excêntrico e a placa é 0,45, e desprezando o atrito dos rolos de suporte, determine (*a*) a força **P** necessária para manter o movimento da placa, sabendo que a placa tem 20 mm de espessura, (*b*) a maior espessura da placa para a qual o mecanismo é autotravante (ou seja, para que a placa não possa mover por maior que seja a força **P**).

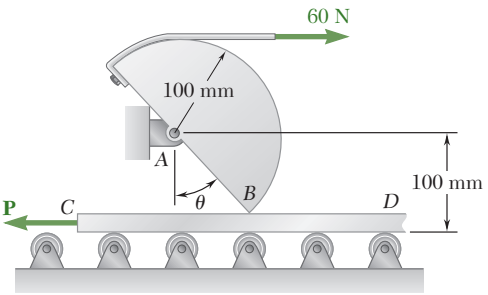


Figura P8.28

8.29 Uma haste delgada de comprimento L está apoiada entre um pino C e uma parede vertical e sustenta uma carga **P** em sua extremidade A. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,20 em B e C, calcule o intervalo de valores da razão L/a para que o equilíbrio seja mantido.

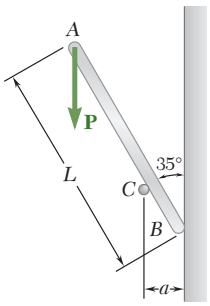


Figura P8.29

8.30 A placa $ABCD$ de 225 N é ligada em A e D aos colares que podem deslizar sobre a barra vertical. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre os colares e a barra é 0,40, determine se a placa está em equilíbrio na posição mostrada na figura quando a intensidade da força vertical aplicada em E é (*a*) $P = 0$, (*b*) $P = 90$ N.

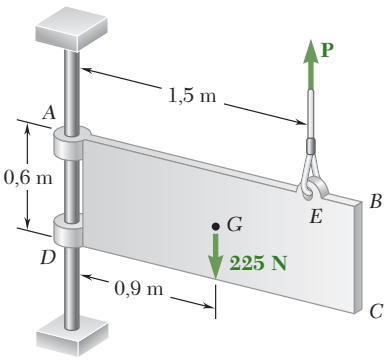


Figura P8.30

8.31 No Problema 8.30, determine o intervalo de intensidade dos valores da força vertical P aplicada em E para a qual a placa se moverá para baixo.

8.32 Um tubo de 60 mm de diâmetro é apertado pela chave inglesa mostrada na figura. As partes AB e DE da chave são rigidamente ligadas entre si e a parte CF é conectada por um pino em D. Se a chave deve apertar o tubo e ser autotravante, determine os coeficientes de atrito mínimos necessários em A e C.

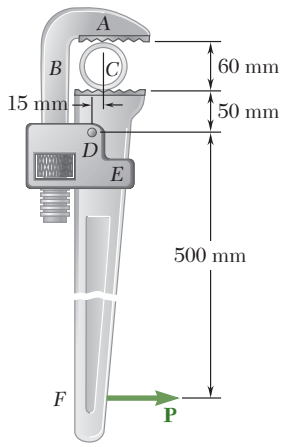


Figura P8.32

8.33 Resolva o Problema 8.32 considerando que o diâmetro do tubo é 30 mm.

8.34 Uma viga de 3 m, pesando 5.400 N, é movida para a esquerda sobre a plataforma. A força horizontal **P** é aplicada no carrinho, que é montado em rodas sem atrito. Os coeficientes de atrito entre as superfícies são $\mu_s = 0{,}30$ e $\mu_k = 0{,}25$, e inicialmente $x = 0{,}6$ m. Sabendo que a superfície superior do carrinho é ligeiramente mais alta que a plataforma, determine a força **P** necessária para iniciar o movimento da viga (*Dica*: A viga é suportada em A e D.)

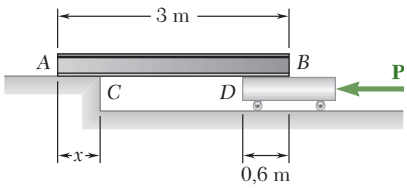


Figura P8.34

8.35 (*a*) Mostre que a viga do Problema 8.34 *não pode* se mover se a superfície superior do carrinho é ligeiramente *mais baixa* que a plataforma. (*b*) Mostre que a viga *pode* ser movida se dois trabalhadores de 787,5 N estão na viga em B e determine a distância máxima para a esquerda que a viga pode ser movida.

8.36 Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o colar e a barra é 0,35, determine o intervalo dos valores de P para que o equilíbrio seja mantido quando $\theta = 50^\circ$ e $M = 20$ N · m.

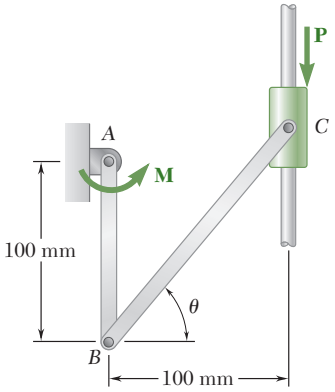


Figura P8.36 e P8.37

8.37 Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o colar e a barra é 0,40, determine o intervalo dos valores de M para que o equilíbrio seja mantido quando $\theta = 60^\circ$ e $P = 200$ N.

8.38 A haste esbelta AB de comprimento $l = 600$ m é ligada a um colar em B e repousa sobre um pequeno rolete localizado a uma distância horizontal $a = 80$ mm da barra vertical sobre a qual o colar desliza. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o colar e a barra vertical é 0,25 e desprezando o raio do rolete, determine o intervalo de valores de P para a qual o equilíbrio seja mantido quando $Q = 100$ N *e* $\theta = 30°$.

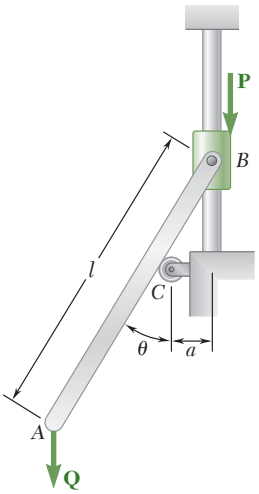


Figura P8.38

8.39 Dois blocos A e B de 4,5 N estão ligados por uma haste esbelta de massa desprezível. O coeficiente de atrito estático é 0,30 entre todas as superfícies de contato, e a barra forma um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a vertical. (*a*) Mostre que o sistema está em equilíbrio quando $P = 0$. (*b*) Determine o maior valor de P para o qual o equilíbrio é mantido.

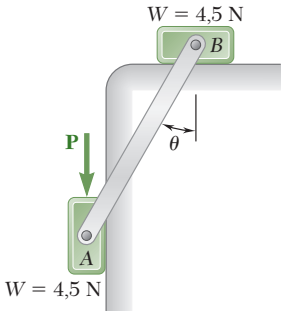


Figura P8.39

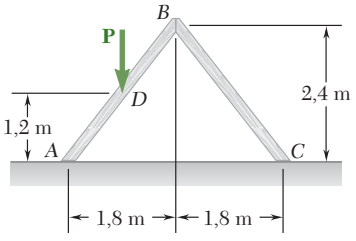


Figura *P8.40*

8.40 Duas tábuas uniformes idênticas, cada qual pesando 180 N, estão encostadas temporariamente uma contra a outra tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies é 0,40, determine (*a*) a maior intensidade da força **P** para que o equilíbrio seja mantido, (*b*) a superfície em que o movimento é iminente.

8.41 Duas barras idênticas de 1,5 m de comprimento conectadas por um pino em B estão colocadas entre duas paredes e uma superfície horizontal como mostrado na figura. Designando por μ_s o coeficiente de atrito estático em A, B e C, determine o menor valor de μ_s para que o equilíbrio seja mantido.

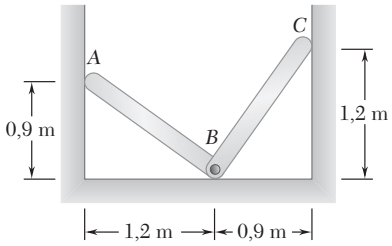


Figura P8.41

8.42 Dois blocos A e B de 8 kg repousam em prateleiras e são conectadas por uma barra de massa desprezível. Sabendo que a intensidade da força **P** aplicada em C é lentamente incrementada a partir de zero, determine o valor de P para qual movimento ocorre, e qual é o movimento, quando o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies é $(a)\mu_s = 0{,}40$, $(b)\ \mu_s = 0{,}50$.

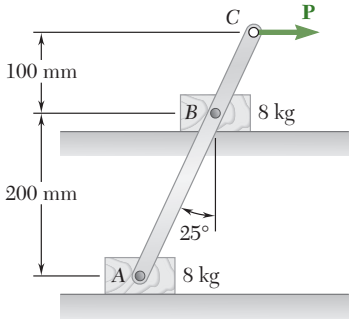


Figura P8.42

8.43 Uma barra esbelta de aço de 22,5 cm de comprimento é colocada dentro de um tubo, tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a barra e o tubo é 0,20; determine o maior valor de θ para que a barra não caia dentro do tubo.

8.44 No Problema 8.43, determine o menor valor de θ para que a barra não caia fora do tubo.

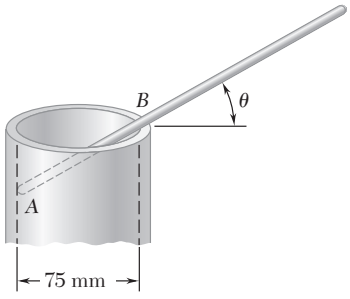


Figura P8.43

8.45 Duas hastes esbeltas de peso desprezível são conectadas por um pino em C e ligadas aos blocos A e B, cada qual com peso W. Sabendo que $\theta = 80°$ e que o coeficiente de atrito estático entre os blocos e a superfície horizontal é 0,30, determine o maior valor de P para que o equilíbrio seja mantido.

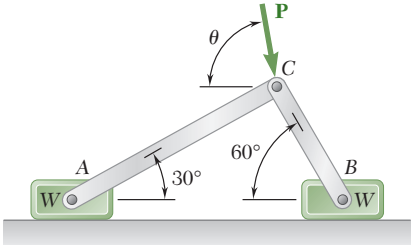


Figura P8.45

8.5 Cunhas

Cunhas são máquinas simples usadas para erguer grandes blocos de pedra e outras cargas pesadas. Essas cargas podem ser erguidas aplicando-se à cunha uma força, em geral, consideravelmente menor que o

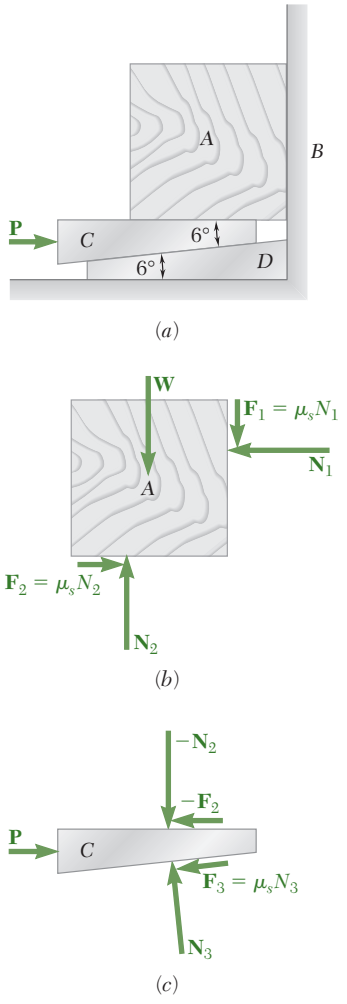


Figura 8.7

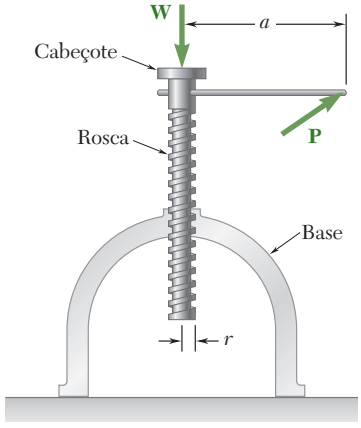


Figura 8.8

peso da carga. Além disso, devido ao atrito entre as superfícies de contato, uma cunha de formato adequado permanecerá no lugar após ter sido empurrada para debaixo da carga. Desse modo, podem-se aproveitar as cunhas para fazer pequenos ajustes na posição de peças pesadas de máquinas.

Considere o bloco *A* mostrado na Fig. 8.7*a*. O bloco repousa sobre uma parede vertical *B* e deve ser erguido ligeiramente empurrando-se uma cunha *C* entre o bloco *A* e uma segunda cunha *D*. Queremos encontrar o valor mínimo da força **P** que deve ser aplicada à cunha *C* para mover o bloco. Admite-se que o peso **W** do bloco seja conhecido diretamente em newtons ou através de sua massa em quilogramas.

Os diagramas de corpo livre do bloco *A* e da cunha *C* foram traçados na Fig. 8.7*b* e *c*. As forças exercidas sobre o bloco incluem seu peso e as forças normal e de atrito nas superfícies de contato com a parede *B* e a cunha *C*. As intensidades das forças de atrito $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são respectivamente iguais a $\mu_s N_1$ e $\mu_s N_2$, pois o movimento do bloco é iminente. É importante indicar as forças de atrito no sentido correto. Como o bloco irá mover-se para cima, o sentido da força $\mathbf{F}_1$ exercida pela parede sobre o bloco deve ser para baixo. Por outro lado, como a cunha *C* irá mover-se para a direita, o movimento de *A* em relação a *C* é para a esquerda e o sentido da força $\mathbf{F}_2$ exercida por *C* sobre *A* deve ser para a direita.

Considerando agora o corpo livre *C* na Fig. 8.7*c*, notamos que as forças exercidas sobre *C* incluem a força aplicada **P** e as forças normal e de atrito nas superfícies de contato com *A* e *D*. O peso da cunha é pequeno comparado com as outras forças envolvidas e pode ser desprezado. As forças exercidas por *A* sobre *C* são iguais e opostas às forças $\mathbf{N}_2$ e $\mathbf{F}_2$ exercidas por *C* sobre *A* e são representadas por $-\mathbf{N}_2$ e $-\mathbf{F}_2$, respectivamente. Logo, o sentido da força de atrito $-\mathbf{F}_2$ deve ser para a esquerda. Verificamos que o sentido da força $\mathbf{F}_3$ exercida por *D* também é para a esquerda.

O número total de incógnitas envolvidas nos dois diagramas de corpo livre pode ser reduzido a quatro se as forças de atrito forem expressas em termos das forças normais. Ao indicar que o bloco *A* e a cunha *C* estão em equilíbrio, fornecerá quatro equações que podem ser resolvidas para se obter a intensidade de **P**. Deve-se notar que, no exemplo aqui considerado, será mais conveniente substituir cada par de forças de atrito e normal por sua resultante. Assim, cada corpo livre fica sujeito a apenas três forças, e o problema pode ser resolvido pelo traçado dos triângulos de força correspondentes (ver o Problema Resolvido 8.4).

8.6 Parafusos de rosca quadrada

Parafusos de rosca quadrada são frequentemente usados em macacos, prensas e outros mecanismos. Sua análise é semelhante a de um bloco que desliza sobre um plano inclinado.

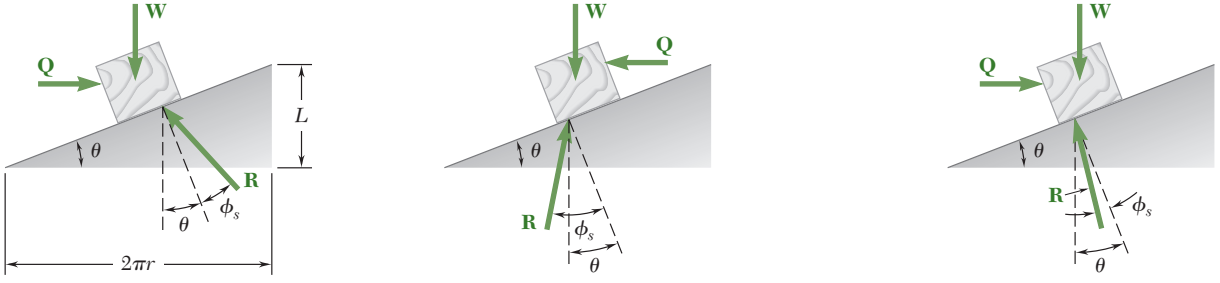
Considere o macaco mostrado na Fig. 8.8. O parafuso sustenta uma carga **W** e se apoia na base do macaco. O contato entre o parafuso e a base se dá ao longo de uma parte de seus filetes de rosca. Aplicando uma força **P** sobre a alavanca, o parafuso pode girar e erguer a carga **W**.

O filete de rosca na região da base foi desenvolvido e está mostrado como uma linha reta na Fig. 8.9*a*. A inclinação correta foi obtida traçan-

do-se horizontalmente o produto $2\pi r$, sendo r o raio médio da rosca e, verticalmente, o *avanço* L do parafuso, ou seja, a distância que o parafuso avança em uma volta completa. O ângulo θ entre essa linha e a horizontal é o *ângulo de avanço.* Como a força de atrito entre duas superfícies que estão em contato não depende da área de contato, pode-se considerar uma área de contato entre as duas roscas bem menor que a real e o parafuso pode ser representado pelo bloco mostrado na Fig. 8.9*a*. Deve-se observar, porém, que o atrito entre o cabeçote e o parafuso é desconsiderado nesta análise do macaco.

O diagrama de corpo livre do bloco deve incluir a carga **W**, a reação **R** do filete da base e uma força horizontal **Q** com o mesmo efeito da força **P** exercida sobre a alavanca. A força **Q** deve produzir o mesmo momento de **P** em relação ao eixo do parafuso e, portanto, sua intensidade deve ser $Q = Pa/r$. A força **Q** e, por conseguinte, a força **P** necessária para se erguer a carga **W** podem ser obtidas do diagrama de corpo livre mostrado na Fig. 8.9*a*. Considerando-se que o ângulo de atrito é igual a ϕ_s, pressupondo-se que carga será erguida através de uma sucessão de pequenos impulsos. Em mecanismos concebidos para rotação contínua de um parafuso, pode ser desejável distinguir entre a força necessária para o movimento iminente (usando ϕ_s) e a força necessária para se manter o movimento (usando-se ϕ_k).

Foto 8.2 Podem-se usar cunhas para rachar troncos de árvore, pois as forças normais exercidas pelas cunhas sobre a madeira são muito maiores que as forças necessárias para se inserirem as cunhas.

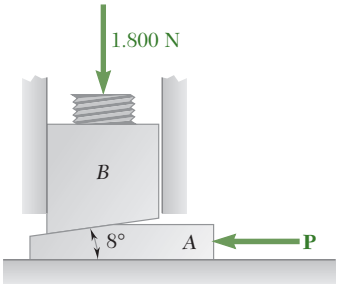


(*a*) Movimento iminente para cima (*b*) Movimento iminente para baixo com $\phi_s > \theta$ (*c*) Análise de um parafuso através de um bloco e plano inclinado $\phi_s < \theta$

Figura 8.9

Se o ângulo de atrito ϕ_s for maior que o ângulo de avanço θ, diz-se que o parafuso é *autotravante;* o parafuso permanecerá no lugar sob ação da carga. Para baixar a carga, deveremos então aplicar a força mostrada na Fig. 8.9*b*. Se ϕ_s for menor que θ, o parafuso cederá sob ação da carga; será, então, necessário aplicar a força mostrada na Fig. 8.9*c* para se manter o equilíbrio.

Não se deve confundir o avanço de um parafuso com seu *passo.* O avanço foi definido como a distância axial percorrida pelo parafuso durante uma volta; o passo é a distância medida entre duas roscas consecutivas. Embora sejam iguais no caso de parafusos de *rosca simples,* o avanço e o passo diferem no caso de parafusos de *rosca múltipla,* ou seja, parafusos com vários filetes de rosca independentes. Verifica-se facilmente que o avanço é duas vezes maior que o passo para parafusos de rosca dupla, três vezes maior para parafusos de rosca tripla, etc.



PROBLEMA RESOLVIDO 8.4

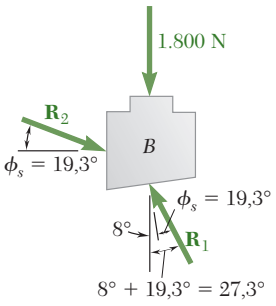
A posição do bloco de máquina B é ajustada pelo movimento de uma cunha A. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é 0,35, determine a força **P** para qual o movimento do bloco B (*a*) é iminente para cima, (*b*) é iminente para baixo.

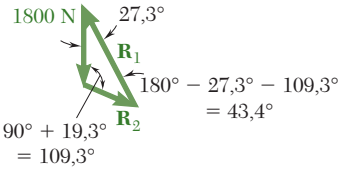
Dúvida: Analisar Fat no bloco B. O sentido não está invertido?

SOLUÇÃO

Para cada parte, traçam-se os diagramas de corpo livre do bloco B e da cunha A, juntamente os triângulos de forças correspondentes. A lei dos senos é usada para encontrar as forças desejadas. Como $\mu_s = 0{,}35$, verificamos que ângulo de atrito é:

$$\phi_s = \text{tg}^{-1}\, 0{,}35 = 19{,}3°$$



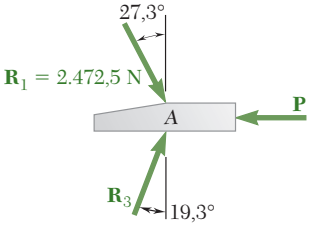


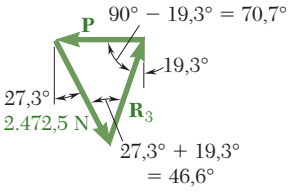
a. Força P para o movimento iminente do bloco para cima

Corpo livre: Bloco B

$$\frac{R_1}{\text{sen } 109{,}3°} = \frac{1.800 \text{ N}}{\text{sen } 43{,}4°}$$

$$R_1 = 2.472{,}5 \text{ N}$$



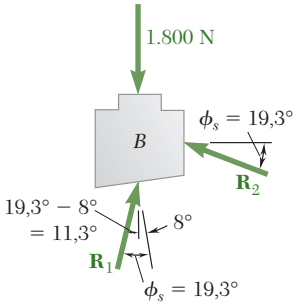


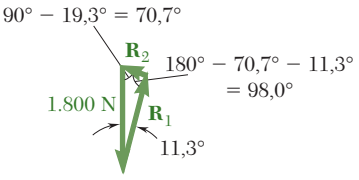
Corpo livre: Cunha A

$$\frac{P}{\text{sen } 46{,}6°} = \frac{2.472{,}5 \text{ N}}{\text{sen } 70{,}7°}$$

$$P = 1.903{,}4 \text{ N}$$

$\mathbf{P} = 1.903{,}4 \text{ N} \leftarrow$ ◀



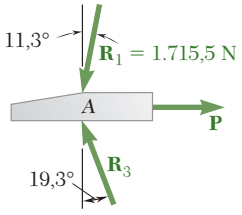


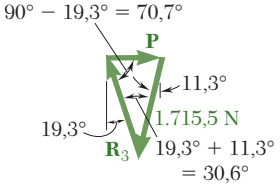
b. Força P para movimento iminente do bloco para baixo

Corpo livre: Bloco B

$$\frac{R_1}{\text{sen } 70{,}7°} = \frac{1.800 \text{ N}}{\text{sen } 98{,}0°}$$

$$R_1 = 1.715{,}5 \text{ N}$$



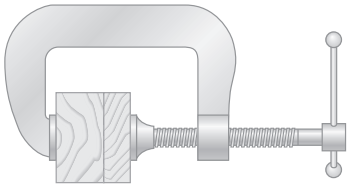


Corpo livre: Cunha A

$$\frac{P}{\text{sen } 30{,}6°} = \frac{1.715{,}5 \text{ N}}{\text{sen } 70{,}7°}$$

$$P = 925{,}3 \text{ N}$$

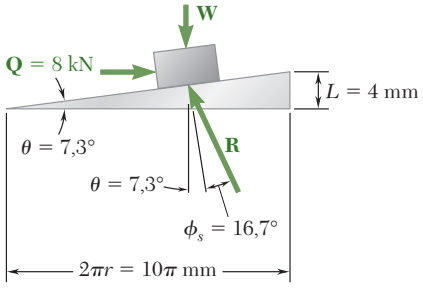
$\mathbf{P} = 925{,}3 \text{ N} \rightarrow$ ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 8.5

Um grampo é usado para manter juntas duas peças de madeira como mostrada na figura. O grampo tem parafuso de rosca quadrada dupla de diâmetro médio igual a 10 mm e passo de 2 mm. O coeficiente de atrito entre as roscas é $\mu_s = 0{,}30$. Se um torque máximo de 40 N · m é aplicado no aperto do grampo, determine (*a*) a força exercida sobre as peças de madeira, (*b*) o torque necessário para se afrouxar o grampo.

SOLUÇÃO

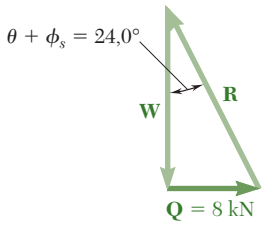


a. Força exercida pelo grampo. O raio médio de parafuso é $r = 5$ mm. Como o parafuso é de rosca dupla, o avanço L é igual a duas vezes o passo: $L = 2(2\text{ mm}) = 4$ mm. O ângulo de avanço θ e o ângulo de atrito ϕ são obtidos da seguinte maneira

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{L}{2\pi r} = \frac{4\text{ mm}}{10\pi\text{ mm}} = 0{,}1273 \qquad \theta = 7{,}3°$$
$$\operatorname{tg}\phi_s = \mu_s = 0{,}30 \qquad \phi_s = 16{,}7°$$

A força **Q** que deve ser aplicada ao bloco que representa o parafuso é obtida escrevendo-se que seu momento Qr em relação ao eixo do parafuso é igual ao torque aplicado.

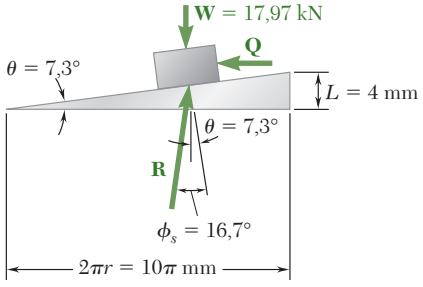
$$Q(5\text{ mm}) = 40\text{ N}\cdot\text{m}$$
$$Q = \frac{40\text{ N}\cdot\text{m}}{5\text{ mm}} = \frac{40\text{ N}\cdot\text{m}}{5\times10^{-3}\text{ m}} = 8.000\text{ N} = 8\text{ kN}$$



O diagrama de corpo livre e o triângulo de forças correspondente podem agora ser traçados para o bloco; a intensidade da força **W** exercida sobre as peças da madeira é obtida pela resolução do triângulo.

$$W = \frac{Q}{\operatorname{tg}(\theta + \phi_s)} = \frac{8\text{ kN}}{\operatorname{tg}\,24{,}0°}$$

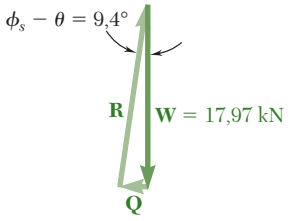
$W = 17{,}97$ kN ◀



b. Torque necessário para se afrouxar o grampo. A força **Q** necessária para se afrouxar o grampo e o torque correspondente são obtidos do diagrama de corpo livre e do triângulo de forças mostrados nas figuras.

$$Q = W\operatorname{tg}(\phi_s - \theta) = (17{,}97\text{ kN})\operatorname{tg}9{,}4°$$
$$= 2{,}975\text{ kN}$$
$$\text{Torque} = Qr = (2{,}975\text{ kN})(5\text{ mm})$$
$$= (2{,}975\times10^{3}\text{ N})(5\times10^{-3}\text{ m}) = 14{,}87\text{ N}\cdot\text{m}$$

Torque $= 14{,}87$ N · m ◀



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, aprendemos a aplicar as leis de atrito à resolução de problemas que envolvem *cunhas* e *parafusos de rosca quadrada.*

1. Cunhas. Ao resolver um problema que envolva cunhas, tenhamos em mente os seguintes passos:

a. Traçar primeiro um diagrama de corpo livre da cunha e de todos os outros corpos envolvidos. Observemos cuidadosamente o sentido do movimento relativo entre todas as superfícies de contato e mostremos cada força de atrito exercida com *sentido oposto* ao do movimento relativo.

b. Mostrar a força máxima de atrito estático F_m em cada superfície no caso de a cunha ser inserida ou removida, *pois o movimento será iminente em cada um desses casos.*

c. A reação R e o ângulo de atrito, em vez das forças normal e de atrito, podem ser usados em muitas aplicações. Podemos, então, traçar um ou mais triângulos de força e determinar as grandezas incógnitas, seja graficamente, seja por trigonometria [Problema Resolvido 8.4].

2. Parafusos de rosca quadrada. A análise de um parafuso de rosca quadrada é equivalente à análise de um bloco que desliza sobre um plano inclinado. Para traçar a inclinação adequada, devemos desenvolver o filete de rosca do parafuso e representá-lo por uma linha reta [Problema Resolvido 8.5]. Ao resolver um problema que envolva parafusos de rosca quadrada, tenha em mente o seguinte:

a. Não confundir o passo de um parafuso com o avanço de um parafuso. O *passo* de um parafuso é a distância entre duas roscas consecutivas e o *avanço* de um parafuso é a distância que o parafuso avança em uma volta completa. O avanço e o passo são iguais somente para parafusos de rosca simples. Em um parafuso de rosca dupla, o avanço é o dobro do passo.

b. O torque necessário para se apertar um parafuso é diferente do torque necessário para se afrouxá-lo. Além disso, os parafusos utilizados em macacos e grampos geralmente são *autotravantes;* ou seja, o parafuso permanecerá em equilíbrio enquanto não lhe for aplicado um torque, e um torque deve ser aplicado ao parafuso para afrouxá-lo [Problema Resolvido 8.5].

PROBLEMAS

8.46 A peça *ABC* é sustentada por uma articulação sem atrito em *B* e por uma cunha de 10º em *C*. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,20 em ambas faces da cunha, determine (*a*) a força **P** necessária para mover a cunha para a esquerda, (*b*) os componentes da reação correspondente em *B*.

8.47 Resolva o Problema 8.46 considerando que a cunha deve ser movida para direita.

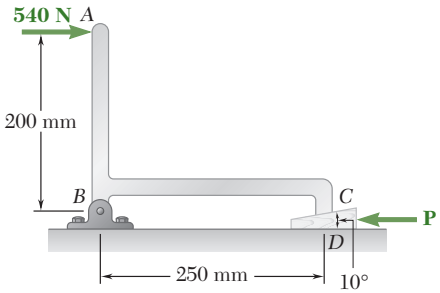


Figura P8.46

8.48 e 8.49 Duas cunhas de 8º e massa desprezível são usadas para mover e posicionar um bloco de 800 kg. Sabendo que o coeficiente de atrito estático em todas as superfícies de contato é 0,30, determine a menor força **P** que poderá ser aplicada, como mostrado na figura, em uma das cunhas.

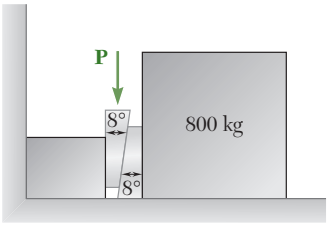


Figura P8.48

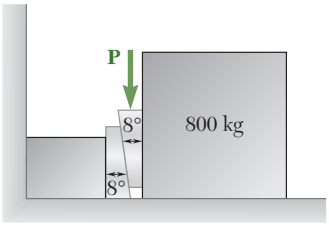


Figura P8.49

8.50 e 8.51 A elevação da extremidade de uma viga de aço apoiada em um piso de concreto é ajustada através das cunhas de aço *E* e *F*. A placa de base *CD* foi soldada no flange inferior da viga e sabe-se que a reação na extremidade da viga é 100 kN. O coeficiente de atrito estático é 0,30 entre as duas superfícies de aço e 0,60 entre o aço e o concreto. Se o movimento horizontal da viga é contido pela força **Q**, determine (*a*) a força **P** necessária para se erguer a viga, (*b*) a força **Q** correspondente.

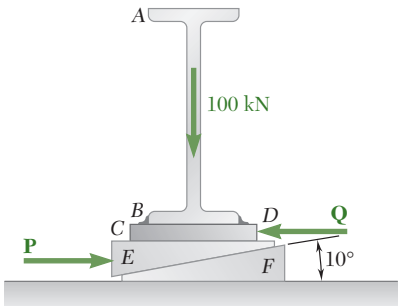


Figura *P8.50*

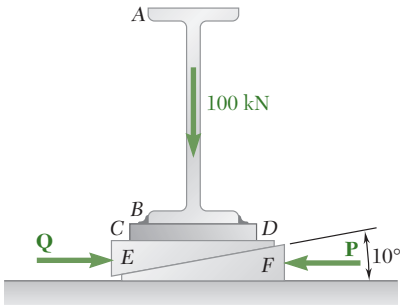


Figura *P8.51*

8.52 Uma cunha *A* de peso desprezível deve ser cravada entre duas placas *B* e *C* de 450 N. O coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é 0,35. Determine a intensidade da força **P**

necessária para iniciar o movimento das cunhas (*a*) se as placas são igualmente livres para mover, (*b*) se a placa *C* é está firmemente parafusada na superfície.

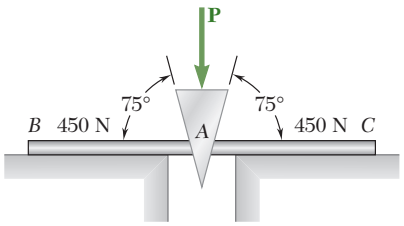


Figura P8.52

8.53 O bloco *A* sustenta uma coluna tubular e repousa sobre a cunha *B*, tal como mostra a figura. O coeficiente de atrito estático em todas as superfícies de contato é 0,25 e que $\theta = 45°$, determine a menor força **P** necessária para erguer o bloco *A*.

8.54 O bloco *A* sustenta uma coluna tubular e repousa sobre a cunha *B*, tal como mostra a figura. O coeficiente de atrito estático em todas as superfícies de contato é 0,25 e que $\theta = 45°$, determine a menor força **P** para que o equilíbrio seja mantido

8.55 O bloco *A* sustenta uma coluna tubular e repousa sobre a cunha *B*, tal como mostra a figura. O coeficiente de atrito estático em todas as superfícies de contato é 0,25. Se $\mathbf{P} = 0$, determine (*a*) o ângulo θ para o que o deslizamento seja iminente, (*b*) a força correspondente exercida no bloco pela parede vertical.

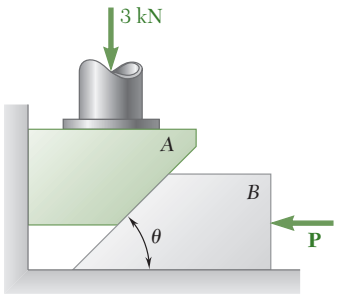


Figura P8.53, P8.54 e P8.55

8.56 Uma cunha de 12º é usada para abrir um anel dividido. O coeficiente de atrito estático entre a cunha e o anel é 0,30. Sabendo que a intensidade da força **P** necessária para inserção da cunha foi de 110 N, determine a intensidade das forças exercidas no anel pela cunha após a inserção.

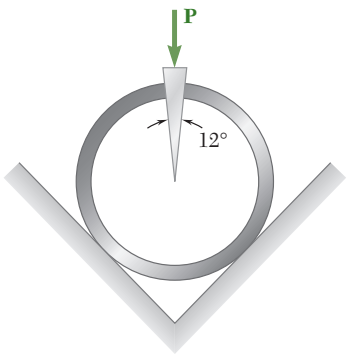


Figura P8.56

8.57 Uma cunha de 10° deve ser forçada por baixo da extremidade *B* de uma barra *AB* de 5 kg. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,40 entre a cunha e a barra e 0,20 entre a cunha e o piso, determine a menor força **P** necessária para erguer a extremidade *B* da barra.

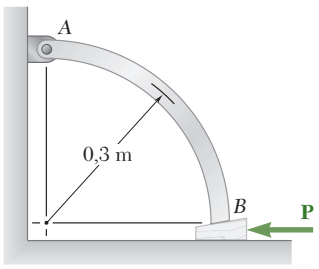


Figura P8.57

8.58 Uma cunha de 10º é usada para dividir a seção de uma tora. O coeficiente do atrito estático entre a cunha e a tora é 0,35. Sabendo que a intensidade da força **P** necessária para inserção da cunha foi de 2700 N, determine a intensidade das forças exercidas na madeira pela cunha após a inserção.

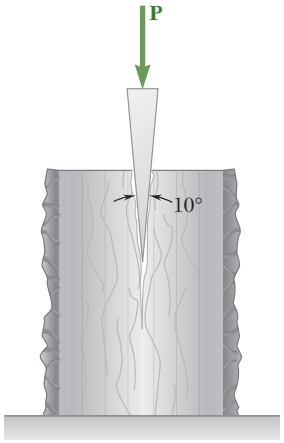


Figura P8.58

8.59 Uma cunha cônica é colocada entre duas placas horizontais que, em seguida, são movidas vagarosamente uma em direção à outra. Indique o que acontecerá com a cunha (*a*) se $\mu_s = 0{,}20$, (*b*) se $\mu_s = 0{,}30$.

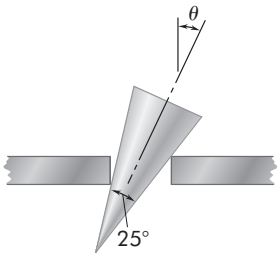


Figura P8.59

8.60 Uma cunha de 15° é forçada por baixo de um tubo de 50 kg, tal como mostra a figura. O coeficiente de atrito estático de todas as superfícies é 0,20. (*a*) Mostre que o deslizamento ocorrerá entre o tubo e a parede vertical. (*b*) Determine a força **P** necessária para mover a cunha.

8.61 Uma cunha de 15° é forçada por baixo de um tubo de 50 kg, tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático nas superfícies da cunha é 0,20, determine o maior coeficiente de atrito estático entre o tubo e a parede vertical para que o escorregamento seja iminente em *A*.

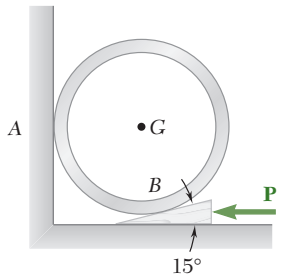


Figura P8.60 e P8.61

8.62 Uma cunha de 8º é forçada sob a base *B* de uma máquina. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies é 0,15, (*a*) determine a força **P** necessária para mover a cunha, (*b*) indique se a base da máquina deslizará no chão.

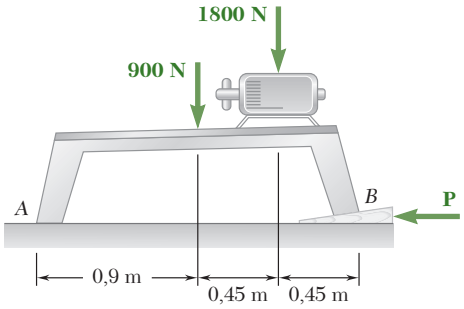


Figura P8.62

8.63 Resolva o Problema 8.62 considerando que a cunha é forçada sob a base da máquina em *A* em vez de *B*.

***8.64** O bloco de 200 N repousa sobre uma cunha de peso desprezível, como mostra a figura. O coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo entre as superfícies da cunha, e o atrito entre o bloco e a parede vertical pode ser desprezado. Para $P = 100$ N, determine o valor de μ_s para que o movimento seja iminente. (*Dica*: Resolva a equação por tentativa e erro).

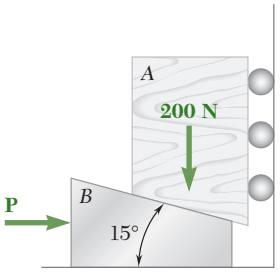


Figura P8.64

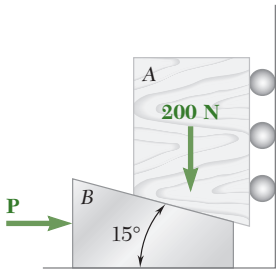


Figura P8.64 (repetida)

***8.65** Resolva o Problema 8.64 considerando que os rolos são removidos e o μ_s é o coeficiente de atrito entre todas as superfícies de contato.

8.66 Deduza as seguintes fórmulas, relacionando a carga **W** e a força **P** exercidas sobre a alavanca do macaco discutido na Seção 8.6: (*a*) $P = (Wr/a)\,\text{tg}\,(\theta + \phi_s)$ para erguer a carga; (*b*) $P = (Wr/a)\,\text{tg}\,(\phi_s - \theta)$ para descer a carga se o parafuso for autotravante; (*c*) $P = (Wr/a)\,\text{tg}\,(\theta - \phi_s)$ para manter a carga se o parafuso não for autotravante.

8.67 A engrenagem sem fim de rosca quadrada mostrada na figura tem um raio médio de 38 mm e um avanço de 19 mm. A engrenagem maior está sujeita a um torque horário constante de 820 N · m. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre as duas engrenagens é 0,12, determine o torque que deve ser aplicado ao eixo *AB* a fim de rodar a engrenagem maior no sentido anti-horário. Despreze o atrito nos mancais em *A*, *B* e *C*.

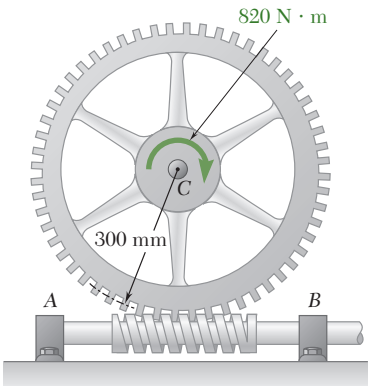


Figura *P8.67*

8.68 No Problema 8.67, determine o torque que deve ser aplicado no eixo *AB* a fim de se rodar no sentido horário.

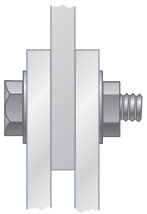


Figura P8.69

8.69 Parafusos de alta resistência são usados na construção de muitas estruturas de aço. Para um parafuso de 24 mm de diâmetro nominal, a tração mínima necessária é 210 kN. Considerando que o coeficiente de atrito seja 0,40, determine o torque necessário que deve ser aplicado ao parafuso e à porca. O diâmetro médio do filete de rosca é 22,6 mm e o avanço é 3 mm. Despreze o atrito entre a porca e a arruela e considere o parafuso como sendo de rosca quadrada.

8.70 As extremidades de duas barras fixas *A* e *B* são feitas cada qual na forma de um parafuso de rosca quadrada simples de raio médio 2 mm e passo 2 mm. A barra *A* tem uma rosca à direita e a barra *B* uma rosca à esquerda. O coeficiente de atrito estático entre as barras e a luva rosqueada é 0,12. Determine a intensidade do torque que deve ser aplicado à luva a fim de se juntarem as barras.

Figura P8.70

8.71 Considerando no Problema 8.70 que uma rosca à direita seja usada em *ambas* as barras *A* e *B*, determine a intensidade do torque que deve ser aplicado à luva a fim de girá-la.

8.72 Na morsa de bancada mostrada, o mordente móvel *D* está rigidamente ligado a lingueta *AB* que se encaixa com folga no corpo fixo da morsa. O parafuso de rosca simples é rosqueado na base fixa e tem um diâmetro médio de 19 mm e um passo de 6 mm. O coeficiente de atrito estático é 0,25 entre as roscas e também entre a haste e o corpo. Desprezando o atrito entre o parafuso e parte móvel, determine o torque que deve ser aplicado à alavanca para produzir uma força de aperto de 4,5 kN.

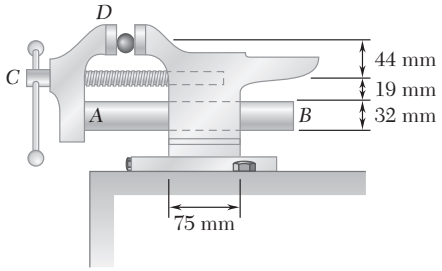


Figura P8.72

8.73 No Problema 8.72, a força de aperto de 4,5 kN foi obtida apertando-se a morsa. Determine o torque que deve ser aplicado ao parafuso para afrouxar a morsa.

8.74 No sacador de engrenagens mostrado na figura, o parafuso de rosca quadrada *AB* tem um raio médio de 15 mm e um avanço de 4 mm. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,10, determine o torque que se deve aplicar ao parafuso para se produzir uma força de 3 kN sobre a engrenagem. Despreze o atrito na extremidade *A* do parafuso.

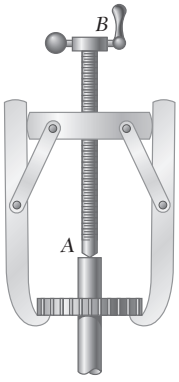


Figura *P8.74*

*8.7 Mancais de deslizamento e atrito em eixo

Mancais de deslizamento são usados para fornecer apoio lateral a árvores e eixos rotativos. Os mancais de escora, que serão estudados na próxima seção, são usados para fornecer apoio axial a árvores e eixos. Se o mancal de deslizamento for completamente lubrificado, a resistência de atrito dependerá da velocidade de rotação, da folga entre o eixo e o mancal e da viscosidade do lubrificante. Conforme indicado na Seção 8.1, tais problemas são estudados em mecânica dos fluidos. Os métodos deste capítulo, porém, podem ser aplicados ao estudo de atrito em eixo quando o mancal não é lubrificado ou é pouco lubrificado. Assim, é possível supor que o eixo e o mancal estejam em contato direto ao longo de uma linha reta única.

Considere duas rodas, cada uma de peso **W**, montadas rigidamente sobre um eixo apoiado simetricamente em dois mancais de deslizamento (Fig. 8.10*a*). Se as rodas giram, concluímos que é necessário aplicar um binário **M** a cada uma delas para mantê-las girando. O diagrama de corpo livre mostrado na Fig. 8.10*c* representa uma das rodas e o semi-eixo

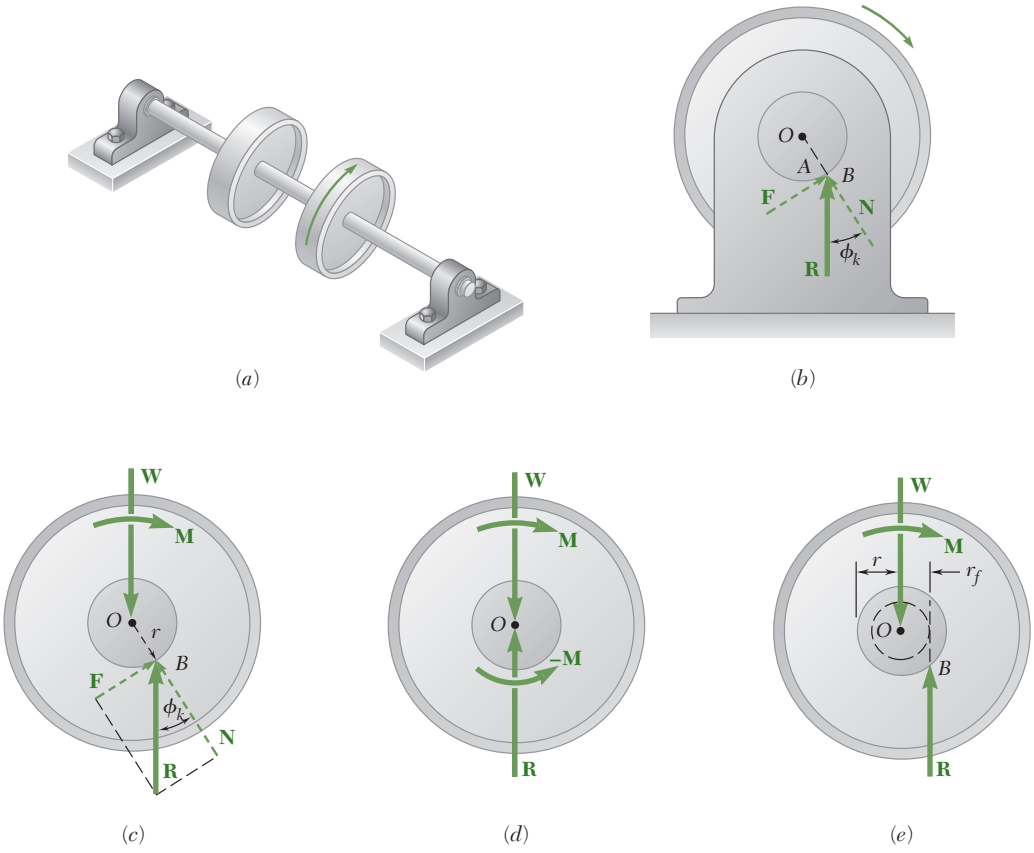


Figura 8.10

correspondente em projeção sobre um plano perpendicular ao eixo. As forças atuantes sobre o corpo livre incluem o peso **W** da roda, o binário **M** necessário para se manter seu movimento e a força **R** representativa da reação do mancal. Essa força é vertical, igual e oposta a **W**, mas não passa pelo centro *O* do eixo; **R** localiza-se à direita de *O* a uma distância tal que seu momento em relação a *O* contrabalança o momento **M** do binário. Logo, o contato entre eixo e mancais não se dá no ponto mais baixo *A* quando o eixo gira. Esse contato ocorre no ponto *B* (Fig. 8.10*b*), ou melhor, ao longo de uma linha reta que intercepta o plano da figura em *B*. Fisicamente, isso se explica pelo fato de que, quando as rodas são postas em movimento, o eixo "sobe" nos mancais até que ocorra escorregamento. Após deslizar ligeiramente de volta, o eixo se assenta mais ou menos na posição mostrada na figura. Essa posição é tal que o ângulo entre a reação **R** e a normal à superfície do mancal é igual ao ângulo de atrito cinético ϕ_k. Logo, a distância de *O* até a linha de ação de **R** é r sen ϕ_k, sendo r o raio do eixo. Escrevendo $\Sigma M_O = 0$ para as forças atuantes sobre o corpo livre considerado, obtemos a intensidade do binário **M** necessário para se vencer a resistência de atrito de um dos mancais:

$$M = Rr \operatorname{sen} \phi_k \tag{8.5}$$

Observando que, para pequenos valores do ângulo de atrito, sen ϕ_k pode ser substituído por tg ϕ_k, ou seja, por μ_k, escrevemos a fórmula aproximada:

$$M \approx Rr\mu_k \tag{8.6}$$

Na solução de certos problemas, pode ser mais conveniente deixar a linha de ação de **R** passar por *O*, como ela faz quando o eixo não gira. Um binário $-\mathbf{M}$ com a mesma intensidade do binário **M**, mas com sentido oposto, deve então ser adicionado à reação **R** (Fig. 8.10*d*). Esse binário representa a resistência de atrito do mancal.

No caso de se preferir uma solução gráfica, pode-se traçar a linha de ação de **R** prontamente (Fig. 8.10*e*) caso se note que ela deve ser tangente a um círculo centrado em *O* e de raio

$$r_f = r \operatorname{sen} \phi_k \approx r\mu_k$$

Esse círculo é chamado de *círculo de atrito* do eixo e do mancal e independe das condições de carregamento do eixo.

*8.8 Mancais de escora e atrito em disco

Dois tipos de mancais de escora são usados para fornecer apoio axial a árvores e eixos rotativos: (1) *mancais de extremidade* e (2) *mancais de colar* (Fig. 8.11). No caso de mancais de colar, as forças de atrito se desenvolvem entre as duas superfícies de formato anelar que estão em contato. No caso de mancais de extremidade, o atrito se dá em superfícies inteiramente circulares ou em superfícies de formato anelar quando a extremidade do eixo é oca. O atrito entre superfícies circulares, denominado *atrito em disco,* ocorre também em outros mecanismos, tais como *embreagens a disco.*

(*a*) Mancal de extremidade (*b*) Mancal de colar

Figura 8.11 Mancais de escora

Para obtermos uma fórmula que seja válida no caso mais geral de atrito em disco, vamos considerar uma árvore oca rotativa. Um binário **M** mantém a árvore girando a velocidade constante enquanto uma força **P** a mantém em contato com um mancal fixo (Fig. 8.12). O contato

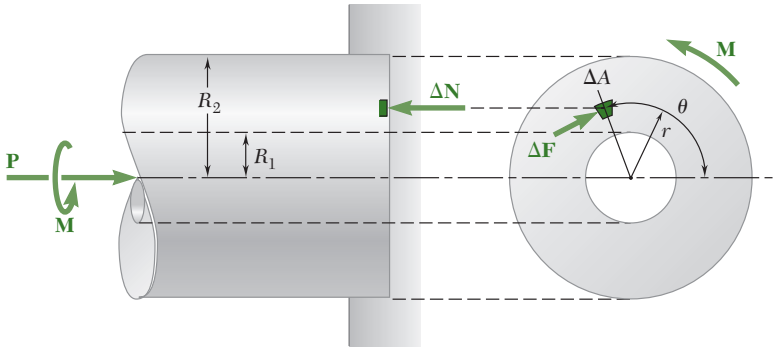


Figura 8.12

entre a árvore e o mancal se dá em uma superfície de formato anelar de raio interno R_1 e raio externo R_2 Considerando que a pressão entre as duas superfícies que estão em contato seja uniforme, concluímos que a intensidade da força normal $\Delta\mathbf{N}$ exercida sobre um elemento de área ΔA é $\Delta N = P\,\Delta A/A$, sendo $A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$, e que a intensidade da força de atrito $\Delta\mathbf{F}$ que atua sobre ΔA é $\Delta F = \mu_k\,\Delta N$. Representando por r a distância entre o eixo de rotação e o elemento de área ΔA, expressamos a intensidade ΔM do momento de $\Delta\mathbf{F}$ em relação ao eixo de rotação da seguinte maneira:

$$\Delta M = r\,\Delta F = \frac{r\mu_k P\,\Delta A}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

O equilíbrio da árvore exige que o momento $\mathbf{M}$ do binário aplicado seja igual em intensidade à soma dos momentos das forças de atrito $\Delta\mathbf{F}$. Substituindo ΔA pelo elemento infinitesimal $dA = r\,d\theta\,dr$ em coordenadas polares e integrando sobre a área de contato, obtemos então a seguinte expressão para a intensidade do binário $\mathbf{M}$ necessário para se vencer a resistência de atrito do mancais:

$$M = \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\,d\theta$$

$$M = \tfrac{2}{3}\mu_k P \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \tag{8.8}$$

Quando o contato se dá em um círculo completo de raio R, a fórmula (8.8) reduz-se a:

$$M = \tfrac{2}{3}\mu_k P R \tag{8.9}$$

O valor de M é, então, o mesmo que seria obtido se ocorresse o contato entre a árvore e o mancal em um único ponto localizado a uma distância $2R/3$ do eixo da árvore.

O maior torque que pode ser transmitido por uma embreagem a disco sem causar escorregamento é dado por uma fórmula similar à (8.9), com μ_k sendo substituído pelo coeficiente de atrito estático μ_s.

*8.9 Atrito em roda e resistência ao rolamento

A roda é uma das mais importantes invenções da nossa civilização. Seu uso torna possível cargas pesadas movimentarem-se com esforço relativamente pequeno. Uma vez que o ponto da roda em contato com o solo em qualquer instante dado não apresenta movimento em relação ao solo, a roda elimina as grandes forças de atrito que apareceriam caso a carga estivesse em contato direto com o solo. Todavia, existe alguma resistência ao movimento da roda. Essa resistência tem duas causas distintas. Ela se

deve (1) a um efeito combinado de atrito no eixo e no aro e (2) ao fato de que a roda e o solo deformam-se, de modo que o contato entre roda e solo ocorre em uma certa superfície em vez de um único ponto.

Para entender melhor a primeira causa da resistência ao movimento de uma roda, consideremos um vagão ferroviário apoiado em oito rodas montadas sobre eixos e mancais. Admite-se que o vagão move-se para a direita a velocidade constante sobre trilhos retilíneos horizontais. O diagrama de corpo livre de uma das rodas está mostrado na Fig. 8.13*a*. As forças exercidas sobre o corpo livre incluem a carga **W** sustentada pela roda e a reação normal **N** do trilho. Como **W** é desenhada através do centro *O* do eixo, a resistência de atrito do mancal deve ser representada por um binário **M** anti-horário (ver a Seção 8.7). Para manter o corpo livre em equilíbrio, devemos adicionar duas forças **P** e **F** iguais e opostas, formando um binário horário de momento $-\mathbf{M}$. A força **F** é a força de atrito exercida pelo trilho sobre a roda e **P** representa a força que deve ser aplicada à roda para mantê-la rodando a uma velocidade constante. Observe que as forças **P** e **F** não existiriam se não houvesse atrito entre a roda e o trilho. O binário **M** que representa o atrito no eixo seria, então, nulo; assim, a roda deslizaria sobre o trilho sem girar em seu mancal.

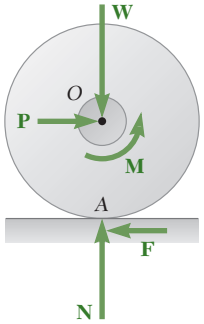
O binário **M** e as forças **P** e **F** também se reduzem a zero quando não há atrito de eixo. Por exemplo, uma roda que não é apoiada em mancais e roda livremente a uma velocidade constante em um solo horizontal (Fig. 8.13*b*) estará sujeita a apenas duas forças: seu peso próprio **W** e a reação normal **N** do solo. Independentemente do valor do coeficiente de atrito entre a roda e o solo, não haverá força de atrito sobre a roda. Uma roda que gira livremente sobre um solo horizontal deve, então, manter-se girando sem fim.

A experiência, porém, indica que a roda irá desacelerar e finalmente atingir o repouso. Isso se deve ao segundo tipo de resistência mencionado no início desta seção, conhecido como a *resistência ao rolamento.* Sob ação da carga **W**, tanto a roda como o solo deformam-se um pouco, fazendo com que o contato entre roda e solo se dê em uma certa superfície. Evidências experimentais mostram que a resultante das forças exercidas pelo solo sobre a roda nessa superfície é uma força **R** aplicada no ponto *B*, que não se localiza diretamente sob o centro *O* da roda, mas sim um pouco à sua frente (Fig. 8.13*c*). Para contrabalançar o momento de **W** em relação a *B* e manter a roda rodando a uma velocidade constante, é necessário aplicar uma força horizontal **P** no centro da roda. Ao escrever $\Sigma M_B = 0$, obtemos

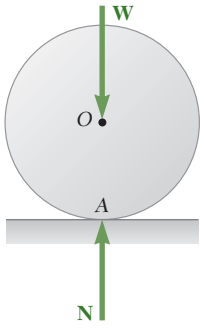
$$Pr = Wb \tag{8.10}$$

sendo r = raio da roda
b = distância horizontal entre O e B

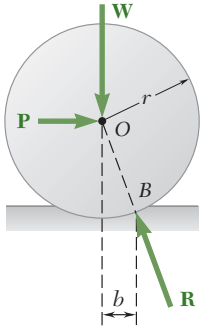
A distância b é comumente denominada *coeficiente de resistência ao rolamento.* Deve-se notar que b não é um coeficiente adimensional, pois representa um comprimento; geralmente; b é expresso em milímetros. Valores do coeficiente de resistência ao rolamento variam aproximadamente de 0,25 mm para uma roda de aço sobre um trilho de aço a 125 mm para a mesma roda sobre solo macio.



(*a*) Efeito do atrito no eixo



(*b*) Roda livre



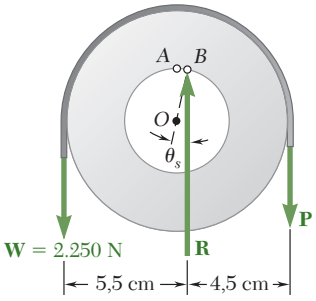
(*c*) Atrito de rolamento

Figura 8.13

PROBLEMA RESOLVIDO 8.6

Uma roldana de 10 cm de diâmetro pode girar em torno de um eixo fixo de 5 cm. O coeficiente de atrito estático entre a roldana e o eixo é 0,20. Determine (*a*) a menor força vertical **P** necessária pera se começar a erguer uma carga de 2.250 N, (*b*) a menor força vertical **P** necessária para manter a carga, (*c*) a menor força horizontal **P** necessária para começar a erguer a mesma carga.

SOLUÇÃO



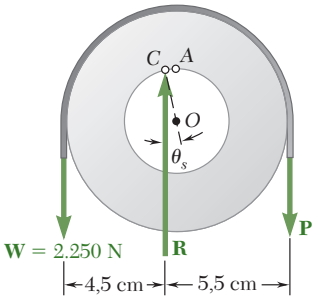
a. Força vertical P necessária para começar a erguer a carga. Quando as forças em ambas as partes da corda são iguais, o contato entre a roldana e o eixo se dá em *A*. Quando **P** aumenta, a roldana roda ligeiramente em torno do eixo e o contato se dá em *B*. O diagrama de corpo livre da roldana, quando o movimento é iminente, está traçado na figura. A distância perpendicular do centro *O* da roldana e a linha de ação de **R** é:

$$r_f = r \operatorname{sen} \phi_s \approx r\mu_s \qquad r_f \approx (2{,}5\text{ cm})0{,}20 = 0{,}5\text{ cm}.$$

Somando os momentos em relação a *B*, temos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (5{,}5\text{ cm})(2.250\text{ N}) - (4{,}5\text{ cm})P = 0$$
$$P = 2.750\text{ N}$$

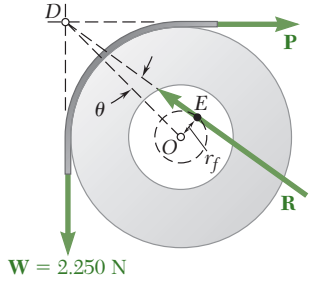
P = 2.750 N↓ ◀



b. Força vertical P para se manter a carga. À medida que a força **P** diminui, a roldana roda em torno do eixo e o contato se dá em *C*. Tomando a roldana como um corpo livre e somando os momentos em relação a *C*, temos:

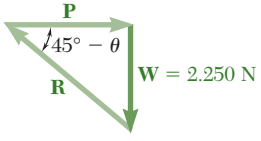
$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad (4{,}5\text{ cm})(2.250\text{ N}) - (5{,}5\text{ cm})P = 0$$
$$P = 1.841\text{ N}$$

P = 1.841 N ◀



c. Força horizontal P para começar a erguer a carga. Como não são paralelas, as três forças **W**, **P** e **R** devem ser concorrentes. Logo, a direção de **R** é determinada a partir do fato de que sua linha de ação deve passar pelo ponto de interseção *D* de **W** e **P** e deve ser tangente ao círculo de atrito. Lembrando que o raio do círculo de atrito é *rf* = 0,5 cm, temos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{OE}{OD} = \frac{0{,}5\text{ cm}}{(5\text{ cm})\sqrt{2}} = 0{,}0707 \qquad \theta = 4{,}1°$$



Do triângulo de forças, obtemos:

$$P = W \operatorname{cotg}(45° - \theta) = (2.250\text{ N}) \operatorname{cotg} 40{,}9°$$
$$= 2.597\text{ N}$$

P = 2.597 N ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, aprendemos várias outras aplicações de engenharia das leis de atrito.

1. Mancais de deslizamento e atrito em eixo. Em mancais de deslizamento, a *reação não passa pelo centro da árvore ou eixo* que está sendo apoiado. A distância entre o centro da árvore ou eixo e a linha de ação da reação (Fig. 8.10) é definida pela equação

$$r_f = r \operatorname{sen} \phi_k \approx r\mu_k$$

se o movimento está ocorrendo de fato, e pela equação

$$r_f = r \operatorname{sen} \phi_k \approx r\mu_s$$

se o movimento é iminente.

Assim que tiver determinado a linha de ação da reação, poderemos traçar um *diagrama de corpo livre* e usar as equações correspondentes de equilíbrio para completar sua resolução [Problema Resolvido 8.6]. Em alguns problemas, é importante observarmos que a linha de ação da reação deve ser tangente a um círculo de raio $r_f = r\mu_k$ ou $r_f \approx r\mu_s$, conhecido como *círculo de atrito* [Problema Resolvido 8.6, item *c*].

2. Mancais de escora e atrito em disco. Em um *mancal de escora*, a intensidade do binário necessário para se vencer a resistência de atrito é igual à soma dos momentos das *forças de atrito cinético* exercidas sobre os elementos na extremidade da árvore [Eqs. (8.8) e (8.9)].

Um exemplo de atrito em disco ocorre na *embreagem a disco*. Esse tipo de embreagem é analisado do mesmo modo que um mancal de escora, exceto pelo fato de que, na determinação do maior torque que pode ser transmitido, devemos calcular a soma dos momentos das *forças de atrito estático máximas* exercidas sobre o disco.

3. Atrito em roda e resistência ao rolamento. Vimos que a resistência ao rolamento de uma roda é causada por deformações tanto da roda como do solo. A linha de ação da reação **R** do solo sobre a roda intercepta o solo a uma distância horizontal *b* do centro da roda. A distância *b* é conhecida como *coeficiente de resistência ao rolamento*, sendo expressa em milímetros.

4. Em problemas que envolvam tanto resistência ao rolamento como atrito em eixo, o diagrama de corpo livre deve mostrar que a linha de ação da reação **R** do solo sobre a roda é tangente ao círculo de atrito do eixo e intercepta o solo a uma distância horizontal do centro da roda igual ao coeficiente de resistência ao rolamento.

PROBLEMAS

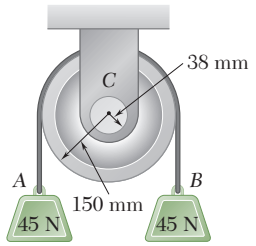


Figura P8.75

8.75 Uma roldana de 150 mm de raio e 22,5 N de peso é fixada a um eixo de 38 mm de raio, que se ajusta com folga em um mancal fixo. Observe que a roldana estará prestes a girar quando um peso de 2,25 N for adicionado ao bloco *A*. Determine o coeficiente de atrito estático entre o eixo e o mancal.

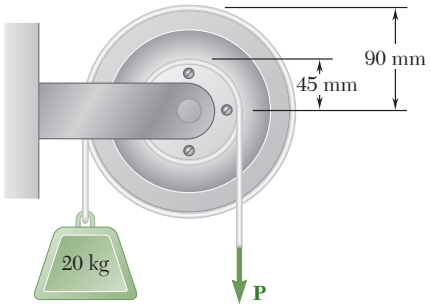


Figura P8.76 e P8.78

8.76 e 8.77 A roldana dupla mostrada na figura é fixada a um eixo de 10 mm de raio que se ajusta com folga a um mancal fixo. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo e o mancal pouco lubrificado é 0,40, determine a intensidade da força **P** necessária para se começar a erguer a carga.

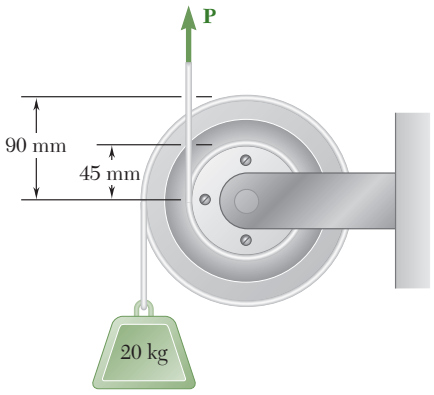


Figura P8.77 e P8.79

8.78 e 8.79 A roldana dupla mostrada na figura é fixada a um eixo de 10 mm de raio que se ajusta com folga a um mancal fixo. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo e o mancal pouco lubrificado é 0,40, determine a intensidade da força **P** necessária para se manter o equilíbrio.

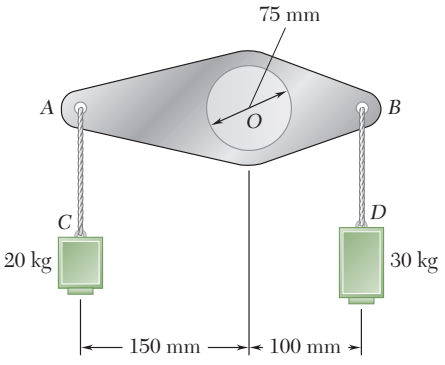


Figura P8.80

8.80 Uma alavanca de peso desprezível está encaixada com folga em um eixo de 75 mm de diâmetro. Observa-se que a alavanca apenas inicia um movimento de rotação se a massa de 3 kg é adicionada em *C*. Determine o coeficiente de atrito estático entre o eixo e a alavanca.

8.81 A talha mostrada na figura é usada para erguer uma carga de 675 N. Cada uma das roldanas de 75 mm de diâmetro gira sobre um eixo de 12 mm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,20, determine a tração em cada parte da corda quando a carga é erguida devagar.

8.82 A talha mostrada na figura é usada para erguer uma carga de 675 N. Cada uma das roldanas de 75 mm de diâmetro gira sobre um eixo de 12 mm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,20, determine a tração em cada parte da corda quando a carga é baixada devagar.

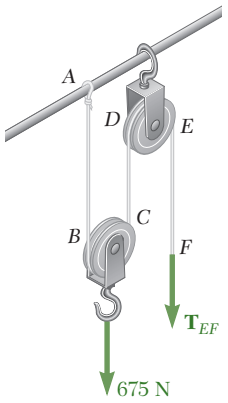


Figura *P8.81* e P8.82

8.83 Um vagão ferroviário tem massa 30 Mg e é apoiado em oito rodas de 800 mm de diâmetro, com eixos de 125 mm de diâmetro. Sabendo que os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0{,}020$ e $\mu_k = 0{,}015$, determine a força horizontal necessária (*a*) para movimento iminente do vagão, (*b*) para manter o vagão movendo-se em velocidade constante. Despreze a resistência ao rolamento entre as rodas e os trilhos.

8.84 e 8.85 Uma alavanca *AB* de peso desprezível é montada com folga em um eixo fixo de 63 mm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo fixo e a alavanca é 0,15, determine a força **P** necessária para iniciar a rotação da alavanca no sentido anti-horário.

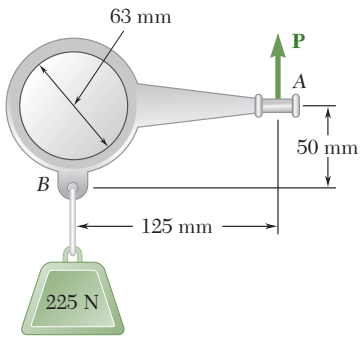


Figura *P8.84* e P8.86

8.86 e 8.87 Uma alavanca *AB* de peso desprezível é montada com folga em um eixo fixo de 63 mm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo fixo e a alavanca é 0,15; determine a força **P** necessária para iniciar a rotação da alavanca no sentido horário.

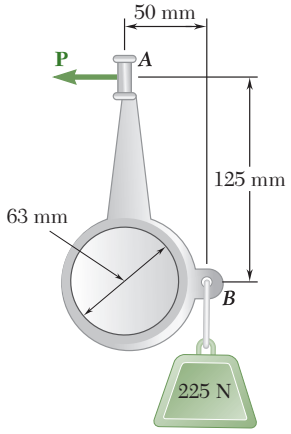


Figura P8.85 e P8.87

8.88 O ele de ligação mostrado na figura é usado frequentemente na construção de pontes de rodovias para possibilitar a expansão causada por variações de temperatura. Em cada um dos pinos *A* e *B* de 60 mm, o coeficiente de atrito estático é 0,20. Sabendo que o componente vertical da força exercida por *BC* sobre a união é 200 kN, determine (*a*) a força horizontal que deve ser exercida sobre a viga *BC* para começar a mover o elo, (*b*) o ângulo que a força resultante exercida pela viga *BC* sobre o elo fará com a vertical.

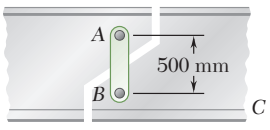


Figura P8.88

8.89 Um patinete é projetado para andar à velocidade constante em um declive com 2% de inclinação. Considerando que o coeficiente de atrito cinético entre o eixo de 25 mm e o mancal é 0,10, determine o diâmetro necessário das rodas. Despreze a resistência ao rolamento entre as rodas e o solo.

8.90 Uma enceradeira elétrica de 225 N é operada sobre uma superfície cujo coeficiente de atrito cinético é 0,25. Considerando que a força normal por unidade de área entre o disco e o assoalho é distribuída uniformemente, determine a intensidade Q das forças horizontais necessárias para se impedir o movimento da máquina.

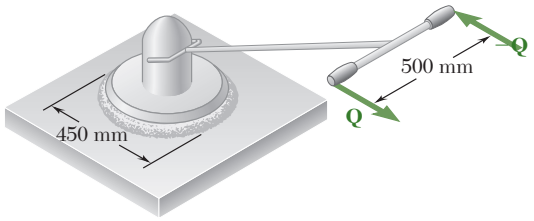


Figura P8.90

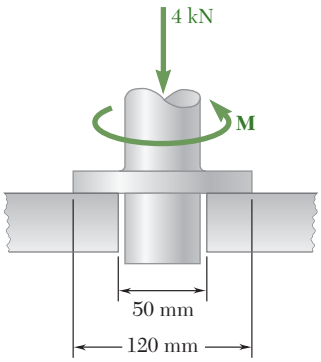


Figura P8.91

8.91 Sabendo que é necessário um torque de intensidade 30 N · m para iniciar a rotação do eixo vertical, determine o coeficiente de atrito estático entre as superfícies anelares de contato.

***8.92** À medida que as superfícies de um eixo e um mancal desgastam-se, a resistência ao atrito de um mancal de escora diminui. Geralmente, considera-se que o desgaste é diretamente proporcional à distância percorrida por qualquer ponto dado do eixo e, portanto, à distância r do ponto ao eixo de rotação. Logo, supondo que a força normal por unidade de área é inversamente proporcional a r, mostre que a intensidade M do binário necessário para se vencer a resistência ao atrito de um mancal de extremidade gasto (com contato na superfície circular completa) é igual a 75% do valor dado pela fórmula (8.9) para um mancal novo.

***8.93** Supondo que os mancais se desgastam como indicado no Problema 8.92, mostre que a intensidade M do binário necessário para se vencer a resistência ao atrito de um mancail de colar gasto é

$$M = \tfrac{1}{2}\mu_k P(R_1 + R_2)$$

sendo P = intensidade da força axial total
R_1, R_2 = raios interno e externo do colar

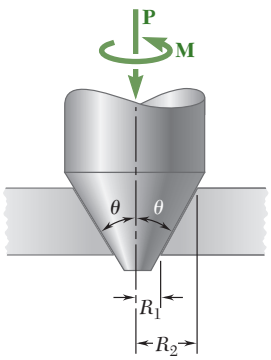


Figura P8.94

***8.94** Supondo que a pressão entre as superfícies de contato seja uniforme, mostre que a intensidade M do binário necessário para se vencer a resistência de atrito para o mancal cônico mostrado é:

$$M = \frac{2}{3}\frac{\mu_k P}{\operatorname{sen}\theta}\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

8.95 Resolva o Problema 8.90 considerando que a força normal por unidade de área entre o disco e o assoalho varia linearmente desde um máximo no centro até zero na circunferência do disco.

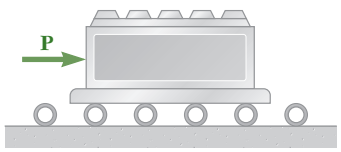


Figura P8.96

8.96 Uma base de máquina de 900 kg é rolada ao longo de um piso de concreto usando uma série de tubos de aço com diâmetro externo de 100 mm. Sabendo que o coeficiente de resistência ao rolamento é 0,5 mm entre os tubos e a base e 1,25 mm entre os tubos e o piso de concreto, determine a intensidade da força **P** necessária para se mover devagar a base ao longo do piso.

8.97 Sabendo que um disco de 150 mm de diâmetro rola a uma velocidade constante em um declive com 2% de inclinação, determine o coeficiente de resistência ao rolamento entre o disco e o declive.

8.98 Determine a força horizontal necessária para se mover um automóvel de 11.250 N com pneus de 580 mm de diâmetro ao longo de uma estrada horizontal com velocidade constante. Despreze todas as formas de atrito, exceto a resistência ao rolamento, e considere que o coeficiente de resistência ao rolamento é 1,25 mm.

8.99 Resolva o Problema 8.83 incluindo o efeito de um coeficiente de resistência ao rolamento de 0,5 mm.

8.100 Resolva o Problema 8.89 incluindo o efeito de um coeficiente de resistência ao rolamento de 1,75 mm.

8.10 Atrito em correia

Considere uma correia plana que passa sobre um tambor cilíndrico fixo (Fig. 8.14*a*). Propomo-nos a determinar a relação que existe entre os valores T_1 e T_2 da tração nas duas partes da correia quando a correia está prestes a deslizar para a direita.

Vamos destacar da correia um pequeno elemento PP' subentendendo um ângulo $\Delta\theta$. Representando por T a tração em P e por $T + \Delta T$ a tração em P', traçamos o diagrama de corpo livre do elemento da correia (Fig. 8.14*b*). Além das duas forças de tração, as forças exercidas sobre o corpo livre são o componente normal $\Delta\mathbf{N}$ da reação do tambor e a força de atrito $\Delta\mathbf{F}$. Como assume-se que o movimento é iminente, temos $\Delta F = \mu_s \Delta N$. Deve-se notar que, se $\Delta\theta$ tender a zero, as intensidades ΔN e ΔF e a *diferença* ΔT entre a tração em P e a tração em P' também tenderão a zero; no entanto, o valor T da tensão em P permanecerá inalterado. Esta observação ajuda a entender a notação que escolhemos.

Escolhendo os eixos de coordenadas mostrados na Fig. 8.14*b*, escrevemos as equações de equilíbrio para o elemento PP':

$$\Sigma F_x = 0: \qquad (T + \Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0 \qquad (8.11)$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad \Delta N - (T + \Delta T)\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - T\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = 0 \qquad (8.12)$$

Resolvendo a Eq. (8.12) para ΔN, substituindo-a na Eq. (8.11) e simplificando-a, obtemos:

$$\Delta T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s(2T + \Delta T)\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

Os termos são agora divididos por $\Delta\theta$. Para o primeiro termo, simplesmente divide-se ΔT por $\Delta\theta$. A divisão do segundo termo é efetuada

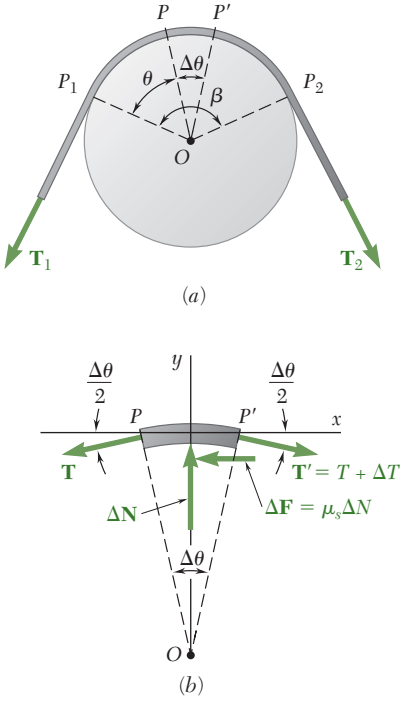


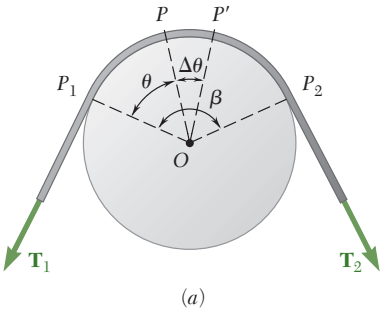
Figura 8.14

dividindo-se os termos entre parênteses por 2 e o seno por $\Delta\theta/2$. Temos:

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta}\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s\left(T + \frac{\Delta T}{2}\right)\frac{\text{sen}\,(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 0$$

Se agora fizermos $\Delta\theta$ tender a 0, o cosseno tende a 1, e $\Delta T/2$ tende a zero, como observamos anteriormente. O quociente entre sen $(\Delta\theta/2)$ e $\Delta\theta/2$ tende a 1, de acordo com um lema demonstrado em livros de cálculo. Como o limite de $\Delta T/\Delta\theta$ é, por definição, igual à derivada $dT/d\theta$, temos

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \qquad \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$



(*a*)

Figura 8.14a (repetida)

Os membros da última equação (Fig. 8.14*a*) serão agora integrados desde P_1 até P_2. Em P_1, temos $\theta = 0°$ e $T = T_1$; em P_2, temos $\theta = \beta$ e $T = T_2$. Integrando entre esses limites, temos:

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \int_0^{\beta}\mu_s\,d\theta$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu_s\beta$$

ou, observando que o primeiro membro é igual ao logaritmo natural do quociente entre T_2 e T_1:

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \mu_s\beta \tag{8.13}$$

Foto 8.3 Enrolando a amarra em torno do cabrestante, a força exercida pelo operário para controlar a corda é muito menor que a tração na parte tensionada da amarra.

Essa relação também pode ser escrita na forma:

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s\beta} \tag{8.14}$$

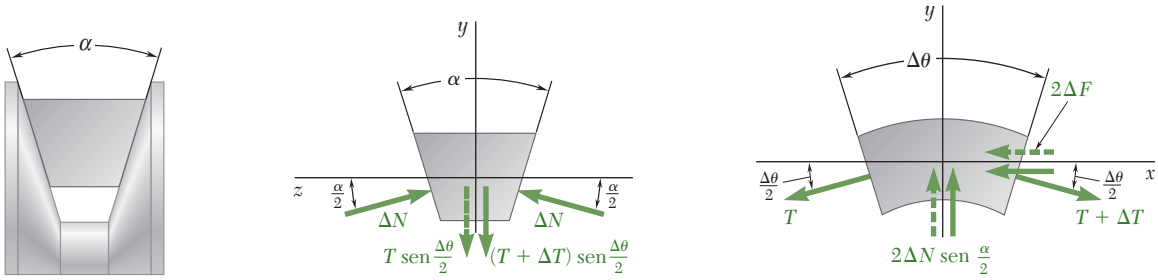
As fórmulas que acabamos de deduzir aplicam-se da mesma forma a problemas que envolvam correias planas que passam sobre tambores cilíndricos fixos e a problemas que envolvam cordas enroladas em torno de um pilar ou de um cabrestante. Essas fórmulas também podem ser usadas para se resolver problemas que envolvam freios de cinta. Em tais problemas, é o tambor que está prestes a girar, enquanto a cinta permanece fixa. As fórmulas também podem ser aplicadas a problemas que envolvam transmissões por correia. Nesses problemas, tanto a polia como a correia giram; nosso interesse, então, é determinar se a correia irá escorregar, ou seja, se ela irá se mover *em relação* à polia.

As fórmulas (8.13) e (8.14) devem ser usadas somente se a correia, corda ou freio estiver *prestes a escorregar.* A fórmula (8.14) será usada se

T_1 ou T_2 for necessária; a fórmula (8.13) será preferível se μ_s ou o ângulo de contato β for necessário. Devemos observar que T_2 é sempre maior que T_1; logo, T_2 representa a tração naquela parte da correia ou corda que *puxa*, enquanto T_1 é a tração na parte que *resiste*. É preciso observar também que o ângulo de contato β deve ser expresso em *radianos*. O ângulo β pode ser maior que 2π; por exemplo, se uma corda é enrolada n vezes em torno de um pilar, β é igual a $2\pi n$.

Se a correia, corda ou freio estiver de fato escorregando, fórmulas similares a (8.13) e (8.14), mas que envolvem o coeficiente de atrito cinético μ_k, deverão ser usadas. Se a correia, corda ou freio não estiver escorregando ou prestes a escorregar, nenhuma dessas fórmulas pode ser usada.

As correias usadas em transmissões geralmente são de formato em V. Na correia em V mostrada na Fig. 8.15*a*, o contato entre a correia e a polia se dá ao longo das laterais da canaleta. A relação que existe



(*a*) (*b*) (*c*)

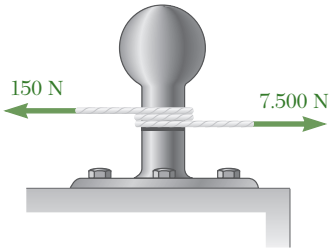
Figura 8.15

entre os valores T_1 e T_2 da tração nas duas partes da correia quando a correia está prestes a escorregar pode ser obtida novamente, traçando-se o diagrama de corpo livre de um elemento da correia (Fig. 8.15*b* e *c*). Equações semelhantes às Eqs. (8.11) e (8.12) são deduzidas, mas agora a intensidade da força de atrito total sobre o elemento é $2\,\Delta F$ e a soma dos componentes y das forças normais é $2\,\Delta N$ sen $(\alpha/2)$. Procedendo como antes, obtemos:

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_s \beta}{\operatorname{sen}(\alpha/2)} \tag{8.15}$$

ou

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta / \operatorname{sen}(\alpha/2)} \tag{8.16}$$



PROBLEMA RESOLVIDO 8.7

Uma amarra lançada de um navio ao cais é enrolada com duas voltas completas em torno de um poste de amarração. A tração na amarra é de 7.500 N; exercendo uma força de 150 N na extremidade livre, um estivador pode manter a amarra prestes a escorregar. (*a*) Determine o coeficiente de atrito entre a amarra e o poste. (*b*) Determine a tração na amarra que poderia ser suportada pela força de 150 N caso a amarra fosse enrolada com três voltas completas em torno do poste.

SOLUÇÃO

a. Coeficiente de atrito. Como o escorregamento da amarra é iminente, usamos a Eq. (8.13):

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

Como a amarra é enrolada com duas voltas completas em torno do poste, temos:

$$\beta = 2(2\pi \text{ rad}) = 12{,}57 \text{ rad}$$
$$T_1 = 150 \text{ N} \qquad T_2 = 7.500 \text{ N}$$

Logo:

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1}$$
$$\mu_s(12{,}57 \text{ rad}) = \ln \frac{7.500 \text{ N}}{150 \text{ N}} = \ln 50 = 3{,}91$$
$$\mu_s = 0{,}311$$

$\mu_s = 0{,}311$ ◀

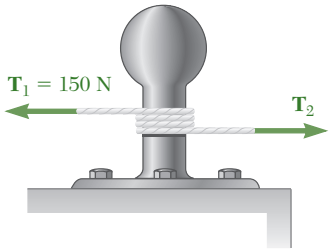
b. Amarra enrolada com três voltas em torno do poste. Usando o valor de μ_s obtido no item *a*, temos agora:

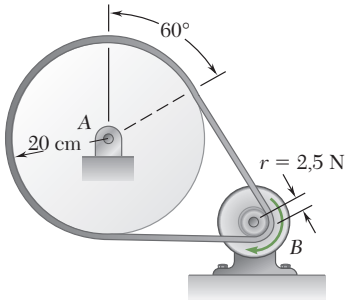
$$\beta = 3(2\pi \text{ rad}) = 18{,}85 \text{ rad}$$
$$T_1 = 150 \text{ N} \qquad \mu_s = 0{,}311$$

Substituindo esse valores na Eq. (8.14), obtemos:

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta}$$
$$\frac{T_2}{150 \text{ N}} = e^{(0{,}311)(18{,}85)} = e^{5{,}862} = 351{,}5$$
$$T_2 = 52.725 \text{ N}$$

$T_2 = 52{,}7 \text{ kN}$ ◀

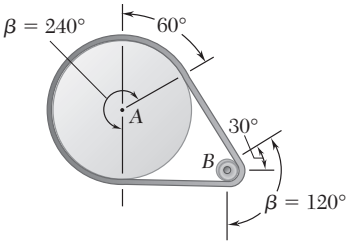




PROBLEMA RESOLVIDO 8.8

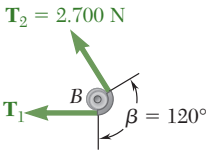
Uma correia plana liga a polia A, que aciona uma máquina-ferramenta, à polia B, que é fixada ao eixo de um motor elétrico. Os coeficinetes de atrito entre as polias e a correia são $\mu_s = 0{,}25$ e $\mu_k = 0{,}20$. Sabendo que a máxima tração admissível na correia é 2.700 N, determine o maior torque que pode ser exercido pela correia sobre a polia A.

SOLUÇÃO



Como a resistência ao escorregamento depende do ângulo de contato β entre polia e correia, bem como do coeficiente de atrito estático μ_s, e como μ_s é o mesmo para as polias, o escorregamento ocorrerá primeiro na polia B, cujo β é menor.

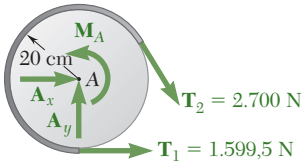
Como foram encontrados os ângulos?



Polia B. Usando a Eq. (8.14) com $T_2 = 2.700$ N, $\mu_s = 0{,}25$ rad e $\beta = 120° = 2\pi/3$, temos:

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \qquad \frac{2.700\text{ N}}{T_1} = e^{0{,}25(2\pi/3)} = 1{,}688$$

$$T_1 = \frac{2.700\text{ N}}{1{,}688} = 1.599{,}5\text{ N}$$



Polia A. Traçamos o diagrama de corpo livre da polia A. O binário $\mathbf{M}_A$ é aplicado à polia pela máquina-ferramenta à qual esta fixada, sendo igual o oposto ao torque exercido pela correia. Temos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad M_A - (2.700\text{ N})(20\text{ cm}) + (1.599{,}5\text{ N})(20\text{ cm}) = 0$$

$$M_A = 22.010\text{ N} \cdot \text{cm} \qquad M_A = 220{,}1\text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

Observação. Podemos verificar que a correia não escorrega sobre a polia A calculando o valor de μ_s necessário para impedir o escorregamento em A e concluindo que ele é menor que o valor real de μ_s. A partir da Eq. (8.13), temos

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{2.700\text{ N}}{1.599{,}5\text{ N}} = 0{,}524$$

e, como $\beta = 240° = 4\pi/3$ rad,

$$\frac{4\pi}{3}\mu_s = 0{,}524 \qquad \mu_s = 0{,}125 < 0{,}25$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Na seção anterior, aprendemos sobre o *atrito em correia.* Os problemas que teremos de resolver incluem correias passando sobre tambores fixos, freios de cinta – em que o tambor gira enquanto a cinta permanece fixa – e transmissões por correia.

1. Problemas que envolvam atrito em correia recaem em uma das seguintes categorias:

a. Problemas em que o escorregamento é iminente. Uma das fórmulas a seguir, envolvendo o *coeficiente de atrito estático* μ_s, pode então ser usada como

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \tag{8.13}$$

ou

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \tag{8.14}$$

b. Problemas em que o escorregamento está ocorrendo. As fórmulas a serem usadas podem ser obtidas das Eqs. (8.13) e (8.14), substituindo μ_s pelo *coeficiente de atrito cinético* μ_k.

2. Ao começarmos a resolver um problema que envolva atrito em correia, lembremo-nos do seguinte:

a. O ângulo β deve ser expresso em radianos. Em um problema de correia e tambor, esse é o ângulo subentendido pelo arco do tambor sobre o qual a correia está enrolada.

b. A maior tração é sempre representada por T_2 e a *menor tração é representada por* T_1.

c. A maior tração ocorre na extremidade da correia que está no sentido do movimento, ou do movimento iminente, da correia em relação ao tambor.

3. Em cada problema que formos chamados a resolver, três entre as quatro grandezas T_1, T_2, β e μ_s (ou μ_k) serão dadas ou encontradas prontamente e então resolveremos a equação apropriada para a quarta grandeza. Há dois tipos de problema com que iremos nos deparar:

a. Encontrar μ_s entre a correia e o tambor, sabendo que o escorregamento é iminente. A partir dos dados fornecidos, devemos determinar T_1, T_2, e β; substituir esses valores na Eq. (8.13) e resolver para μ_s [Problema Resolvido 8.7, item *a*]. Siga o mesmo procedimento para encontrar o *menor valor* de μ_s para que o escorregamento não ocorra.

b. Encontrar a intensidade de uma força ou binário aplicado à correia ou tambor, sabendo que o escorregamento é iminente. Os dados fornecidos devem incluir μ_s e β. Se incluírem também T_1 ou T_2,usemos a Eq. (8.14) para determinar a outra tração. Se nem T_1 nem T_2 são conhecidas, mas algum outro dado é fornecido, use o diagrama de corpo livre do sistema correia/tambor para escrever uma equação de equilíbrio que deveremos resolver simultaneamente com a Eq. (8.14) para T_1 e T_2. Estaremos, então, aptos a encontrar a intensidade da força ou binário especificado do diagrama de corpo livre do sistema. Sigamos o mesmo procedimento para determinar o *maior valor* de uma força ou binário que pode ser aplicado à correia ou tambor para não ocorrer escorregamento (Problema Resolvido 8.8).

PROBLEMAS

8.101 Uma amarra é enrolada com duas voltas completas em torno de um poste de amarração. Exercendo uma força de 360 N na extremidade livre da amarra, um estivador consegue resistir a uma força de 22,5 kN na outra extremidade da amarra. Determine (*a*) o coeficiente de atrito estático entre a amarra e o poste, (*b*) o número de voltas com que a amarra deve ser enrolada em torno do poste para se resistir a uma força de 90 kN com a mesma força de 360 N.

8.102 Uma corda *ABCD* está amarrada em dois canos, como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,25, determine (*a*) o menor valor da massa *m* para a qual o equilíbrio é possível, (*b*) a correspondente tração na parte *BC* da corda.

8.103 Uma corda *ABCD* está apoiada em dois canos, como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,25, determine (*a*) o maior valor da massa *m* para a qual o equilíbrio é possível, (*b*) a correspondente tração na parte *BC* da corda.

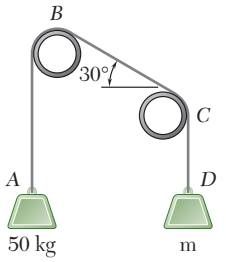


Figura P8.102 e P8.103

8.104 Um bloco de 1.350 N é sustentado por uma corda enrolada $1\frac{1}{2}$ volta em torno de uma barra horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a corda e a barra é 0,15, determine a faixa de valores de *P* em que o equilíbrio é mantido.

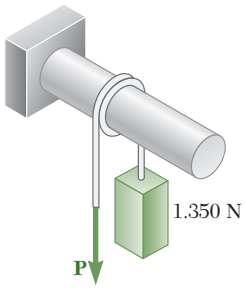


Figura P8.104

8.105 O coeficiente de atrito estático entre o bloco *B* e a superfície horizontal e entre a corda e o suporte *C* é 0,40. Sabendo que $m_A = 12$ kg, determine a menor massa do bloco *B* para que o equilíbrio seja mantido.

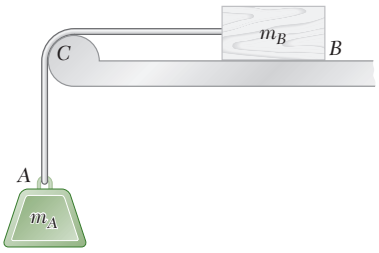


Figura *P8.105 e P8.106*

8.106 O coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo entre o bloco *B* e a superfície horizontal e entre a corda e o suporte *C*. Sabendo que $m_A = m_B$, determine o menor valor de μ_s para que o equilíbrio seja mantido.

8.107 Uma correia plana é usada para transmitir o torque do tambor *B* para o tambor *A*. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,40 e que a tração admissível da correia é 450 N, determine o maior torque que pode ser exercido sobre o tambor *A*.

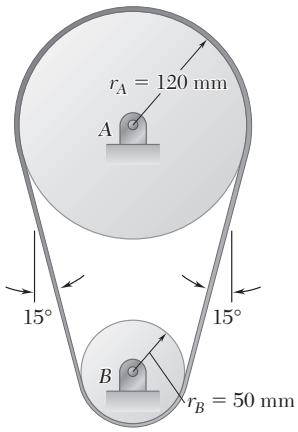


Figura P8.107

8.108 Uma correia plana é usada para transmitir um torque da polia *A* para a polia *B*. O raio de cada polia é 60 mm, e uma força de intensidade $P = 900$ N é aplicada ao eixo da polia *A*, como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,35 determine (*a*) o maior torque que pode ser transmitido, (*b*) o valor máximo correspondente da tração na correia.

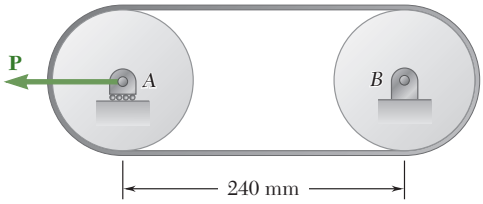


Figura P8.108

8.109 Resolva o Problema 8.108 considerando que a correia é lançada em forma de oito em torno das polias.

8.110 Na base de motor pivotante mostrada na figura, o peso **W** do motor de 780 N é usado para se manter tração na correia de transmissão. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a correia plana e os tambores *A* e *B* é 0,40, e desprezando o peso da plataforma *CD*, determine o maior torque que pode ser transmitido ao tambor *B* quando o tambor acionador *A* está girando em sentido horário.

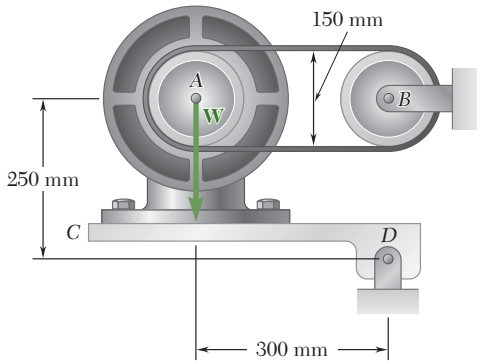


Figura P8.110

8.111 Resolva o Problema 8.110 considerando que o tambor *A* está girando em sentido anti-horário.

8.112 Um freio de cinta é utilizado para controlar a velocidade de um volante, conforme mostra a figura. Os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0{,}30$ e $\mu_k = 0{,}25$. Determine a intensidade do torque que deve ser aplicado ao volante, sabendo que $P = 45$ N, e que o volante está rodando no sentido anti-horário em velocidade constante.

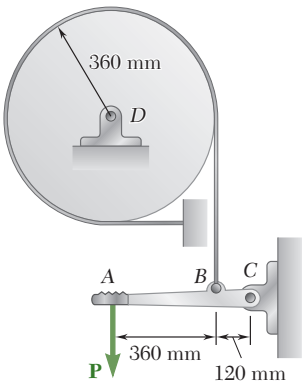


Figura P8.112

8.113 A velocidade de um tambor de freio mostrado na figura é controlada por uma cinta fixada a uma barra de controle *AD*. A força **P** de intensidade 110 N é aplicada na barra de controle em *A*. Determine a intensidade do torque que está sendo aplicado ao tambor, sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre a cinta e o tambor é 0,25, que $a = 100$ mm e que o tambor está rodando a uma velocidade constante (*a*) no sentido anti-horário, (*b*) no sentido horário.

8.114 Sabendo que $a = 100$ mm, determine o máximo valor do coeficiente de atrito estático para o qual o freio é autotravante quando o tambor roda no sentido anti-horário.

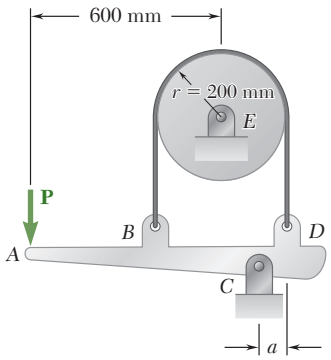


Figura *P8.113*, *P8.114* e P8.115

8.115 Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,30 e que o tambor de freio está rodando no sentido anti-horário, determine o mínimo valor de *a* para o qual o freio não é autotravante.

8.116 O balde *A* e o bloco *C* estão ligados por uma corda que passa sobre o tambor *B*. Sabendo que o tambor *B* gira devagar em sentido anti-horário e que os coeficientes de atrito em todas as superfícies são $\mu_s = 0{,}35$ e $\mu_k = 0{,}25$, determine a menor massa combinada *m* do balde e seu conteúdo para que o bloco *C* (*a*) permaneça em repouso, (*b*) esteja prestes a se mover plano acima, (*c*) continue a se mover plano acima a uma velocidade constante.

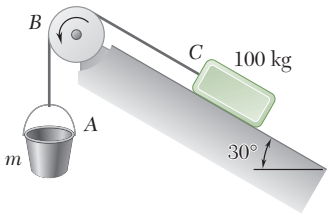


Figura P8.116

8.117 Resolva o Problema 8.116, supondo que o tambor *B* esteja fixo e não possa girar.

8.118 e 8.120 Um cabo passa em torno de três tubos paralelos. Sabendo que os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0{,}25$ e $\mu_k = 0{,}20$, determine (*a*) o menor peso *W* para o qual o equilíbrio é mantido, (*b*) o maior peso *W* que pode ser suspenso se o tubo *B* está rodando vagarosamente no sentido anti-horário enquanto os tubos *A* e *C* permanecem fixos.

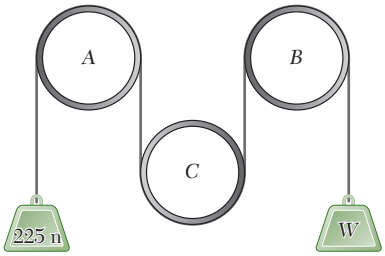


Figura *P8.118* e *P8.119*

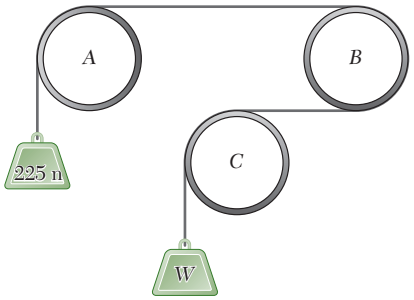


Figura P8.120 e P8.121

8.119 e 8.121 Um cabo passa em torno de três tubos paralelos. Dois dos tubos são fixos e não podem rodar, enquanto o terceiro tubo é girado vagarosamente. Sabendo que os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0{,}25$ e $\mu_k = 0{,}20$, determine o maior peso *W* que pode ser erguido (*a*) se apenas o tubo *A* está rodando no sentido anti-horário, (*b*) se apenas o tubo *C* está rodando no sentido horário.

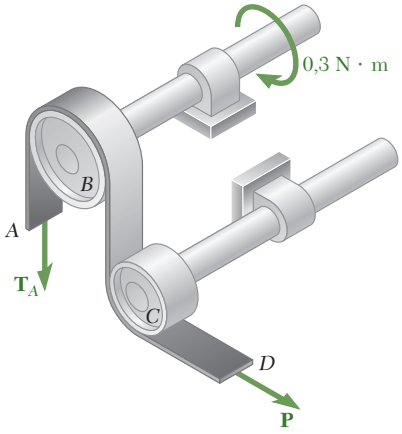


Figura P8.122

8.122 Uma fita de gravação passa sobre o tambor de acionamento *B* de 20 mm de raio e sob o tambor esticador *C*. Sabendo que os coeficientes de atrito entre a fita e os tambores são $\mu_s = 0{,}40$ e $\mu_k = 0{,}30$ e que o tambor *C* é livre para girar, determine o menor valor admissível de *P* para que a fita não escorregue sobre o tambor *B*.

8.123 Resolva o Problema 8.122 considerando que o tambor esticador *C* esteja fixo e não possa girar.

8.124 Uma barra *AE* de 45 N é suspensa por um cabo que passa por um tambor de 125 mm de raio. O movimento vertical na extremidade *E* é impedida por dois batentes mostrados na figura. Sabendo que $\mu_s = 0{,}30$ entre o cabo e o tambor, determine (*a*) o maior binário no sentido anti-horário $\mathbf{M}_0$ que pode ser aplicado no tambor se o deslizamento não ocorre, (*b*) a força correspondente aplicada na extremidade *E* da barra.

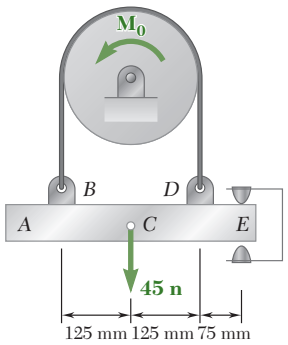


Figura P8-124

8.125 Resolva o Problema 8.124, considerando que o binário no sentido horário $\mathbf{M}_0$ é aplicado ao tambor.

8.126 A chave de cinta mostrada na figura é usada para apertar o tubo com firmeza sem danificar sua superfície. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é o mesmo para todas as superfícies de contato, determine o menor valor de μ_s para que a chave seja autotravante quando $a = 200$ mm, $r = 300$ mm e $\theta = 65°$.

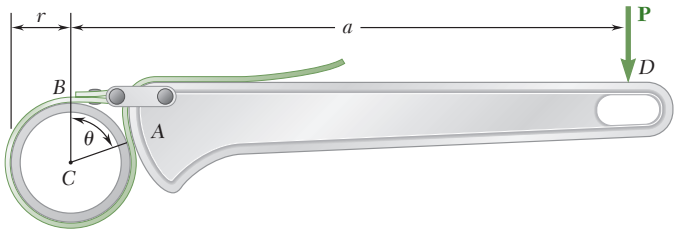


Figura P8.126

8.127 Resolva o Problema 8.126 considerando que $\theta = 75°$.

8.128 Demonstre que as Eqs. (8.13) e (8.14) são válidas para qualquer formato de superfície, desde que o coeficiente de atrito seja o mesmo em todos os pontos de contato.

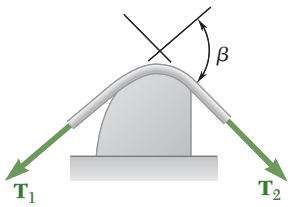


Figura P8.128

8.129 Complete a dedução da Eq. (8.15) que relaciona as trações nas duas parte de uma correia em V.

8.130 Resolva o Problema 8.107 supondo que a correia plana e os tambores sejam substituídos por uma correia em V e por polias em V com $\alpha = 36°$. (O ângulo α é mostrado na Fig. 8.15*a*.)

8.131 Resolva o Problema 8.108 supondo que a correia plana e os tambores sejam substituídos por uma correia em V e por polias em V com $\alpha = 36°$. (O ângulo α está mostrado na Fig. 8.15*a*.)

REVISÃO E RESUMO

Este capítulo foi dedicado ao estudo do *atrito seco*, ou seja, a problemas que envolvam corpos rígidos em contato ao longo de *superfícies sem lubrificação*.

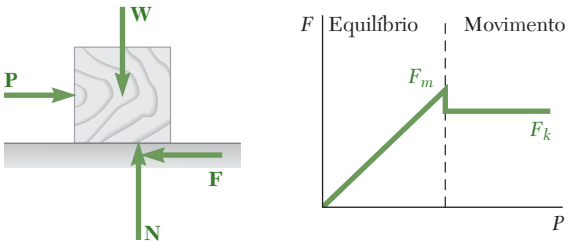


Figura 8.16

Atrito estático e cinético

Aplicando uma força horizontal **P** a um bloco em repouso sobre uma superfície horizontal [Seção 8.2], observamos que, de início, o bloco não se move. Isto mostra que *uma força de atrito* **F** deve ter se desenvolvido para contrabalançar **P** (Fig. 8.16). À medida que a intensidade de **P** aumenta, a intensidade de **F** também aumenta até atingir um valor máximo F_m. Se **P** aumentar ainda mais, o bloco começa a deslizar e a intensidade de **F** cai de F_m a um valor menor F_k. Evidências experimentais mostram que F_m e F_k são proporcionais ao componente normal N da reação da superfície. Temos

$$F_m = \mu_s N \qquad F_k = \mu_k N \tag{8.1, 8.2}$$

em que μ_s e μ_k são denominados, respectivamente, *coeficiente de atrito estático* e *coeficiente de atrito cinético*. Esses coeficientes dependem da natureza e da condição das superfícies que estão em contato. Valores aproximados dos coeficientes de atrito estático foram dados na Tabela 8.1.

Ângulos de atrito

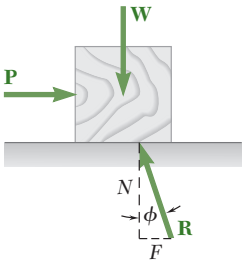


Figura 8.17

É conveniente às vezes substituir a força normal **N** e a força de atrito **F** pela sua resultante **R** (Fig. 8.17). À medida que a força de atrito aumenta e atinge seu valor máximo $F_m = \mu_s N$, o ângulo ϕ que **R** forma com a normal à superfície aumenta e atinge um valor máximo ϕ_s, denominado *ângulo de atrito estático*. Se o movimento ocorrer de fato, a intensidade de **F** cai para F_k; de modo análogo, o ângulo ϕ cai para um valor menor ϕ_k, denominado *ângulo de atrito cinético*. Conforme mostramos na Seção 8.3, temos:

$$\operatorname{tg} \phi_s = \mu_s \qquad \operatorname{tg} \phi_k = \mu_k \tag{8.3, 8.4}$$

Problemas que envolvem atrito

Ao resolver problemas de equilíbrio que envolvam atrito, devemos ter em mente que a intensidade F da força de atrito será igual a $F_m = \mu_s N$ *somente se o corpo estiver prestes a deslizar* [Seção 8.4]. *Se o movimento não for iminente*, F e N devem ser consideradas *incógnitas independentes* a serem determinadas das equações de equilíbrio (Fig. 8.18*a*). Devemos também verificar se o valor de F necessário para se manter equilíbrio não é maior que F_m; se for, o corpo

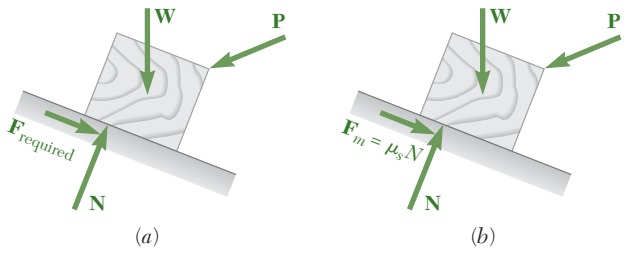


Figura 8.18

irá se mover e a intensidade da força de atrito será $F_k = \mu_k N$ [Problema Resolvido 8.1]. Por outro lado, *caso se saiba que o movimento é iminente*, F atingiu seu valor máximo $F_m = \mu_s N$ (Fig. 8.18*b*), e essa expressão pode ser substituída por F nas equações de equilíbrio [Problema Resolvido 8.3]. Quando apenas três forças estão envolvidas em um diagrama de corpo livre, incluindo a reação **R** da superfície em contato com o corpo, geralmente é mais conveniente resolver o problema traçando-se um triângulo de forças [Problema Resolvido 8.2].

Quando um problema envolve a análise das forças exercidas *por dois corpos A e B* um sobre o outro, é importante indicar as forças de atrito com seu sentido correto. Por exemplo, o sentido correto da força de atrito exercida por *B* sobre *A* é oposto ao sentido do *movimento relativo* (ou movimento relativo iminente) de *A* em relação a *B* [Fig. 8.6].

Cunhas e parafusos

Na segunda parte do capítulo, consideramos uma série de aplicações de engenharia específicas em que o atrito seco desempenha papel importante. No caso das *cunhas*, que são máquinas simples usadas para erguer cargas pesadas [Seção 8.5], eram traçados dois ou mais diagramas de corpo livre e tomava-se o cuidado de mostrar cada força de atrito com seu sentido correto [Problema Resolvido 8.4]. A análise de *parafusos de rosca quadrada*, frequentemente usados em macacos, prensas e outros mecanismos, foi reduzida à análise de um bloco que desliza sobre um plano inclinado, desenvolvendo (planificando) o filete do parafuso e apresentando-o como uma linha reta [Seção 8.6]. Isto é feito novamente na Fig. 8.19, onde r representa o *raio médio* do filete, L é o *avanço* do parafuso, ou seja, a distância axial percorrida pelo parafuso durante uma volta, **W** é a carga e Qr é igual ao torque exercido sobre o parafuso. Observou-se que, no caso de parafusos com rosca múltipla, o avanço L *não é* igual a seu passo, que é a distância medida entre duas roscas consecutivas.

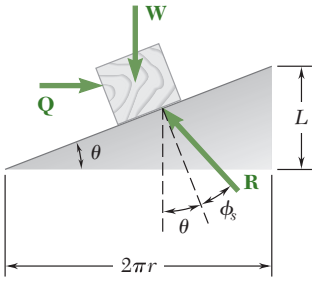


Figura 8.19

Outros usos de engenharia considerados neste capítulo foram *mancais de deslizamento* e *atrito em eixo* [Seção 8.7], *mancais de escora* e *atrito em disco* [Seção 8.8], *atrito em roda* e *resistência ao rolamento* [Seção 8.9] e *atrito em correia* [Seção 8.10].

Atrito em correia

Ao resolver um problema que envolva uma *correia plana* que passa sobre um cilindro fixo, é importante determinar primeiro o sentido em que a correia escorrega ou está prestes a escorregar. Se o tambor estiver girando, o movimento real ou iminente da correia deve ser determinado *em relação* ao tambor giratório. Por exemplo, se a correia mostrada na Fig. 8.20 estiver prestes a escorregar para a direita em

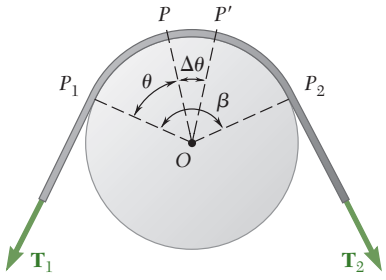


Figura 8.20

relação ao tambor, as forças de atrito exercidas pelo tambor sobre a correia estarão direcionadas para a esquerda e a tração na parte direita da correia será maior que na parte esquerda. Representando a maior tração por T_2 a menor tração por T_1, o coeficiente de atrito estático por μ_s e o ângulo (em radianos) subentendido pela correia por β, deduzimos na Seção 8.10 as fórmulas

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \mu_s\beta \tag{8.13}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s\beta} \tag{8.14}$$

que foram usadas nos Problemas Resolvidos 8.7 e 8.8. Se a correia de fato escorregar sobre o tambor, o coeficiente de atrito estático μ_s deve ser substituído pelo coeficiente de atrito cinético μ_k em ambas as fórmulas.

PROBLEMAS DE REVISÃO

8.132 Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco de 25 kg e o plano inclinado é $\mu_s = 0{,}25$, determine (*a*) o menor valor de *P* necessário para iniciar o movimento no plano inclinado, (*b*) o valor correspondente de β.

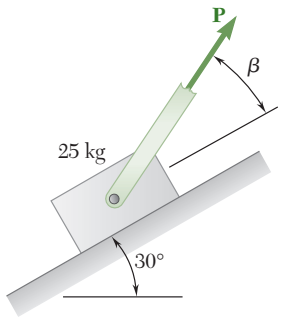


Figura P8.132

8.133 O bloco *A* de 90 N e o bloco *B* de 135 N estão apoiados em um plano inclinado que é mantido na posição mostrada na figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,15 entre todas as superfícies de contato, determine o valor de θ para que o movimento seja iminente.

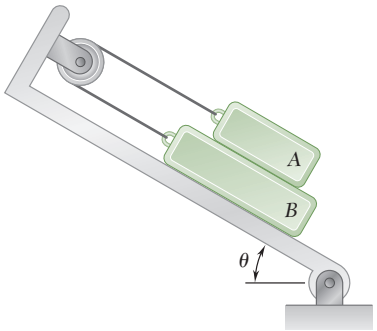


Figura P8.133

8.134 Um trabalhador move vagarosamente um caixote com 50 kg para a esquerda ao longo de uma plataforma de carga aplicando uma força **P** no canto *B* como mostra a figura. Sabendo que o caixote começa a inclinar-se sobre a extremidade *E* da plataforma de carga quando $a = 200$ mm, determine (*a*) o coeficiente de atrito cinético entre o caixote e a plataforma de carga, (*b*) a intensidade correspondente da força *P*.

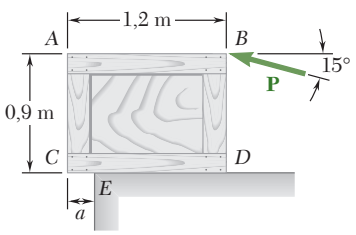


Figura *P8.134*

8.135 Uma barra delgada de comprimento L está apoiada entre um pino C e a parede vertical e sustenta uma carga **P** na extremidade A. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o pino e a barra é 0,15 e desprezando o atrito no rolo, determine o intervalo de valores da razão L/a para a qual o equilíbrio é mantido.

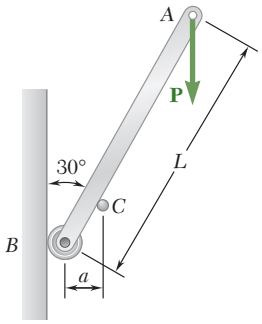


Figura P8.135

8.136 Um dispositivo de segurança utilizado por trabalhadores que sobem escadas fixas em estruturas de grande altura consiste em um trilho preso à escada que pode deslizar na flange do trilho. Uma corrente prende o cinturão do trabalhador à extremidade de um came excêntrico que pode rodar no eixo ligado à manga em C. Determine o menor valor admissível comum do coeficiente de atrito estático entre a flange do trilho, os pinos A e B é o came excêntrico se a manga não puder deslizar para baixo quando a corrente é puxada verticalmente para baixo.

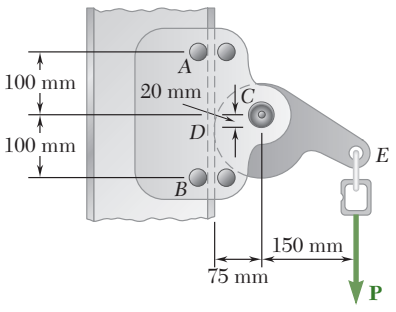


Figura P8.136

8.137 Para ser de uso prático, o dispositivo de segurança descrito no problema anterior deve deslizar livremente ao longo do trilho quando puxado para cima. Determine o maior valor admissível do coeficiente de atrito estático entre a flange do trilho e os pinos A e B, para que a manga fique livre para deslizar quando puxada como mostra a figura, considerando (a) $\theta = 60°$, (b) $\theta = 50°$, (c) $\theta = 40°$.

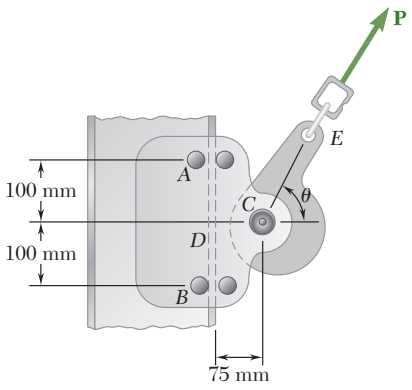


Figura P8.137

8.138 A barra *AB* é ligada aos colares que podem deslizar sobre as barras inclinadas mostradas na figura. Uma força **P** é aplicada no ponto *D* localizado a uma distância *a* da extremidade *A*. Sabendo que o coeficiente de atrito estático μ_s entre cada colar e a barra correspondente é 0,30 e, desprezando os pesos da barra e dos colares, determine o menor valor da razão *a*/*L* para que o equilíbrio seja mantido.

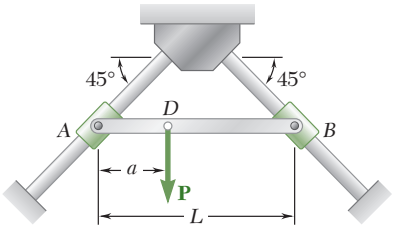


Figura P8.138

8.139 A parte da máquina *ABC* é sustentada por uma dobradiça sem atrito em *B* e uma cunha de 10° em *C*. Sabendo que o coeficiente de atrito estático nas superfícies da cunha é 0,20, determine (*a*) a força **P** necessária para mover a cunha, (*b*) a correspondente componente da reação em *B*.

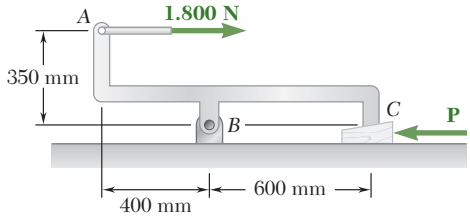


Figura P8.139

8.140 Uma cunha *A* de peso desprezível é forçada entre dois blocos *B* e *C* de 450 N que repousam em uma superfície horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito estático em todas as superfícies de contato é 0,35, determine a menor força **P** necessária para iniciar o movimento da cunha (*a*) se os blocos são igualmente livres para mover, (*b*) se o bloco *C* está aparafusado na superfície horizontal.

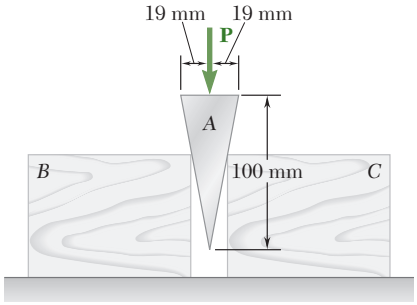


Figura P8.140

8.141 A posição do macaco de automóvel mostrado na figura é controlada por um parafuso *ABC* com rosca simples em cada extremidade (rosca à direita em *A*, rosca à esquerda em *C*). Cada rosca tem um passo de 2,5 mm e um diâmetro médio de 9,5 mm. Se o coeficiente de atrito estático é 0,15, determine a intensidade do binário **M** que deve ser aplicado para se erguer o automóvel.

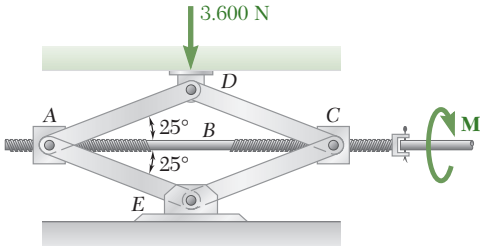


Figura *P8.141*

8.142 Uma alavanca de peso desprezível é montada com folga em um eixo de 30 mm de raio como mostrado na figura. Sabendo que a aplicação da força **P** de intensidade 275 N irá justamente iniciar a rotação no sentido horário, determine (*a*) o coeficiente de atrito estático entre o eixo e a alavanca, (*b*) a menor força **P** para que a alavanca não inicie a rotação no sentido anti-horário.

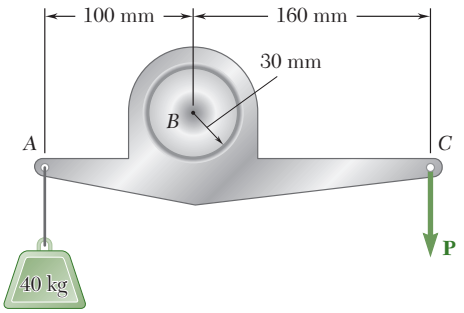


Figura P8.142

8.143 O binário $\mathbf{M}_B$ é aplicado no giro do tambor motriz *B* para manter a velocidade constante da cinta de polimento mostrada na figura. Sabendo que $\mu_k = 0{,}45$ entre a cinta e o bloco de 15 kg, inicia o polimento e $\mu_s = 0{,}30$ entre a cinta e o tambor motriz *B*, determine (*a*) o binário $\mathbf{M}_B$, (*b*) a mínima tração entre na parte inferior da cinta se nenhum escorregamento ocorre entre a cinta e o tambor motriz.

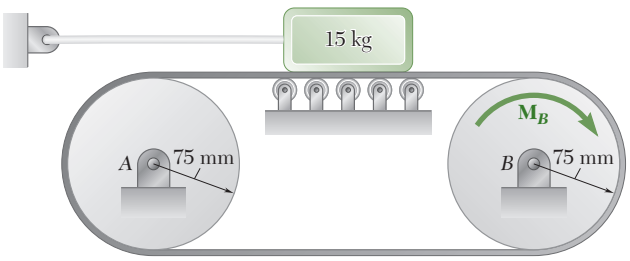


Figura *P8.143*

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

8.C1 A posição da haste *AB* de 10 kg é controlada pelo bloco de 2 kg mostrado na figura, que é deslocado lentamente para a esquerda pela força **P**. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre todas as superfícies de contato é 0,25, usando um aplicativo computacional calcule a intensidade *P* da força em função de *x* para valores entre 900 mm e 100 mm, com 50 mm de decremento. Adotando aproximadamente o menor decremento, determine o máximo valor de *P* e o valor correspondente de *x*.

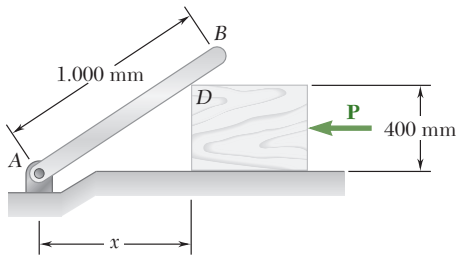


Figura P8.C1

8.C2 Os blocos *A* e *B* estão apoiados em um plano inclinado e mantidos na posição mostrada na figura. Sabendo que o peso do bloco *A* é 90 N e que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é 0,15, use um programa de computador para determinar o valor de θ para que o movimento seja iminente, considerando valores do peso do bloco *B* desde 0 até 450 N, com incrementos de 45 N.

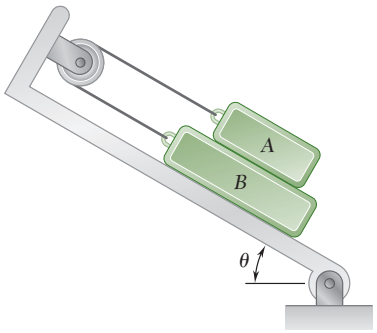


Figura P8.C2

8.C3 Um cilindro *C* de 300 g repousa sobre o cilindro *D*, tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo em *A* e *B*, use um programa de computador para determinar, para valores de μ_s variando entre 0 e 0,40 com incrementos de 0,05, o maior valor do binário anti-horário **M** que pode ser aplicado ao cilindro *D* para que este não gire.

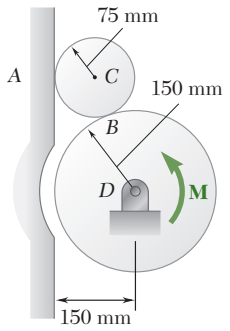


Figura P8.C3

8.C4 Duas barras são ligadas por um colar deslizante D e mantidas em equilíbrio por um binário $\mathbf{M}_A$ como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a barra AC e o colar deslizante é 0,40, usando um programa de computador determine, para valores de θ entre 0 e 120° com incrementos de 10°, o intervalo de valores de $\mathbf{M}_A$ para que o equilíbrio seja mantido.

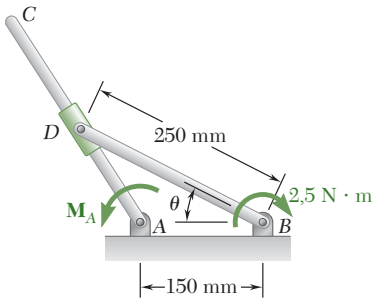


Figura P8.C4

8.C5 Um bloco de 45 N é vagarosamente movido para cima em uma superfície cilíndrica circular por um cabo que passa sobre um pequeno tambor cilíndrico fixo em B. O coeficiente de atrito cinético conhecido é 0,30 entre o bloco e a superfície e entre o cabo e o tambor. Usando um aplicativo computacional calcule a força $\mathbf{P}$ necessária para conservar o movimento para valores de θ entre 0 e 90° com incrementos de 10°. Para os mesmos valores de θ, calcule a intensidade da reação entre o bloco e a superfície. [Note que o ângulo de contato entre o cabo e o tambor fixo é $\beta = \pi - (\theta/2)$.]

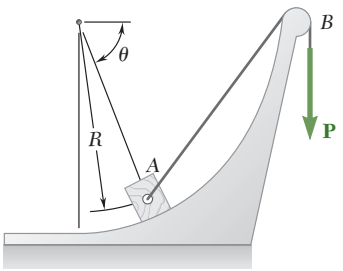


Figura P8.C5

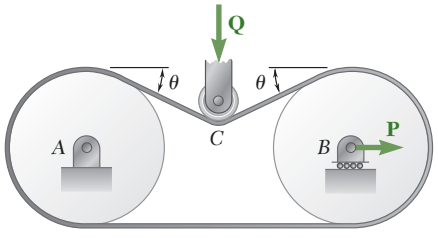


Figura P8.C6

8.C6 Uma correia plana é usada para transmitir o torque do tambor A para o tambor B. O raio de cada tambor é 80 mm, e o sistema é dotado de uma polia esticadora C cuja função é aumentar o contato entre a correia e os tambores. A tensão admissível da correia é 200 N e o coeficiente de atrito estático entre a correia e os tambores é 0,30. Usando um aplicativo computacional, calcule o maior torque que pode ser transmitido em função de θ no intervalo 0 a 30°, com incrementos de 5°.

8.C7 Dois colares A e B que deslizam nas barras verticais com atrito desprezível são conectados por uma corda de 750 mm que passa por sobre um eixo fixo em C. O coeficiente de atrito estático entre a corda e o eixo fixo é 0,30. Sabendo que o peso do colar B é 36 N, usando um aplicativo computacional determine, para valores de θ entre 0 e 60° com incrementos de 10°, o menor e o maior peso do colar A para que o equilíbrio seja mantido.

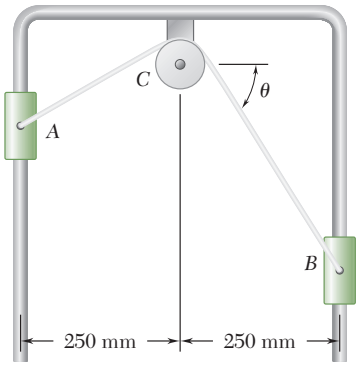


Figura P8.C7

8.C8 A extremidade B de uma viga uniforme de comprimento L está sendo erguida por um guindaste estacionário. Inicialmente, a viga está posicionada no chão com a extremidade A diretamente abaixo da roldana C. Como o cabo é puxado devagar, primeiro a viga desliza para a esquerda com $\theta = 0°$ até ser movida por meio de uma distância x_0. Num segundo momento, a extremidade B é erguida, enquanto a extremidade A permanece deslizando para a esquerda até x alcançar um valor máximo x_m e θ o valor correspondente θ_1. A viga, então, roda sobre A' enquanto θ continua aumentando. Assim que θ alcança θ_2, a extremidade A começa a deslizar para a direita e continua de maneira irregular até B alcançar C. Sabendo que os coeficientes de atrito entre a viga e o chão são $\mu_S = 0{,}50$ e $\mu_k = 0{,}40$, (a) usando um programa de computador, calcule x para qualquer valor de θ enquanto a viga está deslizando para a esquerda e determine x_0, x_m e θ_1, (b) modifique o programa para obter o cálculo, para qualquer θ, do valor de x para o qual haverá movimento iminente para a direita e determine o valor θ_2 do correspondente θ para $x = x_m$.

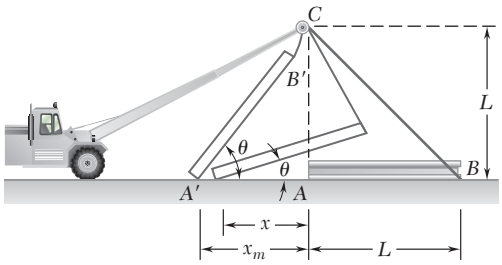


Figura P8.C8

A resistência de elementos estruturais utilizados na construção de edifícios depende em grande medida das propriedades de suas seções transversais. Isso inclui os momentos de segunda ordem de uma superfície, também chamados de momentos de inércia, e de suas seções transversais.

CAPÍTULO 9

Forças distribuídas: momento de inércia

9 Forças distribuídas: momentos de inércia

9.1 Introdução
9.2 Momento de segunda ordem, ou momento de inércia, de uma superfície
9.3 Determinação do momento de inércia de uma superfície por integração
9.4 Momento de inércia polar
9.5 Raio de giração de uma superfície
9.6 Teorema dos eixos paralelos
9.7 Momentos de inércia de superfícies compostas
9.8 Produto de inércia
9.9 Eixos principais e momentos de inércia principais
9.10 Círculo de Mohr para momentos e produtos de inércia
9.11 Momento de inércia de um corpo
9.12 Teorema dos eixos paralelos
9.13 Momentos de inércia de placas delgadas
9.14 Determinação do momento de inércia de um corpo tridimensional por integração
9.15 Momentos de inércia de corpos compostos
9.16 Momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário passando por O e produtos de inércia de corpos
9.17 Elipsoide de inércia e eixos principais de inércia
9.18 Determinação dos eixos principais e dos momentos principais de inércia de um corpo de formato arbitrário

9.1 Introdução

No Cap. 5, analisamos diversos sistemas de forças distribuídas ao longo de uma superfície ou de um sólido. Os três tipos principais de forças considerados foram (1) pesos de placas homogêneas de espessura uniforme (Seções 5.3 a 5.6), (2) cargas distribuídas sobre vigas (Seção 5.8) e forças hidrostáticas (Seção 5.9) e (3) pesos de corpos tridimensionais homogêneos (Seções 5.10 e 5.11). No caso de placas homogêneas, a intensidade ΔW do peso de um elemento de placa era proporcional à área ΔA do elemento. Para cargas distribuídas sobre vigas, a intensidade ΔW de cada peso elementar era representada por um elemento de área $\Delta A = \Delta W$ sob a curva de carga; no caso de forças hidrostáticas sobre superfícies submersas retangulares, seguiu-se um procedimento semelhante. No caso de corpos bidimensionais homogêneos, a intensidade ΔW do peso de um elemento do corpo era proporcional ao volume ΔV do elemento. Portanto, em todos os casos considerados no Cap. 5, as forças distribuídas eram proporcionais às áreas ou volumes elementares associados a elas. Logo, a resultante dessas forças poderia ser obtida pela soma das áreas ou volumes correspondentes e o momento da resultante em relação a qualquer eixo dado poderia ser determinado pelo cálculo dos momentos de primeira ordem das superfícies ou sólidos em relação a esse eixo.

Na primeira parte deste capítulo, consideramos forças distribuídas $\Delta\mathbf{F}$ cujas intensidades dependem não só dos elementos de área ΔA sobre as quais essas forças atuam, mas também da distância entre ΔA e algum eixo dado. Mais precisamente, admite-se que a intensidade da força por unidade de área $\Delta F/\Delta A$ varie linearmente com a distância até esse eixo. Conforme indicaremos na próxima seção, encontram-se forças desse tipo no estudo da flexão de vigas e em problemas que envolvem superfícies submersas não-retangulares. Considerando-se que as forças elementares envolvidas são distribuídas sobre uma superfície A e variam linearmente com a distância y ao eixo x, será mostrado que, enquanto a intensidade de sua resultante $\mathbf{R}$ depende do momento de primeira ordem $Q_x = \int y\, dA$ da superfície A, a localização do ponto em que $\mathbf{R}$ está aplicada depende do *momento de segunda ordem, ou momento de inércia*, $I_x = \int y^2\, dA$ da mesma superfície em relação ao eixo x. Aprenderemos a calcular os momentos de inércia de diferentes superfícies em relação aos eixos x e y dados. Ainda na primeira parte deste capítulo, é apresentado o *momento de inércia polar* $J_o = \int r^2\, dA$ de uma superfície, sendo r a distância de um elemento de área dA até o ponto O. Para facilitar os cálculos, será estabelecida uma relação entre o momento de inércia I_x de uma superfície A em relação a um dado eixo x e o momento de inércia $I_{x'}$ da mesma superfície em relação ao eixo x' paralelo centroidal (teorema dos eixos paralelos). Estudaremos também a transformação dos momentos de inércia de uma dada superfície quando os eixos coordenados sofrem rotação (Seções 9.9 e 9.10).

Na segunda parte do capítulo, aprenderemos a determinar os momentos de inércia de vários *corpos* em relação a um eixo dado. Como você verá na Seção 9.11, o momento de inércia de um dado corpo em relação a um eixo AA' é definido como $I = \int r^2\, dm$, sendo r a distância entre o eixo AA' até o elemento de massa dm do corpo. Encontram-se momentos de inércia em problemas de dinâmica que envolvam a rotação de um corpo rígido em em relação a esse eixo. Para facilitar o cálculo dos momentos de inércia de corpos, será apresentado o teorema dos eixos

paralelos (Seção 9.12). Finalmente, aprenderemos a analisar a transformação de momentos de inércia de corpos quando os eixos coordenados sofrem rotação (Seções 9.16 a 9.18).

MOMENTO DE INÉRCIA DE SUPERFÍCIES

9.2 Momento de segunda ordem, ou momento de inércia, de uma superfície

Na primeira parte deste capítulo, consideramos forças distribuídas $\Delta\mathbf{F}$ cujas intensidades ΔF são proporcionais aos elementos de área ΔA sobre as quais essas forças atuam e, ao mesmo tempo, variam linearmente com a distância entre ΔA e um dado eixo.

Consideremos, por exemplo, uma viga de seção transversal uniforme sujeita a dois binários iguais e opostos aplicados em cada extremidade da viga. Dizemos que tal viga está *sob flexão pura* e pela mecânica dos materiais, as forças internas em qualquer seção da viga são forças distribuídas cujas intensidades $\Delta F = ky\Delta A$ variam linearmente com a distância y entre o elemento de área ΔA e um eixo que passa pelo centroide da seção. Esse eixo, representado pelo eixo x na Fig. 9.1, é conhecido como *eixo neutro* da seção. As forças sobre um dos lados da seção dividida pelo eixo neutro são forças de compressão, ao passo que sobre o outro lado são forças de tração; sobre o próprio eixo neutro, as forças são nulas.

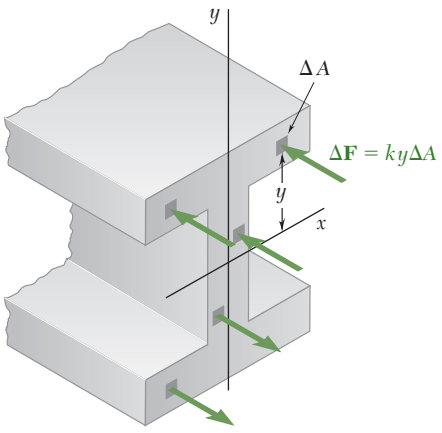


Figura 9.1

A intensidade da resultante $\mathbf{R}$ das forças elementares $\Delta\mathbf{F}$ exercidas sobre toda a seção é:

$$R = \int ky\, dA = k \int y\, dA$$

Reconhecemos a última integral como sendo o *momento de primeira ordem* Q_x da seção em relação ao eixo x; essa integral vale $\bar{y}A$ e, portanto, é igual a zero, pois o centroide da seção localiza-se sobre o eixo x. Logo, sistema de forças $\Delta\mathbf{F}$ reduz-se a um binário. A intensidade M desse binário (momento fletor) deve ser igual à soma dos momentos $\Delta M_x = y\Delta F = ky^2\Delta A$ das forças elementares. Integrando sobre toda a seção, obtemos:

$$M = \int ky^2\, dA = k \int y^2\, dA$$

A última integral é conhecida como o *momento de segunda ordem,* ou *momento de inércia**, da seção da viga em relação ao eixo x, sendo representada por I_x. É obtida multiplicando-se cada elemento de área dA pelo *quadrado de sua distância* do eixo x e integrando-se sobre a seção da viga. Como cada produto y^2dA é positivo, não importando o sinal de y, ou zero (se y for zero), a integral I_x será sempre positiva.

Outro exemplo de um momento de segunda ordem, ou momento de inércia, de uma superfície é fornecido pelo seguinte problema de hidros-

* A expressão *momento de segunda ordem* é mais apropriada que *momento de inércia* pois, é lógico, a última deve ser usada apenas para designar integrais de massa (ver a Seção 9.11). No entanto, no uso de engenharia, a expressão momento de inércia é usada no contexto tanto de áreas como de massas.

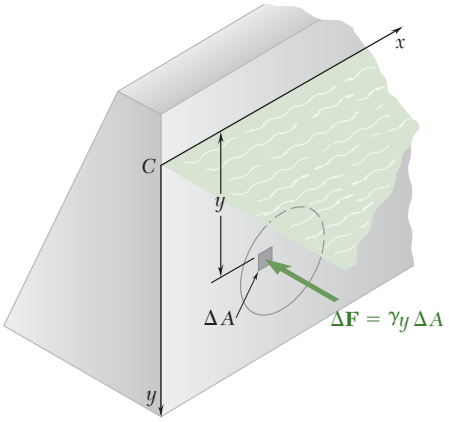


Figura 9.2

tática: uma comporta circular vertical usada para fechar a saída de um grande reservatório está submersa na água como mostrado na Fig. 9.2. Qual é a resultante das forças exercidas pela água sobre a comporta e qual é o momento da resultante em relação à linha de interseção do plano da comporta e da superfície da água (eixo x)?

Se a comporta fosse retangular, a resultante das forças de pressão poderia ser determinada pela curva de pressão, como foi feito na Seção 5.9. Porém, como a comporta é circular, é preciso usar um método mais geral. Representando por y a profundidade de um elemento de área ΔA e por γ o peso específico da água, a pressão em um elemento é $p = \gamma y$ e a intensidade da força elementar exercida sobre ΔA é $\Delta F = p\,\Delta A = \gamma y\,\Delta A$. Logo, a intensidade da resultante das forças elementares é

$$R = \int \gamma y\, dA = \gamma \int y\, dA$$

e pode ser obtida pelo cálculo do momento de primeira ordem $Q_x = \int y\, dA$ da superfície da comporta em relação ao eixo x. O momento M_x da resultante deve ser igual à soma dos momentos $\Delta M_x = y\Delta F = \gamma y^2 \Delta A$ das forças elementares. Integrando sobre a área da comporta, temos:

$$M_x = \int \gamma y^2\, dA = \gamma \int y^2\, dA$$

Novamente aqui a integral obtida representa o momento de segunda ordem, ou momento de inércia, I_x da superfície da comporta em relação ao eixo x.

9.3 Determinação do momento de inércia de uma superfície por integração

Definimos na seção anterior o momento de segunda ordem, ou momento de inércia, de uma superfície A em relação ao eixo x. Definindo de modo semelhante o momento de inércia I_y da superfície A em relação ao eixo y, temos (Fig. 9.3a):

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \tag{9.1}$$

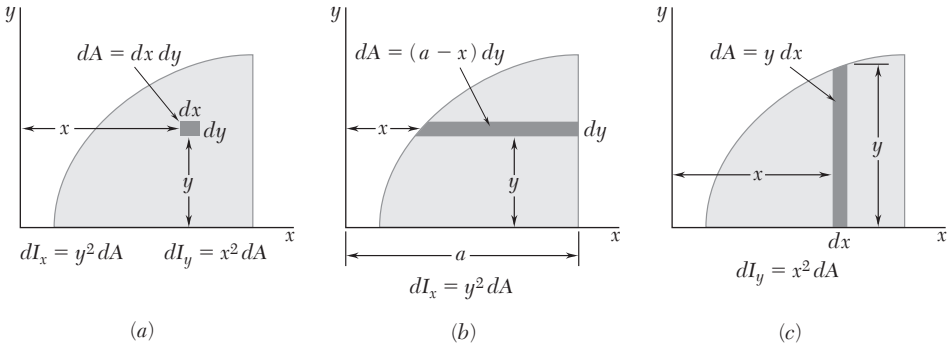


Figura 9.3

Essas integrais, denominadas *momentos de inércia retangulares* da superfície A, podem ser mais facilmente calculadas se escolhermos dA como sendo uma faixa estreita paralela a um dos eixos coordenados. Para calcular I_x, escolhe-se a faixa paralela ao eixo x, de modo que todos os pontos da faixa estão à mesma distância y do eixo x (Fig. 9.3*b*); o momento de inércia dI_x da faixa é, então, obtido multiplicando-se a área dA da faixa por y^2. Para calcular I_y, escolhe-se a faixa paralela ao eixo y de modo que todos os pontos da faixa estão à mesma distância x do eixo y (Fig. 9.3*c*); o momento de inércia dI_y da faixa é $x^2 dA$.

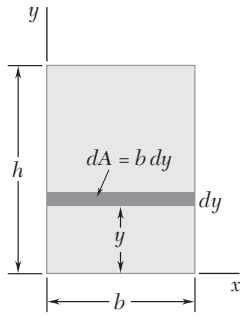


Figura 9.4

Momento de inércia de uma superfície retangular. Como exemplo, vamos determinar o momento de inércia de um retângulo em relação à sua base (Fig. 9.4). Dividindo o retângulo em faixas paralelas ao eixo x, obtemos:

$$dA = b\,dy \qquad dI_x = y^2 b\,dy$$

$$I_x = \int_0^h by^2\,dy = \tfrac{1}{3}bh^3 \tag{9.2}$$

Cálculo de I_x e I_y pelo uso da mesma faixa elementar. A fórmula que acabamos de deduzir pode ser usada para se determinar o momento de inércia dI_x em relação ao eixo x de uma faixa retangular paralela ao eixo y, tal como a faixa mostrada na Fig. 9.3*c*. Estabelecendo $b = dx$ e $h = y$ na fórmula (9.2), temos:

$$dI_x = \tfrac{1}{3}y^3\,dx$$

Por outro lado, temos:

$$dI_y = x^2\,dA = x^2 y\,dx$$

O mesmo elemento pode ser usado para o cálculo dos momentos de inércia I_x e I_y de uma dada superfície (Fig. 9.5).

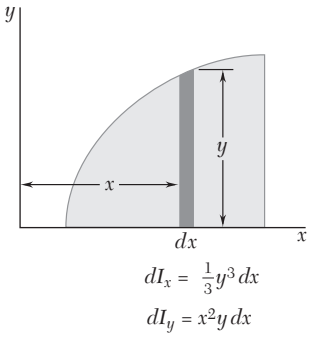


Figura 9.5

9.4 Momento de inércia polar

Uma integral de grande importância em problemas referentes à torção de eixos cilíndricos e em problemas que tratam da rotação de placas é

$$J_O = \int r^2\,dA \tag{9.3}$$

sendo r a distância entre O e o elemento de área dA (Fig. 9.6). Essa integral é o *momento de inércia polar* da superfície A em relação *ao "polo" O*.

O momento de inércia polar de uma dada superfície pode ser calculado a partir dos momentos de inércia retangulares I_x e I_y da superfície se essas grandezas já forem conhecidas. Com efeito, notando que $r^2 = x^2 + y^2$, temos

$$J_O = \int r^2\,dA = \int (x^2 + y^2)\,dA = \int y^2\,dA + \int x^2\,dA$$

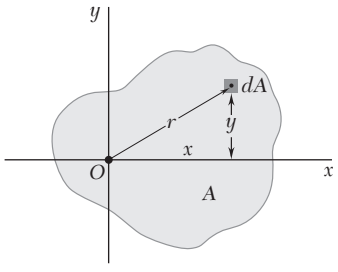


Figura 9.6

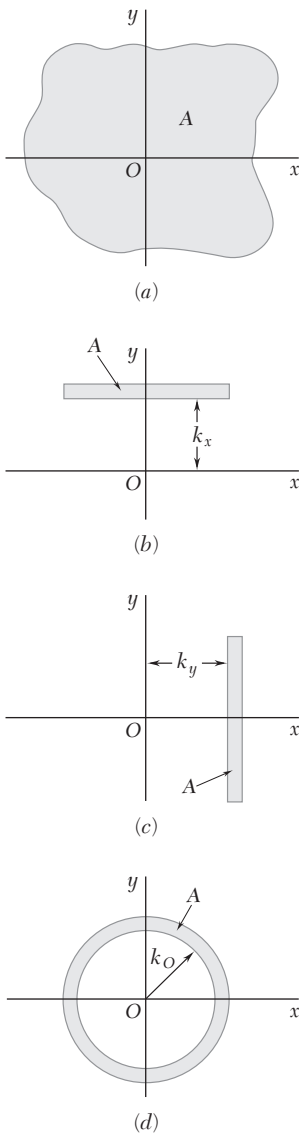


Figura 9.7

ou seja

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

9.5 Raio de giração de uma superfície

Considere uma superfície A com momento de inércia I_x em relação ao eixo x (Fig. 9.7*a*). Vamos supor que concentramos essa superfície em uma faixa estreita paralela ao eixo x (Fig. 9.7*b*). Se a superfície de área A, desse modo, concentrada e tiver o mesmo momento de inércia em relação ao eixo x, a faixa deverá ser colocada a uma distância k_x *do* eixo x, sendo k_x definido pela relação:

$$I_x = k_x^2 A$$

Resolvendo para k_x, temos:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{9.5}$$

A distância k_x é denominada *raio de giração* da superfície em relação ao eixo x. De modo semelhante, podemos definir os raios de giração k_y e k_O (Fig. 9.7*c* e *d*). Assim, temos:

$$I_y = k_y^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{9.6}$$

$$J_O = k_O^2 A \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{9.7}$$

Se reescrevermos a Eq. (9.4) em termos dos raios de giração, concluímos que:

$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2 \tag{9.8}$$

EXEMPLO Para o retângulo mostrado na Fig. 9.8, vamos calcular o raio de giração k_x em relação à sua base. Usando as fórmulas (9.5) e (9.2), temos:

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{1}{3}bh^3}{bh} = \frac{h^2}{3} \qquad k_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

O raio de giração k_x do retângulo é mostrado na Fig. 9.8. Não se deve confundir com a ordenada $\bar{y} = h/2$ do centroide da superfície. Enquanto k_x depende do *momento de segunda ordem,* ou momento de inércia, da superfície, a ordenada $\bar{y}$ está relacionada com o *momento de primeira ordem* da superfície. ■

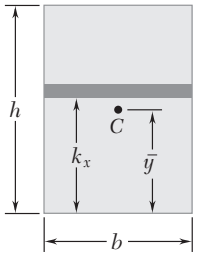
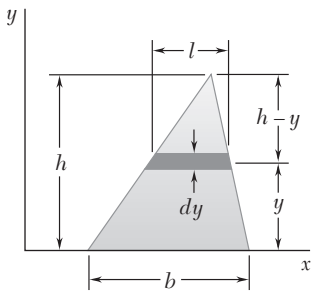


Figura 9.8

PROBLEMA RESOLVIDO 9.1

Determine o momento de inércia de um triângulo em relação à sua base.

SOLUÇÃO



Um triângulo de base b e altura h é desenhado; o eixo x é escolhido de modo a coincidir com a base. Uma faixa diferencial paralela ao eixo x é escolhida com área dA. Como todas as porções da faixa estão à mesma distância do eixo x, temos:

$$dI_x = y^2\,dA \qquad dA = l\,dy$$

Usando triângulos semelhantes, temos:

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad l = b\frac{h-y}{h} \qquad dA = b\frac{h-y}{h}dy$$

Integrando dI_x de $y = 0$ até $y = h$, obtemos:

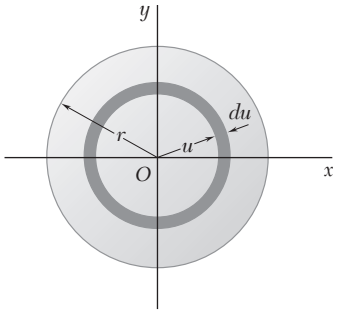
$$I_x = \int y^2\,dA = \int_0^h y^2 b\frac{h-y}{h}dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy^2 - y^3)\,dy =$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h \qquad I_x = \frac{bh^3}{12} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 9.2

(*a*) Determine o momento de inércia polar centroidal de uma superfície circular por integração direta. (*b*) Usando o resultado do item *a*, determine o momento de inércia de uma superfície circular em relação a um diâmetro.

SOLUÇÃO



a. Momento de inércia polar. Escolhemos um elemento diferencial de superfície anelar para ser dA. Como todas as porções da superfície diferencial estão à mesma distância da origem, temos:

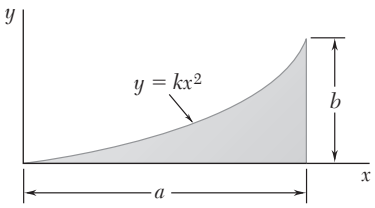
$$dJ_O = u^2\,dA \qquad dA = 2\pi u\,du$$

$$J_O = \int dJ_O = \int_0^r u^2(2\pi u\,du) = 2\pi\int_0^r u^3\,du$$

$$J_O = \frac{\pi}{2}r^4 \blacktriangleleft$$

b. Momento de inércia em relação a um diâmetro. Devido à simetria da superfície circular, temos $I_x = I_y$. Logo, temos:

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \qquad \frac{\pi}{2}r^4 = 2I_x \qquad I_{\text{diâmetro}} = I_x = \frac{\pi}{4}r^4 \blacktriangleleft$$



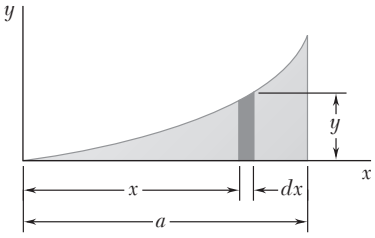
PROBLEMA RESOLVIDO 9.3

(*a*) Determine o momento de inércia da superfície sombreada em relação a cada um dos eixos coordenados. (As propriedades dessa superfície foram consideradas no Problema Resolvido 5.4.) (*b*) Usando os resultados do item *a*, determine o raio de giração da superfície sombreada em relação a cada um dos eixos coordenados.

SOLUÇÃO

Voltando ao Problema Resolvido 5.4, obtemos as seguintes expressões para a equação da curva e para a área total:

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \qquad A = \tfrac{1}{3}ab$$



Momento de inércia I_x. Um elemento diferencial vertical de área é escolhido como dA. Como todas as porções desse elemento *não* estão à mesma distância do eixo x, devemos tratar o elemento como um retângulo fino. O momento de inércia do elemento em relação ao eixo x é, então:

$$dI_x = \tfrac{1}{3}y^3\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^3 dx = \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}x^6\,dx$$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^a \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}x^6\,dx = \left[\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}\frac{x^7}{7}\right]_0^a$$

$$I_x = \frac{ab^3}{21} \blacktriangleleft$$

Momento de inércia I_y. É usado o mesmo elemento diferencial vertical de área. Como todas as porções do elemento estão à mesma distância do eixo y, temos:

$$dI_y = x^2\,dA = x^2(y\,dx) = x^2\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \frac{b}{a^2}x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^4\,dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^5}{5}\right]_0^a$$

$$I_y = \frac{a^3b}{5} \blacktriangleleft$$

Raios de giração k_x e k_y. Por definições, temos

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{ab^3/21}{ab/3} = \frac{b^2}{7} \qquad k_x = \sqrt{\tfrac{1}{7}}b \blacktriangleleft$$

e

$$k_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{a^3b/5}{ab/3} = \tfrac{3}{5}a^2 \qquad k_y = \sqrt{\tfrac{3}{5}}a \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O propósito desta seção foi apresentar os *momentos de inércia retangulares e polares de superfícies* e os correspondentes *raios de giração.* Embora os problemas que estamos para resolver possam parecer mais apropriados para uma aula de cálculo que de mecânica, esperamos que nossos comentários introdutórios sejam convincentes da relevância dos momentos de inércia para o estudo de uma variedade de tópicos de engenharia.

1. Cálculo dos momentos de inércia retangulares I_x e I_y Definimos essas grandezas como

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \tag{9.1}$$

sendo dA um elemento diferencial de superfície de área $dx\, dy$. Os momentos de inércia são *os momentos de segunda ordem da superfície;* é por essa razão que I_x, por exemplo, depende da distância perpendicular y da superfície dA. Ao estudar a Seção 9.3, devemos reconhecer a importância de se definirem cuidadosamente a forma e a orientação de dA. Além disso, devemos nos atentar para os seguintes pontos:

a. Os momentos de inércia da maioria das superfícies podem ser obtidos por meio de uma integração simples. As expressões fornecidas nas Figs. 9.3*b* e *c* e na Fig. 9.5 podem ser usadas para o cálculo de I_x e I_y. Não importa se estamos usando uma integração simples ou dupla, certifiquemo-nos de mostrar em seu esboço o elemento de superfície dA foi escolhida.

b. O momento de inércia de uma superfície é sempre positivo, não importa a localização da superfície em relação aos eixos de coordenadas. Isto porque o momento é obtido por integração do produto entre dA e o *quadrado* de uma distância. (Observe como isso é diferente dos resultados para o momento de primeira ordem de uma superfície.) Apenas quando uma superfície é *removida* (como no caso de um buraco), o momento de inércia entrará com sinal negativo em seus cálculos.

c. Como verificação parcial de seu trabalho, observemos que os momentos de inércia são iguais ao produto entre uma área e o quadrado de um comprimento. Logo, todos os termos em uma expressão para um momento de inércia devem ter *dimensão de comprimento elevado à quarta potência.*

2. Cálculo do momento de inércia polar J_O. Definimos J_O como

$$J_O = \int r^2\, dA \tag{9.3}$$

sendo $r^2 = x^2 + y^2$. Se a superfície dada tem simetria circular (como no Problema Resolvido 9.2), é possível exprimir dA em termos de r e calcular J_O com uma integração simples. Quando a superfície não tem simetria circular, geralmente é mais fácil calcular primeiro I_x e I_y e determinar J_O em seguida a partir de

$$J_o = I_x + I_y \tag{9.4}$$

Finalmente, se a equação da curva que limita a superfície dada for expressa em coordenadas polares, então $dA = r\, dr\, d\theta$, sendo necessária uma integração dupla no cálculo da integral para J_O [ver o Problema 9.27].

3. Determinação dos raios de giração k_x e k_y e o raio de giração polar k_O. Essas grandezas foram definidas na Seção 9.5 e devemos imaginar que elas só poderão ser determinadas depois que a área e os momentos de inércia apropriados tenham sido calculados. É importante lembrar que k_x é medido na direção y, enquanto k_y é medido na direção x; é preciso estudar cuidadosamente a Seção 9.5 até entendermos essa questão.

PROBLEMAS

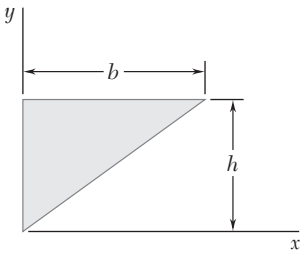


Figura P9.1 e *P9.5*

9.1 a 9.4 Determine por integração direta o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo *y*.

9.5 a 9.8 Determine por integração direta o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo *x*.

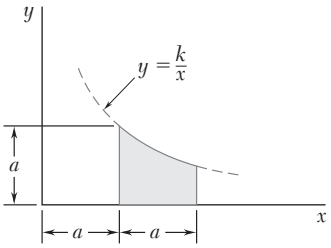


Figura P9.2 e P9.6

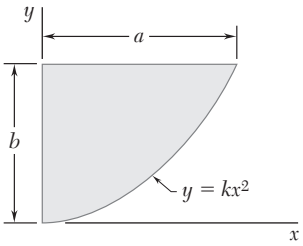


Figura P9.3 e P9.7

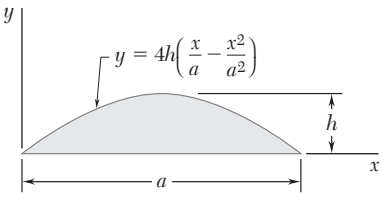


Figura P9.4 e *P9.8*

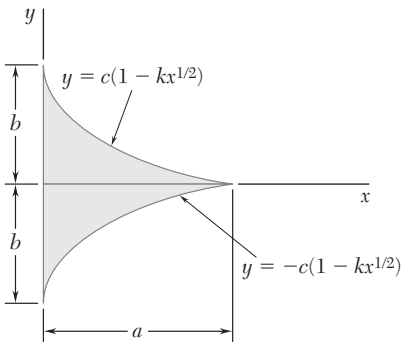


Figura P9.9 e P9.12

9.9 a 9.11 Determine por integração direta o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo *x*.

9.12 a 9.14 Determine por integração direta o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo *y*.

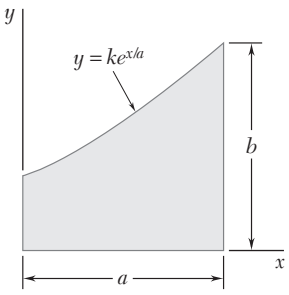


Figura P9.10 e *P9.13*

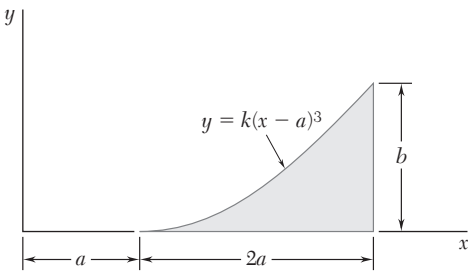


Figura P9.11 e *P9.14*

9.15 e 9.16 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada mostrada na figura em relação ao eixo *x*.

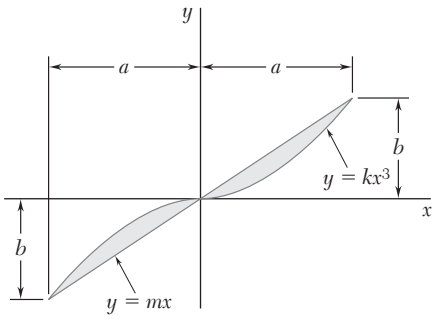


Figura P9.15 e P9.17

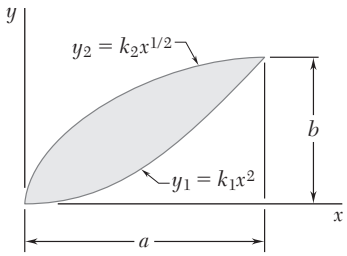


Figura P9.16 e P9.18

9.17 e 9.18 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada mostrada na figura em relação ao eixo *y*.

9.19 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada mostrada na figura em relação ao eixo *x*.

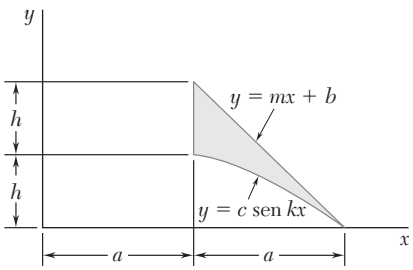


Figura *P9.19* e *P9.20*

9.20 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada mostrada na figura em relação ao eixo *y*.

9.21 e 9.22 Determine o momento de inércia polar e o raio de giração polar da superfície sombreada mostrada na figura em relação ao ponto *P*.

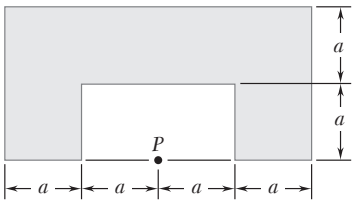


Figura P9.21

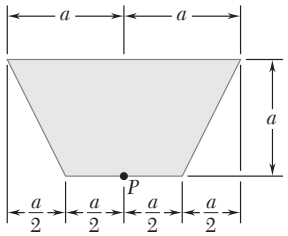


Figura P9.22

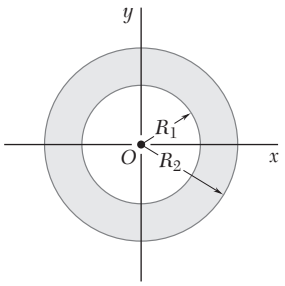


Figura P9.23 e P9.24

9.23 (*a*) Determine por integração direta o momento de inércia polar da superfície mostrada na figura em relação ao ponto *O*. (*b*) Usando o resultado do item *a*, determine os momentos de inércia da área dada em relação ao eixo *x*.

9.24 (*a*) Mostre que o raio de giração polar k_O da superfície anelar mostrada na figura é aproximadamente igual ao raio médio $R_m = (R_1 + R_2)/2$ para pequenos valores da espessura $t = R_2 - R_1$. (*b*) Determine o erro percentual cometido ao se usar R_m no lugar de k_O para os seguintes valores de t/R_m: 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{10}$.

9.25 e 9.26 Determine o momento de inércia polar e o raio de giração polar da superfície sombreada mostrada na figura em relação ao ponto *P*.

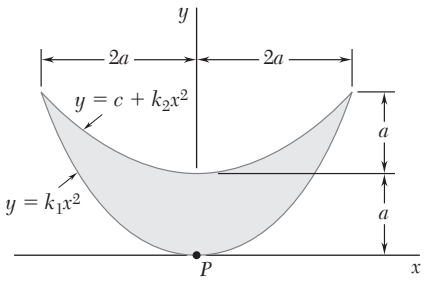


Figura P9.25

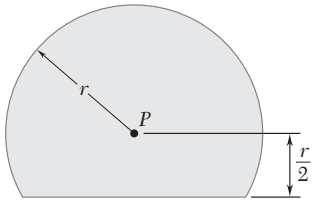


Figura P9.26

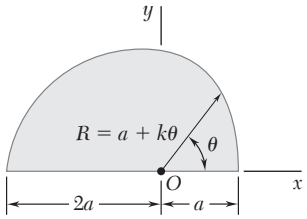


Figura P9.27

9.27 Determine o momento de inércia polar e o raio de giração polar da superfície sombreada mostrada na figura em relação ao ponto *O*.

9.28 Determine o momento de inércia polar e o raio de giração do triângulo isósceles mostrado na figura em relação ao ponto *O*.

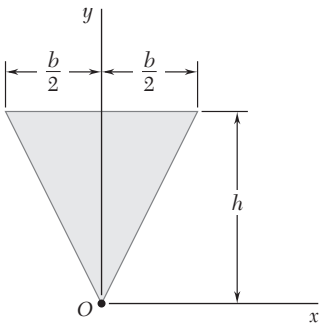


Figura P9.28

***9.29** Usando o momento de inércia polar do triângulo isósceles do Problema 9.28, mostre que o momento de inércia polar centroidal de uma superfície circular de raio *r* é $\pi r^4/2$. (*Dica:* À medida que a superfície circular for dividida em um número crescente de setores circulares iguais, qual será a forma aproximada de cada setor circular?).

***9.30** Demonstre que o momento de inércia polar centroidal de uma dada superfície de área *A* não pode ser menor que $A^2/2\pi$. (*Dica:* Compare o momento de inércia da superfície dada com o momento de inércia de um círculo com a mesma área e o mesmo centroide).

9.6 Teorema dos eixos paralelos

Considere o momento de inércia I de uma superfície A em relação a um eixo AA' (Fig. 9.9). Representado por y a distância entre um elemento de superfície de área dA e AA', temos:

$$I = \int y^2\, dA$$

Vamos traçar agora um eixo BB' paralelo a AA' passando pelo centroide C; esse eixo é denominado *eixo centroidal.* Representado por y' a

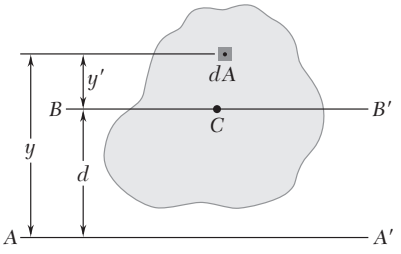


Figura 9.9

distância entre o elemento dA e BB', temos $y = y' + d$, sendo d a distância entre os eixos AA' e BB'. Substituindo por y na integral anterior, temos:

$$I = \int y^2\, dA = \int (y' + d)^2\, dA$$
$$= \int y'^2\, dA + 2d \int y'\, dA + d^2 \int dA$$

A primeira integral representa o momento de inércia I da superfície em relação ao eixo centroidal BB'. A segunda integral representa o momento de primeira ordem da superfície em relação a BB'; como o centroide C da superfície está localizado sobre esse eixo, a segunda integral deve ser nula. Finalmente, observamos que a última integral é igual à área total A da superfície. Logo, temos:

$$I = \bar{I} + Ad^2 \tag{9.9}$$

Essa fórmula expressa que o momento de inércia I de uma superfície em relação a um dado eixo AA' é igual ao momento de inércia $\bar{I}$ da superfície em relação ao eixo centroidal BB' paralelo a AA' *mais* o produto da área A da superfície e do quadrado da distância d entre os dois eixos. Esse teorema é conhecido como *teorema dos eixos paralelos.* Substituindo I por k^2A e $\bar{I}$ por $\bar{k}^2A$, o teorema também pode ser expresso como

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{9.10}$$

Um teorema semelhante pode ser enunciado para relacionar o momento de inércia polar J_O de uma superfície em relação ao ponto O ao momento de inércia polar $\bar{J}_C$ da mesma superfície em relação ao seu centroide C. Representado por d a distância entre O e C, temos

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \qquad \text{ou} \qquad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2 \tag{9.11}$$

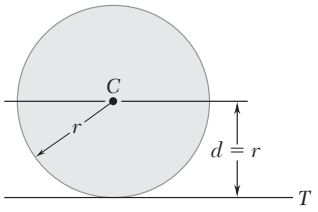


Figura 9.10

EXEMPLO 1 Como aplicação do teorema dos eixos paralelos, vamos determinar o momento de inércia I_T de uma superfície circular em relação a uma linha tangente ao círculo (Fig. 9.10). No Problema Resolvido 9.2, concluímos que o momento de inércia de uma superfície circular em relação a um eixo centroidal é $I = \frac{1}{4}\pi r^4$. Logo, podemos escrever que:

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{4}\pi r^4 + (\pi r^2)r^2 = \tfrac{5}{4}\pi r^4$$

EXEMPLO 2 O teorema dos eixos paralelos também pode ser aplicado na determinação do momento de inércia centroidal de uma superfície quando se conhece o momento de inércia da superfície em relação a um eixo paralelo. Por exemplo, considere uma superfície triangular (Fig. 9.11). No Problema Resolvido 9.1, concluímos que o momento de inércia de um triângulo em relação à sua base AA' é igual a $\frac{1}{2}bh^3$. Usando o teorema dos eixos paralelos, temos:

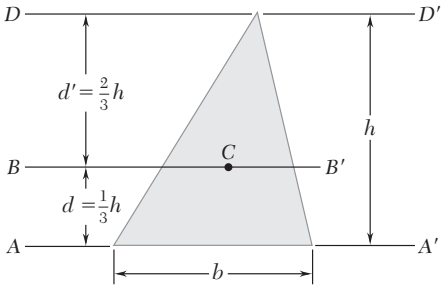


Figura 9.11

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$
$$\bar{I}_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \tfrac{1}{12}bh^3 - \tfrac{1}{2}bh(\tfrac{1}{3}h)^2 = \tfrac{1}{36}bh^3$$

Deve-se observar que o produto Ad^2 foi *subtraído* do momento de inércia dado a fim de se obter o momento de inércia centroidal do triângulo. Observe que esse produto é *adicionado* ao se transferir *de* um eixo centroidal para um eixo paralelo, mas deve ser *subtraído* ao se transferir *para* um eixo centroidal. Em outras palavras, o momento de inércia de uma superfície é sempre menor em relação a um eixo centroidal que em relação a qualquer outro eixo paralelo.

Retornando à Fig. 9.11, observamos que o momento de inércia de um triângulo em relação à linha DD' (passando pelo vértice) pode ser obtido da seguinte maneira:

$$I_{DD'} = \bar{I}_{BB'} + Ad'^2 = \tfrac{1}{36}bh^3 + \tfrac{1}{2}bh(\tfrac{2}{3}h)^2 = \tfrac{1}{4}bh^3$$

Observe que $I_{DD'}$ não poderia ter sido obtido diretamente de $I_{AA'}$. O teorema dos eixos paralelos só pode ser aplicado se um dos eixos paralelos passar pelo centroide da superfície. ■

Foto 9.1 A Figura 9.13 fornece dados para uma pequena amostra de perfis laminados prontamente disponíveis. São mostrados nesta foto dois exemplos de perfis de aba larga (perfis I) comumente utilizados na construção de edifício.

9.7 Momentos de inércia de superfícies compostas

Considere uma superfície A constituída por diversas superfícies componentes $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Como a integral que representa o momento de inércia de A pode ser subdividida nas integrais calculadas sobre $A_1, A_2, A_3, \ldots$, o momento de inércia de A em relação a um dado eixo é obtido pela adição dos momentos de inércia das superfícies $A_1, A_2, A_3, \ldots$, em relação ao mesmo eixo. O momento de inércia de uma superfície que consiste em vários dos formatos mostrados na Fig. 9.12 pode então ser obtido pelo uso das fórmulas dadas nessa figura. Todavia, antes de se adicionarem os momentos de inércia das superfícies componentes, talvez tenha que se aplicar o teorema dos eixos paralelos para se transferir cada momento de inércia para o eixo desejado. Isto é mostrado nos Problemas Resolvidos 9.4 e 9.5.

As propriedades das seções transversais de diversos formatos estruturais são dadas na Fig. 9.13. Conforme observamos na Seção 9.2, o momento de inércia de uma seção de viga em relação ao seu eixo neutro é fortemente relacionado ao cálculo do momento fletor nessa seção da viga. Logo, a determinação de momentos de inércia é um pré-requisito para a análise e o projeto de elementos estruturais.

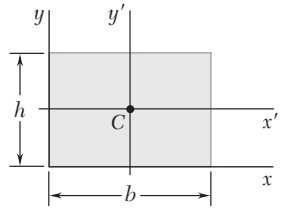
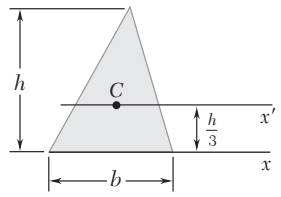
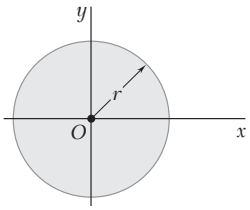
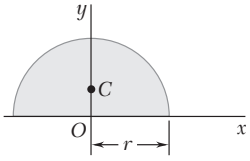
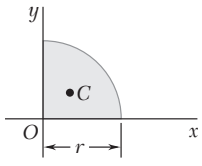
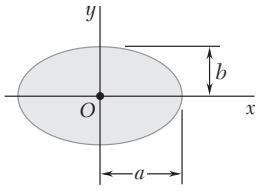
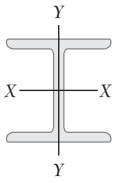
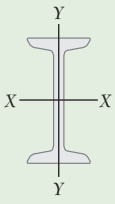
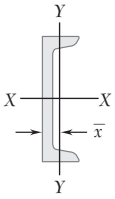
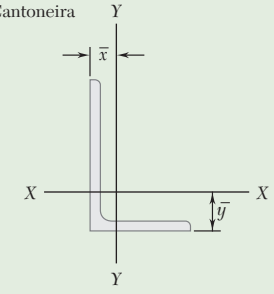
Retângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} b^3h$ $I_x = \frac{1}{3} bh^3$ $I_y = \frac{1}{3} b^3h$ $J_C = \frac{1}{12} bh(b^2 + h^2)$
Triângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36} bh^3$ $I_x = \frac{1}{12} bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2} \pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4} \pi r^4$
Quarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8} \pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4} \pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4} \pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4} \pi ab(a^2 + b^2)$

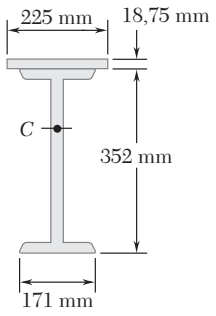
Figura 9.12 Momentos de inércia de formatos geométricos simples.

Deve-se observar que o raio de giração de uma superfície composta *não é* igual à soma dos raios de giração das superfícies componentes. Para se determinar o raio de giração de uma superfície composta, é preciso primeiro calcular o momento de inércia da superfície.

		Designação	Área mm^2	Altura mm	Largura mm	Eixo X-X $\bar{I}_x$ $10^6\ mm^4$	$\bar{k}_x$ mm	$\bar{y}$ mm	Eixo Y-Y $\bar{I}_y$ $10^6\ mm^4$	$\bar{k}_y$ mm	$\bar{x}$ mm
Perfil I		W460 × 113[1]	14.400	462	279	554	196		63,3	66,3	
		W410 × 85	10.800	417	181	316	171		17,9	40,6	
		W360 × 57,8	7.230	358	172	160	149		11,1	39,4	
		W200 × 46,1	5.880	203	203	45,8	88,1		15,4	51,3	
Perfil duplo T		S460 × 81,4[1]	10.300	457	152	333	180		8,62	29,0	
		S310 × 47,3	6.010	305	127	90,3	123		3,88	25,4	
		S250 × 37,8	4.810	254	118	51,2	103		2,80	24,1	
		S150 × 18,6	2.360	152	84,6	9,16	62,2		0,749	17,8	
Perfil C		C310 × 30,8[1]	3.920	305	74,7	53,7	117		1,61	20,2	17,7
		C250 × 22,8	2.890	254	66,0	28,0	98,3		0,945	18,1	16,1
		C200 × 17,1	2.170	203	57,4	13,5	79,0		0,545	15,8	14,5
		C150 × 12,2	1.540	152	48,8	5,45	59,4		0,286	13,6	13,0
Cantoneira		L152 × 152 × 25,4[2]	7100			14,7	45,5	47,2	14,7	45,5	47,2
		L102 × 102 × 12,7	2420			2,30	30,7	30,0	2,30	30,7	30,0
		L76 × 76 × 6,4	929			0,512	23,5	21,2	0,512	23,5	21,2
		L152 × 102 × 12,7	3060			7,20	48,5	50,3	2,59	29,0	24,9
		L127 × 76 × 12,7	2420			3,93	40,1	44,2	1,06	20,9	18,9
		L76 × 51 × 6,4	768			0,454	24,2	24,9	0,162	14,5	12,4

[1] Altura nominal em milímetros e massa em quilogramas por metro.
[2] Altura, largura e espessura em milímetros.

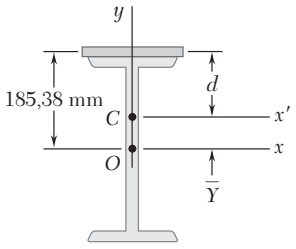
Figura 9.13 Propriedades de perfis laminados (Unidades do SI).



PROBLEMA RESOLVIDO 9.4

A resistência de uma viga em perfil I 360 × 44 é aumentada ao se anexar uma placa de 225 × 18,75 mm à sua aba superior, como mostrado na figura. Determine o momento de inércia e o raio de giração da seção composta em relação a um eixo paralelo à placa passando pelo centroide C da seção.

SOLUÇÃO



A origem O das coordenadas é localizada no centroide de perfil I, e a distância $\bar{Y}$ do centroide de seção composta é calculada pelos métodos do Cap. 5. A área do perfil I é encontrada na Fig. 9.13. A área e a coordenada y do centroide da placa são:

$$A = (225 \text{ mm})(18{,}75 \text{ mm}) = 4.218{,}75 \text{ mm}^2$$
$$\bar{y} = \tfrac{1}{2}(352 \text{ mm}) + \tfrac{1}{2}(18{,}75 \text{ mm}) = 185{,}375 \text{ mm}$$

Seção	Área, mm²	$\bar{y}$, mm	$\bar{y}A$, mm³
Placa	4.218,75	185,38	782.072
Perfil I	5.730	0	0
	$\Sigma A = 9.948{,}75$		$\Sigma \bar{y}A = 782.072$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A \qquad \bar{Y}(9.948{,}75) = 782.072 \qquad \bar{Y} = 78{,}61 \text{ mm}$$

Momento de inércia. O teorema dos eixos paralelos é aplicado na determinação dos momentos de inércia do perfil I e da placa em relação ao eixo x'. Esse eixo é centroidal para a seção composta mas *não* para cada um dos elementos considerados separadamente. O valor de $\bar{I}_x$ para o perfil I é obtido na Fig. 9.13.

Para o perfil I:

$$I_{x'} = \bar{I}_x + A\bar{Y}^2 = 122 \times 10^6 + (5.730)(78{,}61)^2 = 157{,}41 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Para a placa:

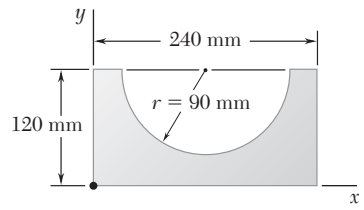
$$I_{x'} = \bar{I}_x + Ad^2 = (\tfrac{1}{12})(225)(18{,}75)^3 + (4.218{,}75)(185{,}38 - 78{,}61)^2 = 48{,}11 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Para a seção composta:

$$I_{x'} = 157{,}41 \times 10^6 + 48{,}11 \times 10^6 = 205{,}52 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$I_{x'} = 205{,}52 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

Raio de giração. Temos:

$$k_{x'}^2 = \frac{I_{x'}}{A} = \frac{205{,}52 \times 10^6 \text{ mm}^4}{9.948{,}75 \text{ mm}^2} \qquad k_{x'} = 143{,}73 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

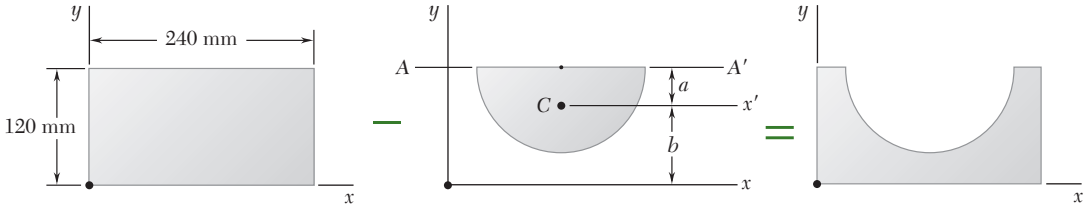


PROBLEMA RESOLVIDO 9.5

Determine o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo x.

SOLUÇÃO

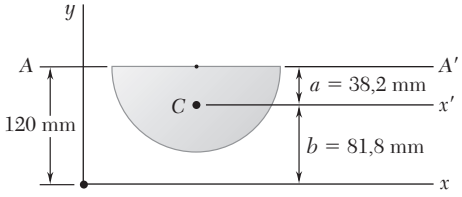
A superfície dada pode ser obtida subtraindo-se um semicírculo de um retângulo. Os momentos de inércia do retângulo e do semicírculo serão calculados separadamente.



Momento de inércia do retângulo. Voltando à Fig. 9.12, obtemos

$$I_x = \tfrac{1}{3}bh^3 = \tfrac{1}{3}(240\text{ mm})(120\text{ mm})^3 = 138{,}2 \times 10^6\text{ mm}^4$$

Momento de inércia do semicírculo. Voltando à Fig. 5.8, determinamos a localização do centroide C do semicírculo em relação ao diâmetro AA'.



$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90\text{ mm})}{3\pi} = 38{,}2\text{ mm}$$

A distância b do centroide C ao eixo x é:

$$b = 120\text{ mm} - a = 120\text{ mm} - 38{,}2\text{ mm} = 81{,}8\text{ mm}$$

Voltando agora para à Fig. 9.12, calculamos o momento de inércia do semicírculo em relação ao diâmetro AA' e calculamos também a área do semicírculo.

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{8}\pi r^4 = \tfrac{1}{8}\pi(90\text{ mm})^4 = 25{,}76 \times 10^6\text{ mm}^4$$
$$A = \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\pi(90\text{ mm})^2 = 12{,}72 \times 10^3\text{ mm}^2$$

Usando o teorema dos eixos paralelos, obtemos o valor $\bar{I}_{x'}$:

$$I_{AA'} = \bar{I}_{x'} + Aa^2$$
$$25{,}76 \times 10^6\text{ mm}^4 = \bar{I}_{x'} + (12{,}72 \times 10^3\text{ mm}^2)(38{,}2\text{ mm})^2$$
$$\bar{I}_{x'} = 7{,}20 \times 10^6\text{ mm}^4$$

Aplicando novamente o teorema dos eixos paralelos, obtemos o valor de I_x:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7{,}20 \times 10^6\text{ mm}^4 + (12{,}72 \times 10^3\text{ mm}^2)(81{,}8\text{ mm})^2$$
$$= 92{,}3 \times 10^6\text{ mm}^4$$

Momento de inércia da superfície dada. Subtraindo o momento de inércia do semicírculo do momento de inércia do retângulo, obtemos:

$$I_x = 138{,}2 \times 10^6\text{ mm}^4 - 92{,}3 \times 10^6\text{ mm}^4$$
$$I_x = 45{,}9 \times 10^6\text{ mm}^4 \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, apresentamos o *teorema dos eixos paralelos* e exemplificamos como ele pode ser usado para simplificar o cálculo de momentos de inércia retangulares e polares de superfícies compostas. As superfícies que iremos levar em conta nos problemas a seguir consistirão em formatos simples e em perfis laminados. Também usaremos o teorema dos eixos paralelos para localizar o ponto de aplicação (o centro de pressões) da resultante de forças hidrostáticas atuantes sobre uma superfície plana submersa.

1. Aplicando o teorema dos eixos paralelos. Na Seção 9.6, deduzimos o teorema dos eixos paralelos

$$I = \bar{I} + Ad^2 \tag{9.9}$$

que estabelece o momento de inércia I de uma superfície de área A em relação a um dado eixo sendo igual à soma do momento de inércia $\bar{I}$ dessa superfície em relação ao *eixo paralelo centroidal* e do produto Ad^2, em que d é a distância entre os dois eixos. É importante que nos lembremos dos seguintes pontos ao aplicar o teorema dos eixos paralelos:

a. O momento centroidal $\bar{I}$ de inércia de uma superfície de área A pode ser obtido pela subtração do produto Ad^2 do momento de inércia I da superfície em relação a um eixo paralelo. Logo, o momento de inércia $\bar{I}$ é *menor* que o momento de inércia I da mesma superfície em relação a qualquer eixo paralelo.

b. O teorema dos eixos paralelos só pode ser aplicado se um dos dois eixos for um eixo centroidal. Logo, como observamos no Exemplo 2, para calcular o momento de inércia de uma superfície em relação a um *eixo não-centroidal* quando se conhece o momento de inércia da superfície em relação a *outro eixo não-centroidal* paralelo, é preciso *primeiro calcular* o momento de inércia da superfície em relação ao *eixo centroidal paralelo aos dois eixos dados.*

2. Cálculo dos momentos de inércia retangulares e polares de superfícies compostas. Os Problemas Resolvidos 9.4 e 9.5 ilustram os passos que devemos seguir para resolver problemas desse tipo. Assim como em todos os problemas de superfícies compostas, devemos mostrar em seu esboço os formatos simples ou os perfis laminados que constituem os diversos elementos da superfície dada, bem como as distâncias entre os eixos centroidais dos elementos e os eixos em relação aos quais é preciso calcular os momentos de inércia. Além disso, é importante que os seguintes pontos sejam observados:

a. O momento de inércia de uma superfície é sempre positivo, não importa a localização do eixo em relação ao qual ele está sendo calculado. Conforme salientamos nos comentários da seção anterior, apenas quando uma superfície é *removida* (como no caso de um buraco), é que o momento de inércia deverá entrar com um sinal negativo em seus cálculos.

b. Os momentos de inércia de uma semielipse e de um quarto de elipse podem ser determinados dividindo-se o momento de inércia de uma elipse por 2 e 4, respectivamente. Deve-se observar, porém, que os momentos de inércia assim obtidos estão *em relação aos eixos de simetria da elipse.* Para se obterem os momentos de inércia *centroidais* desses formatos, é preciso aplicar o teorema dos eixos paralelos. Note que essa observação também se aplica a um semicírculo e a um quarto de círculo, e que as expressões dadas para esses formatos na Fig. 9.12 *não* se referem a momentos de inércia centroidais.

c. Para calcular o momento de inércia polar de uma superfície composta, podemos usar seja as expressões dadas na Fig. 9.12 para J_O, seja a relação

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

dependendo do formato da superfície dada.

d. Antes de calcular os momentos de inércia centroidais de uma dada superfície, podemos concluir que é necessário primeiro localizar o centroide da superfície usando os métodos do Cap. 5.

3. Localização do ponto de aplicação da resultante de um sistema de forças hidrostáticas. Na Seção 9.2, descobrimos que

$$R = \gamma \int y\, dA = \gamma \bar{y} A$$

$$M_x = \gamma \int y^2\, dA = \gamma I_x$$

sendo $\bar{y}$ a distância entre o eixo x e o centroide da superfície plana submersa. Como **R** é equivalente ao sistema de forças hidrostáticas elementares, segue-se que

$$\Sigma M_x: \qquad y_P R = M_x$$

sendo y_p a profundidade do ponto de aplicação de **R**. Logo:

$$y_P(\gamma \bar{y} A) = \gamma I_x \qquad \text{ou} \qquad y_P = \frac{I_x}{\bar{y} A}$$

Para encerrar, é sugerido que se estude cuidadosamente a notação utilizada na Fig. 9.13 para os perfis laminados, pois é provável que nos depararemos com ela em cursos de engenharia subsequentes.

PROBLEMAS

9.31 e 9.32 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada em relação ao eixo x.

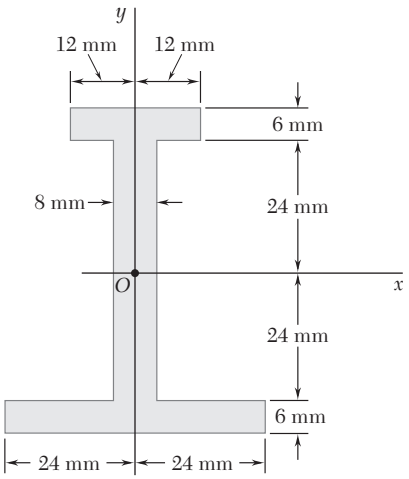


Figura P9.31 e P9.33

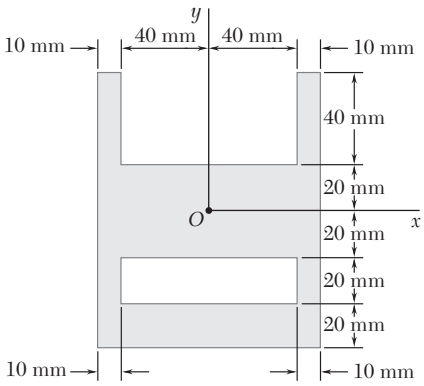


Figura P9.32 e P9.34

9.33 e 9.34 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada em relação ao eixo y.

9.35 e 9.36 Determine os momentos de inércia da superfície sombreada mostrada na figura em relação aos eixos x e y quando $a = 20$ mm.

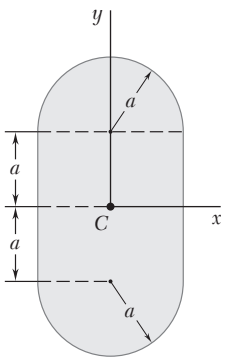


Figura P9.35

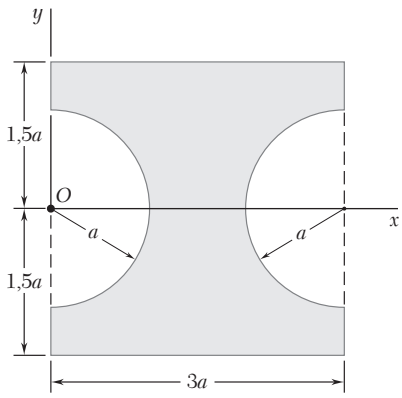


Figura P9.36

9.37 Para a superfície sombreada mostrada na figura, com 4.000 mm^2 de área, determine a distância d_2 e o momento de inércia em relação ao eixo centroidal paralelo a AA', sabendo que os momentos de inércia em relação a AA' e BB' são 12×10^6 mm^4 e $23{,}9 \times 10^6$ mm^4, respectivamente, e que $d_1 = 25$ mm.

9.38 Determine para a superfície sombreada a área e o momento de inércia em relação ao eixo centroidal paralelo a BB', sabendo que $d_1 = 25$ mm e $d_2 = 15$ mm e que os momentos de inércia em relação a AA' e BB' são $7{,}84 \times 10^6$ mm^4 e $5{,}20 \times 10^6$ mm^4, respectivamente.

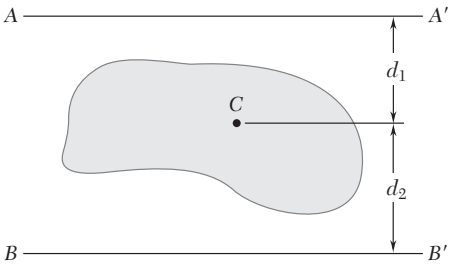


Figura P9.37 e P9.38

9.39 A área sombreada é igual a 31.250 mm^2. Determine os momentos centroidais de inércia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$, sabendo que $\bar{I}_x = 2\bar{I}_y$ e que o momento de inércia da área sobre o ponto A é $J_A = 878 \times 10^6$ mm^4.

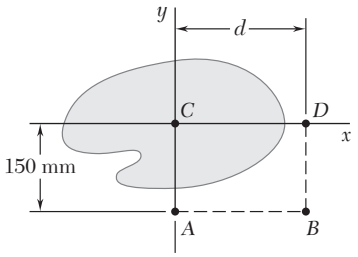


Figura P9.39 e P9.40

9.40 O momento polar de inércia da área sombreada com relação a A, B e D são, respectivamente, $J_A = 1.125 \times 10^6$ mm^4, $J_B = 2.625 \times 10^6$ mm^4, e $J_D = 1.782 \times 10^6$ mm^4. Determine a área sombreada, seu momento de inércia centroidal J_C e a distância d para C e D.

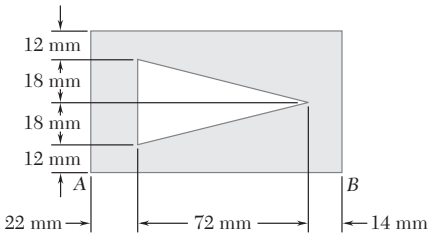


Figura P9.41

9.41 a 9.44 Determine os momentos de inércia I_x e I_y da superfície mostrada na figura em relação aos eixos centroidais paralelo e perpendicular ao lado AB, respectivamente.

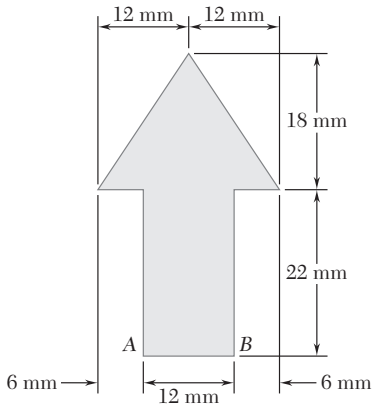


Figura P9.42

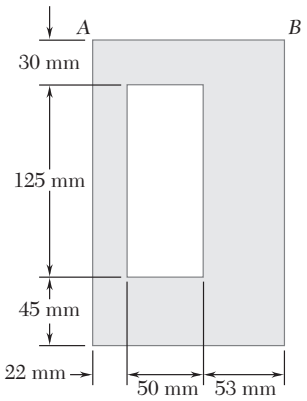


Figura P9.43

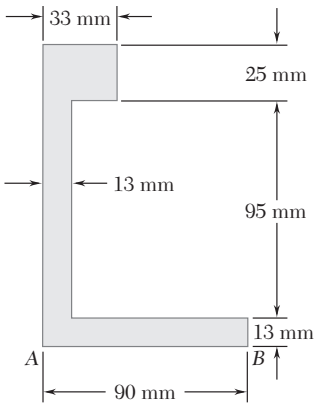


Figura P9.44

9.45 e 9.46 Determine o momento de inércia polar da área mostrada na figura em relação (*a*) ao ponto O, (*b*) ao centroide da superfície.

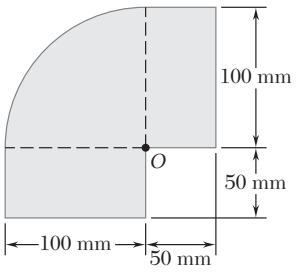


Figura P9.45

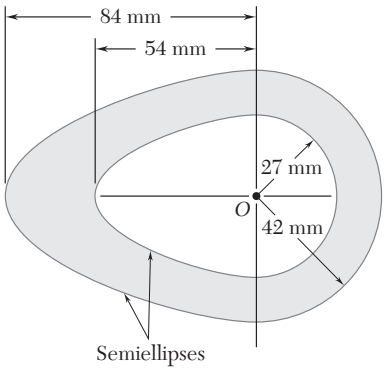


Figura P9.46

9.47 e 9.48 Determine o momento de inércia polar da área mostrada na figura em relação (*a*) ao ponto *O*, (*b*) ao centroide da superfície.

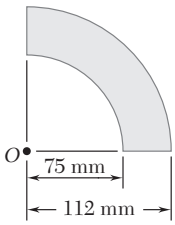


Figura *P9.47*

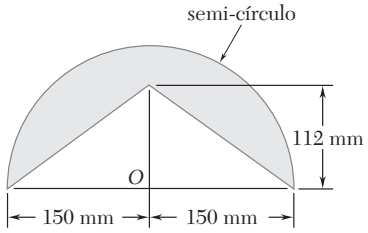


Figura *P9.48*

9.49 Duas chapas de aço de 20 mm são soldadas a um perfil duplo T laminado tal como mostra a figura. Determine os momentos de inércia e os raios de giração da seção em relação aos eixos centroidais *x* e *y*.

9.50 Dois perfis são soldados no perfil I laminado como mostrado na figura. Determine os momentos de inércia e os raios de giração da seção composta em relação aos eixos centroidais dos eixos *x* e *y*.

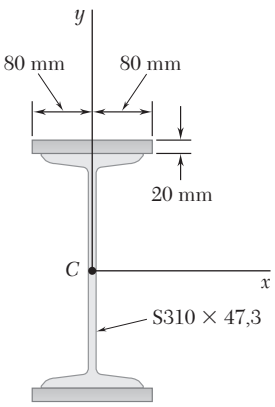


Figura P9.49

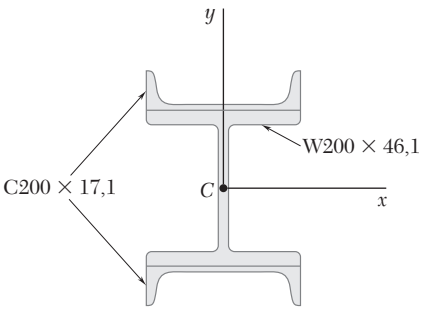


Figura P9.50

9.51 Para formar uma seção estrutural reforçada, dois perfis I laminados são soldados um ao outro. Determine os momentos de inércia e os raios de giração da seção composta em relação aos eixos centroidais mostrados na figura.

9.52 Dois perfis C laminados são soldados a uma placa de aço de $d \times 300$ mm, tal como mostra a figura. Determine a largura *d* para a qual a razão $\bar{I}_x/\bar{I}_y$ entre os momentos de inércia centroidais da seção composta seja 16.

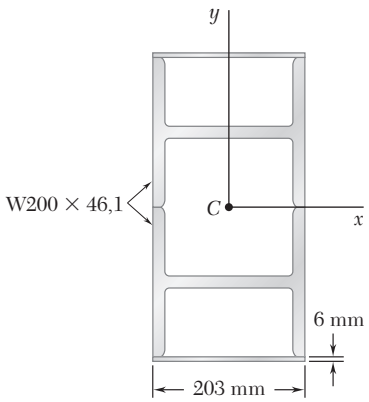


Figura P9.51

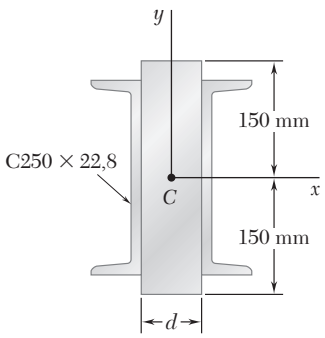


Figura P9.52

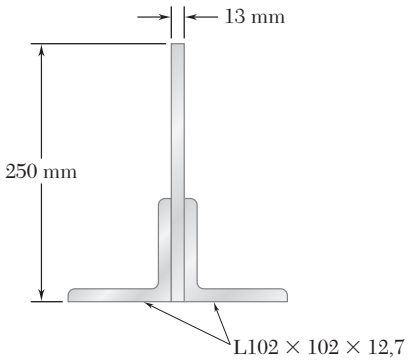


Figura P9.54

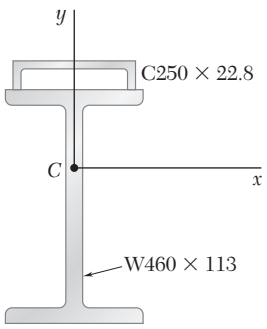


Figura P9.55

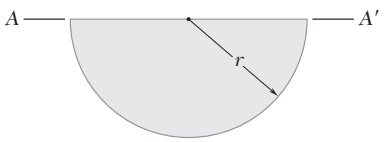


Figura P9.57

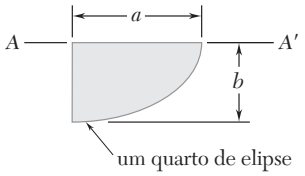


Figura P9.58

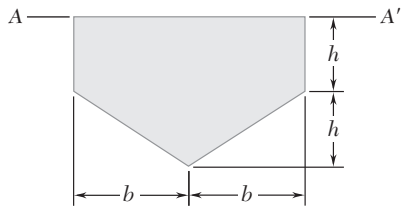


Figura P9.59

9.53 Duas cantoneiras de L76 × 76 × 6,4 mm são soldadas a um perfil C de 250 × 30. Determine os momentos de inércia da seção composta em relação aos eixos centroidais paralelo e perpendicular à junção do perfil C.

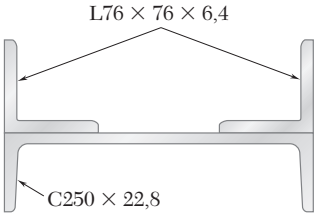


Figura P9.53

9.54 Duas cantoneiras L102 × 102 × 12,7 mm são soldadas a uma placa de aço mostrada na figura. Determine os momentos de inércia da seção composta em relação aos eixos centroidais paralelo e perpendicular à placa.

9.55 A resistência de um perfil I mostrado na figura é aumentada pela soldagem de perfil na aba superior. Determine os momentos de inércia da seção composta em relação aos respectivos eixos centroidais x e y.

9.56 Duas cantoneiras L127 × 76 × 12,7 mm são soldadas a uma placa de aço de 13 mm de espessura. Determine a distância b e os momentos de inércia centroidais $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ da seção composta, sabendo que $\bar{I}_y = 4\,\bar{I}_x$

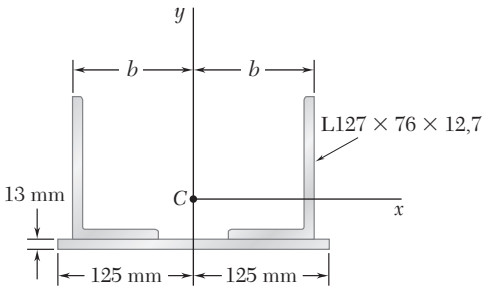


Figura P9.56

9.57 e 9.58 O painel mostrado na figura forma a seção transversal de uma calha que está cheia de água até a linha AA'. Voltando à Seção 9.2, determine a profundidade do ponto de aplicação da resultante das forças hidrostáticas atuantes sobre o painel (o centro de pressões).

9.59 e *9.60 O painel mostrado na figura forma a seção transversal de uma calha que está cheia de água até a linha AA'. Voltando à Seção 9.2, determine a altura do ponto de aplicação da resultante das forças hidrostáticas atuantes sobre o painel (o centro de pressões).

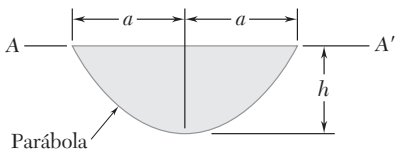


Figura P9.60

9.61 Uma tampa para um ralo de acesso de 0,5 m a um tanque de armazenamento de água é fixado ao tanque por quatro parafusos igualmente espaçados com o mostra a figura. Determine a força adicional em cada parafuso devido a pressão da água quando o centro da tampa é localizado a 1,4 m abaixo da superfície da água.

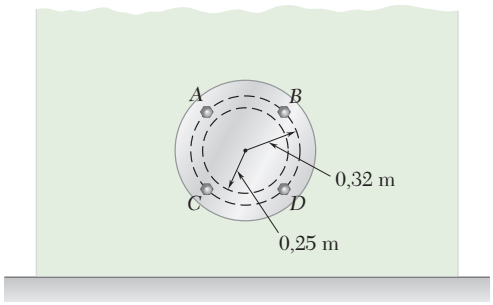


Figura P9.61

9.62 Uma comporta trapezoidal vertical, usada como válvula automática, se mantém fechada por duas molas ligadas a dobradiças localizadas ao longo da aresta *AB*. Sabendo que cada mola exerce um binário de intensidade 1.470 N · m, determine a profundidade *d* da água necessária para que a comporta se abra.

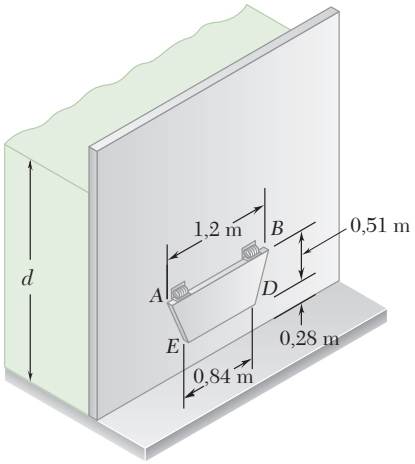


Figura P9.62

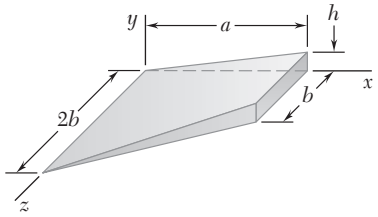


Figura P9.63

***9.63** Determine a coordenada *x* do centroide do sólido mostrado na figura. (*Dica:* a altura *y* do sólido é proporcional à coordenada *x;* faça uma analogia entre essa altura e a pressão da água sobre uma superfície submersa.)

***9.64** Determine a coordenada *x* do centroide do sólido mostrado; esse sólido foi obtido pela interseção de um cilindro elíptico com um plano oblíquo. (Veja a dica do problema 9.63)

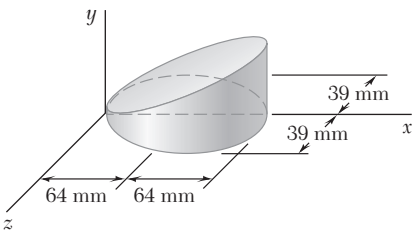


Figura P9.64

***9.65** Mostre que o sistema de forças hidrostáticas atuantes sobre uma superfície plana submersa de área *A* pode ser reduzida a uma força **P** no

centroide C da superfície e dois binários. A força **P** é perpendicular a superfície e sua intensidade é $P = \gamma A\bar{y}$ sen θ, sendo γ o peso específico do líquido e os binários são $\mathbf{M}_{x'} = (\gamma \bar{I}_{x'} \text{ sen } \theta)\mathbf{i}$ e $\mathbf{M}_{y'} = (\gamma \bar{I}_{x'y'} \text{ sen } \theta)\mathbf{j}$, sendo $\bar{I}_{x'y'} = \int_{x'y'} dA$ (ver a Seção 9.8). Observe que os binários independem da profundidade a que a superfície está submersa.

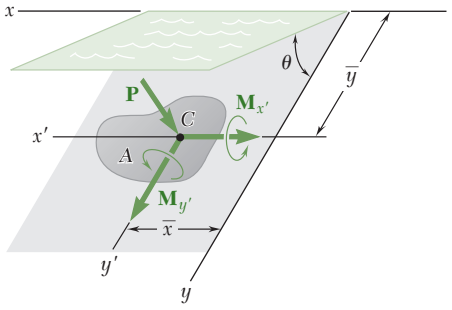


Figura P9.65

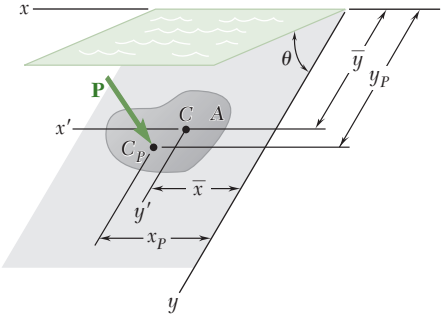


Figura P9.66

***9.66** Mostre que a resultante das forças hidrostáticas exercidas sobre uma superfície plana submersa de área A é uma força **P** perpendicular à superfície cuja a intensidade é $P = \gamma A\bar{y}$ sen $\theta = \bar{p}A$, sendo γ o peso específico do líquido e $\bar{p}$ a pressão no centroide C da superfície. Mostre que **P** é aplicada em um ponto C_P, denominando centro de pressões, cujas coordenadas são $x_P = I_{xy}/A\bar{y}$ e $y_P = I_x/A\bar{y}$, sendo $I_{xy} = \int xy\, dA$ (ver a Seção 9.8). Mostre também que a diferença de ordenadas $y_P - \bar{y}$ é igual a $\bar{k}_{x'}^2/\bar{y}$ e, portanto, depende da profundidade a que a superfície está submersa.

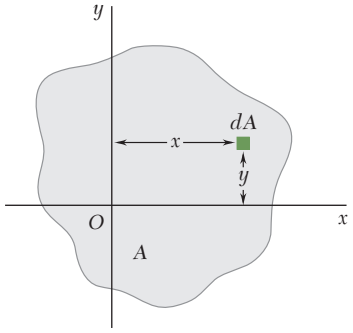


Figura 9.14

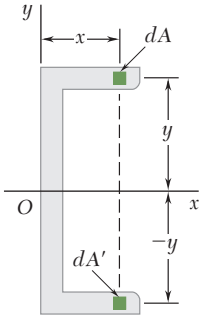


Figura 9.15

*9.8 Produto de inércia

A integral

$$I_{xy} = \int xy\, dA \tag{9.12}$$

obtida pela multiplicação de cada elemento de área dA da superfície A pelas suas coordenadas x e y e por meio da integração sobre a área (Fig. 9.14) é conhecida como *produto de inércia* da superfície A em relação aos eixos x e y. Diferentemente dos momentos de inércia I_x e I_y, o produto de inércia I_{xy} pode ser positivo, negativo ou nulo.

Quando um ou ambos os eixos x e y são eixos de simetria para a superfície A, o produto de inércia I_{xy} é nulo. Considere, por exemplo, o perfil C mostrado na Fig. 9.15. Como essa seção é simétrica em relação ao eixo x, podemos associar a cada elemento dA de coordenadas x e y um elemento dA' de coordenadas x e $-y$. Obviamente, as contribuições para I_{xy} de qualquer par de elementos escolhido desse modo são ignoradas e a integral (9.12) reduz-se a zero.

Um teorema de eixos paralelos semelhante àquele estabelecido na Seção 9.6 para momentos de inércia pode ser deduzido para produtos de inércia. Considere uma superfície A e um sistema de coordenadas retangulares x e y (Fig. 9.16). Passando pelo centroide C da superfície,

de coordenadas x e y, traçamos dois *eixos centroidais* x' e y' paralelos aos eixos x e y, respectivamente. Representados por x e y as coordenadas de um elemento de área dA em relação aos eixos originais e por x' e y' as coordenadas do mesmo elemento em relação aos eixos centroidais, escrevemos $x = x' + \bar{x}$ e $y = y' + \bar{y}$. Substituindo pela Eq. (9.12), obtemos a seguinte expressão para o produto de inércia I_{xy}:

$$I_{xy} = \int xy\, dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y})\, dA$$
$$= \int x'y'\, dA + \bar{y} \int x'\, dA + \bar{x} \int y'\, dA + \bar{x}\bar{y} \int dA$$

A primeira integral representa o produto de inércia $\bar{I}_{x'y'}$ da superfície A em relação aos eixos centroidais x' e y'. As duas integrais seguintes representam momentos de primeira ordem da superfície em relação aos eixos centroidais; elas se reduzem a zero, pois o centroide C localiza-se sobre esses eixos. Finalmente, observamos que a última integral equivale à área total A. Logo, temos:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \tag{9.13}$$

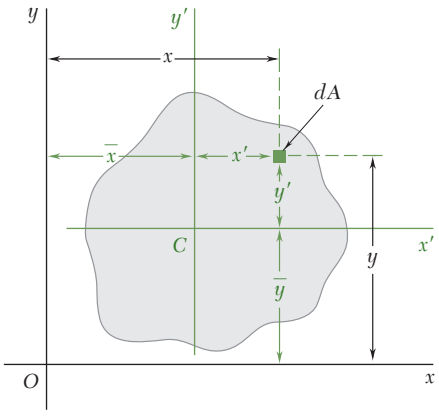


Figura 9.16

*9.9 Eixos principais e momentos de inércia principais

Considere a superfície A e os eixos de coordenadas x e y (Fig. 9.17). Admitindo que os momentos e o produto de inércia

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \qquad I_{xy} = \int xy\, dA \tag{9.14}$$

da superfície A sejam conhecidos, propomos determinar os momentos e o produto de inércia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de A em relação a novos eixos x' e y' obtidos por rotação dos eixos originais de um ângulo θ em torno da origem.

Observemos primeiro as seguintes relações entre as coordenadas x', y' e x, y de um elemento de área dA:

$$x' = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta \qquad y' = y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta$$

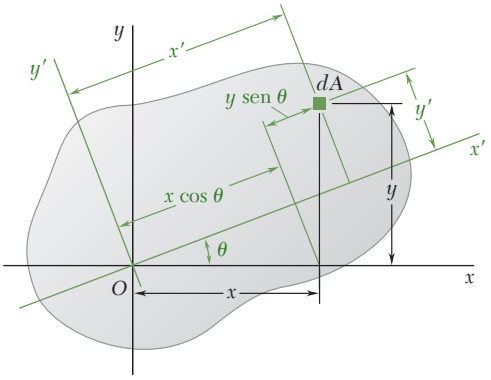


Figura 9.17

Substituindo y' na expressão para $I_{x'}$, temos:

$$I_{x'} = \int (y')^2\, dA = \int (y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta)^2\, dA$$
$$= \cos^2\theta \int y^2\, dA - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \int xy\, dA + \text{sen}^2\theta \int x^2\, dA$$

Usando as relações da Eq. (9.14), temos:

$$I_{x'} = I_x\cos^2\theta - 2I_{xy}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + I_y\,\text{sen}^2\theta \tag{9.15}$$

De modo semelhante, obtemos as expressões para $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$:

$$I_{y'} = I_x\,\text{sen}^2\theta + 2I_{xy}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + I_y\cos^2\theta \tag{9.16}$$

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \tag{9.17}$$

Relembrando as relações trigonométricas

$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$$

e

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \text{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

podemos escrever as Eqs. (9.15), (9.16) e (9.17) da seguinte maneira:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \tag{9.18}$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \tag{9.19}$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \tag{9.20}$$

Adicionando as Eqs. (9.18) e (9.19), verificamos que:

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \tag{9.21}$$

Esse resultado poderia ter sido antecipado, pois ambos os membros de (9.21) são iguais ao momento de inércia polar J_O.

As Eqs. (9.18) e (9.20) são as equações paramétricas de um círculo. Isso significa que, se escolhermos um conjunto de eixos de coordenadas retangulares e esboçarmos um ponto M de abscissa $I_{x'}$ e ordenada $I_{x'y'}$ para qualquer valor dado do parâmetro θ, todos os pontos assim obtidos ficarão sobre um círculo. Para estabelecer essa propriedade, eliminaremos θ das Eqs. (9.18) e (9.20); isso é feito transpondo-se $(I_x + I_y)/2$ na Eq. (9.18), elevando-se ao quadrado os membros das Eqs. (9.18) e (9.20) e somando estes membros. Temos:

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \tag{9.22}$$

Estabelecendo

$$I_{\text{ave}} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad \text{e} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{9.23}$$

e escrevemos a identidade (9.22) da seguinte maneira

$$(I_{x'} - I_{\text{méd.}})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2 \tag{9.24}$$

que é a equação de um círculo de raio R centrado no ponto C cujas coordenadas x e y *são* $I_{méd}$ e 0, respectivamente (Fig. 9.18*a*). Observamos que as Eqs. (9.19) e (9.20) são equações paramétricas do mesmo círculo. Além disso, devido à simetria do círculo em relação ao eixo horizontal, o mesmo resultado seria obtido se, em vez de desenhar M, tivéssemos desenhado um ponto N de coordenadas $I_{y'}$ e $-I_{x'y'}$ (Fig. 9.18*b*). Essa propriedade será usada na Seção 9.10.

Os dois pontos A e B em que o círculo anterior intercepta o eixo horizontal (Fig. 9.18*a*) são de especial interesse: o ponto A corresponde ao valor máximo do momento de inércia $I_{x'}$, enquanto o ponto B corresponde ao seu valor mínimo. Além disso, os pontos correspondem a um valor nulo do produto de inércia $I_{x'y'}$. Logo, é possível obter os valores θ_m do parâmetro θ que correspondem aos pontos A e B estabelecendo-se $I_{x'y'} = 0$ na Eq. (9.20). Obtemos:*

$$\operatorname{tg} 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \tag{9.25}$$

Essa equação define dois valores $2\theta_m$ apartados de 180° e, portanto, dois valores θ_m apartados de 90°. Um desses valores corresponde ao ponto A na Fig. 9.18*a* e a um eixo que passa por O na Fig. 9.17 em relação ao qual o momento de inércia da superfície dada é máximo. O outro valor corresponde ao ponto B e a um eixo que passa por O em relação ao qual o momento de inércia da superfície é mínimo. Os dois eixos assim definidos, perpendiculares entre si, são denominados *eixos principais da superfície em relação a O*, e os valores correspondentes $I_{máx.}$, e $I_{mín}$ do momento de inércia são denominados *momentos de inércia principais da superfície em relação a O.* Como os dois valores θ_m definidos pela Eq. (9.25) foram obtidos estabelecendo-se $I_{x'y'} = 0$ na Eq. (9.20), é evidente que o produto de inércia da superfície dada em relação aos seus eixos principais é nulo.

Pela Fig. 9.18*a*, verificamos que:

$$I_{máx} = I_{méd} + R \qquad I_{mín} = I_{méd} - R \tag{9.26}$$

Usando os valores para $I_{méd.}$ e R das fórmulas (9.23), temos:

$$I_{máx,mín} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{9.27}$$

A menos que seja possível dizer por inspeção qual dos dois eixos principais corresponde a $I_{máx}$ e qual corresponde a $I_{mín}$, será necessário substituir um dos valores de θ_m na Eq. (9.18) a fim de se determinar qual dos dois eixos corresponde ao valor máximo do momento de inércia da superfície em relação a O.

Voltando à Seção 9.8, notamos que, se uma superfície apresenta um eixo de simetria passando por um ponto O, esse eixo deve ser um eixo principal da superfície em relação a O. Por outro lado, um eixo principal não precisa ser um eixo de simetria; independentemente de uma superfície ter ou não algum eixo de simetria, ela sempre terá dois eixos principais de inércia em relação a qualquer ponto O.

As propriedades que acabamos de estabelecer valem para qualquer ponto O situado dentro ou fora da superfície dada. Se for escolhido o ponto O coincidente com o centroide da superfície, qualquer eixo que passe por O será um eixo centroidal; diz-se que os dois eixos principais de uma superfície em relação ao seu centroide são os *eixos centroidais principais da superfície.*

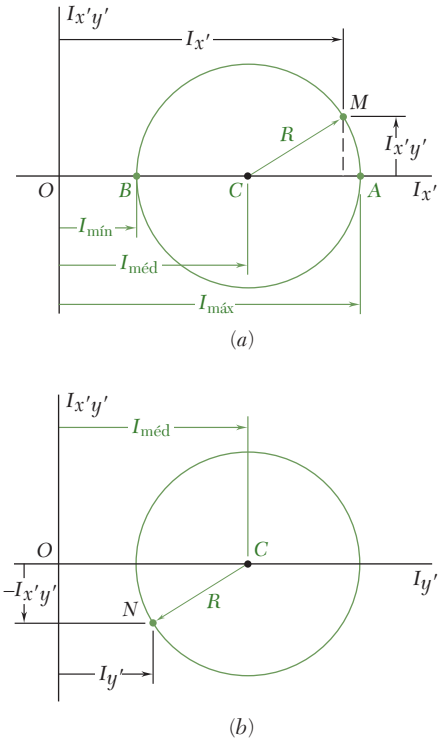
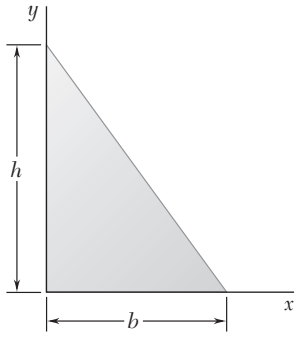


Figura 9.18

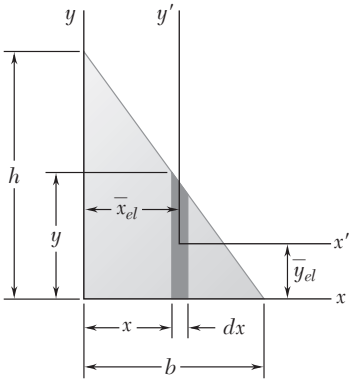
* Essa relação também pode ser obtida diferenciando-se $I_{x'}$ na Eq. (9.18) e adotando-se $dI_{x'}/d\theta = 0$.



PROBLEMA RESOLVIDO 9.6

Determine o produto de inércia do triângulo retângulo mostrado (*a*) em relação aos eixos x e y, (*b*) em relação aos eixos centroidais paralelos ao eixo x e y.

SOLUÇÃO



a. Produto de inércia I_{xy}. Uma faixa retangular vertical é escolhida como elemento diferencial de área. Usando o teorema dos eixos paralelos, temos:

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el}\,\bar{y}_{el}\,dA$$

Como o elemento é simétrico em relação aos eixos x' e y', observamos que $dI_{x'y'} = 0$. Da geometria do triângulo, obtemos:

$$y = h\left(1 - \frac{x}{b}\right) \qquad dA = y\,dx = h\left(1 - \frac{x}{b}\right)dx$$

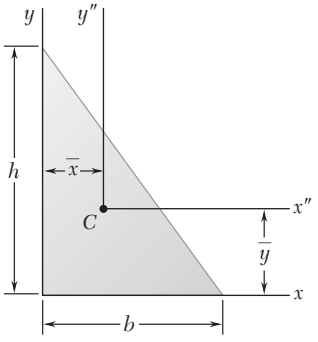
$$\bar{x}_{el} = x \qquad \bar{y}_{el} = \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}h\left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

Integrando dI_{xy} de $x = 0$ até $x = b$, obtemos:

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\,dA = \int_0^b x(\tfrac{1}{2})h^2\left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx$$

$$= h^2\int_0^b\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{2b^2}\right)dx = h^2\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3b} + \frac{x^4}{8b^2}\right]_0^b$$

$$I_{xy} = \tfrac{1}{24}b^2h^2 \quad \blacktriangleleft$$



b. Produto de inércia $\bar{I}_{x''y''}$. As coordenadas do centroide do triângulo relativas aos eixos x e y são:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{3}b \qquad \bar{y} = \tfrac{1}{3}h$$

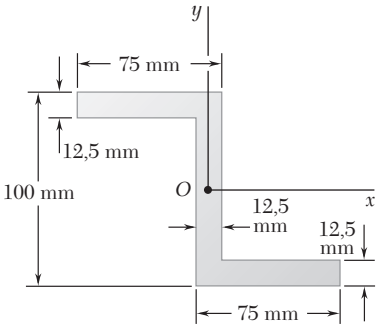
Usando a expressão para I_{xy} obtida no item *a*, aplicamos o teorema dos eixos paralelos e escrevemos:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x''y''} + \bar{x}\,\bar{y}A$$

$$\tfrac{1}{24}b^2h^2 = \bar{I}_{x''y''} + (\tfrac{1}{3}b)(\tfrac{1}{3}h)(\tfrac{1}{2}bh)$$

$$\bar{I}_{x''y''} = \tfrac{1}{24}b^2h^2 - \tfrac{1}{18}b^2h^2$$

$$\bar{I}_{x''y''} = -\tfrac{1}{72}b^2h^2 \quad \blacktriangleleft$$



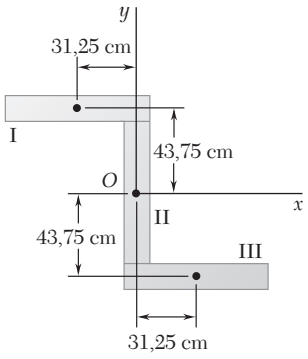
PROBLEMA RESOLVIDO 9.7

Para a seção mostrada, os momentos de inércia em relação aos eixos x e y foram calculados e são conhecidos como:

$$I_x = 4{,}05 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_y = 2{,}72 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Determine (*a*) a orientação dos eixos principais da seção em relação a O, (*b*) os valores dos momentos de inércia principais da seção em relação a O.

SOLUÇÃO



Calculamos primeiro o produto de inércia em relação aos eixos x e y. A área é dividida em três retângulos, como mostrado na figura. Observamos que o produto de inércia $\bar{I}_{x'y'}$ em relação aos eixos centroidais paralelos aos eixos x e y é nulo para cada retângulo. Usando o teorema dos eixos paralelos $I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\,\bar{y}A$, concluímos I_{xy} reduz-se a $\bar{x}\,\bar{y}A$ para cada retângulo.

Retângulo	Área, mm²	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}\bar{y}A$, mm⁴
I	937,5	−31,25	+43,75	$-1{,}28 \times 10^6$
II	937,5	0	0	0
III	937,5	+31,25	−43,75	$-1{,}28 \times 10^6$
				$\Sigma\bar{x}\bar{y}A = -2{,}56 \times 10^6$

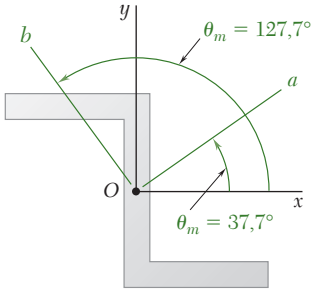
$$I_{xy} = \Sigma\bar{x}\,\bar{y}A = -2{,}56 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

a. Eixos principais. Como os valores de I_x, I_y e I_{xy} são conhecidos, a Eq. (9.25) é usada para determinar os valores de θ_m.

$$\text{tg } 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-2{,}56 \times 10^6)}{4{,}05 \times 10^6 - 2{,}72 \times 10^6} = +3{,}85$$

$$2\theta_m = 75{,}4° \quad \text{e} \quad 255{,}4°$$

$$\theta_m = 37{,}7° \qquad \text{e} \qquad \theta_m = 127{,}7° \quad \blacktriangleleft$$



b. Momentos de inércia principais. Usando a Eq. (9.27), temos:

$$I_{\text{máx,mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{(4{,}05 + 2{,}72)10^6}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(4{,}05 - 2{,}72)10^6}{2}\right]^2 + (-2{,}56 \times 10^6)^2}$$

$$I_{\text{máx}} = 6{,}03 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_{\text{mín}} = 0{,}74 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \blacktriangleleft$$

Observando que os elementos de área da seção estão distribuídos com mais proximidade em torno de eixo b do que em torno do eixo a, concluímos que $I_a = I_{\text{máx}} = 6{,}03 \times 10^6$ mm⁴ e $I_b = I_{\text{mín}} = 0{,}74 \times 10^6$ mm⁴. Esta conclusão pode ser verificada substituindo-se $\theta = 37{,}7°$ nas Eqs. (9.18) e (9.19).

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas desta seção, continuaremos a trabalhar com *momentos de inércia* e utilizaremos várias técnicas para calcular *produtos de inércia.* Embora os problemas sejam geralmente diretos, vale a pena destacar alguns itens.

1. Cálculo do produto de inércia I_{xy} por integração. Definimos esta grandeza como

$$I_{xy} = \int xy\, dA \tag{9.12}$$

e verificamos que seu valor pode ser positivo, negativo ou nulo. O produto de inércia pode ser calculado diretamente da equação anterior usando-se integração dupla ou pode ser determinado usando-se integração simples, como mostra o Problema Resolvido 9.6. Ao se aplicar essa última técnica com o teorema dos eixos paralelos, é importante lembrar que $\bar{x}_{el}$ e $\bar{y}_{el}$ na equação

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\, dA$$

são as coordenadas do centroide do elemento de área dA. Logo, se dA não estiver no primeiro quadrante, uma dessas coordenadas será negativa, ou ambas serão negativas.

2. Cálculo dos produtos de inércia de superfícies compostas. Tais produtos podem ser facilmente calculados a partir dos produtos de inércia das partes componentes da superfície usando-se o teorema dos eixos paralelos:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \tag{9.13}$$

A técnica apropriada para a resolução de problemas desse tipo está ilustrada nos Problemas Resolvidos 9.6 e 9.7. Além das regras usuais para problemas de superfícies compostas, é essencial que nos lembremos dos seguintes pontos:

a. Se um dos eixos centroidais de uma superfície componente for um eixo de simetria dessa superfície, o produto de inércia $\bar{I}_{x'y'}$ para essa superfície será nulo. Logo, $I_{x'y'}$ é igual a zero para superfícies componentes tais como círculos, semicírculos, retângulos e triângulos isósceles que tenham um eixo de simetria paralelo a um dos eixos de coordenadas.

b. Deve-se prestar muita atenção aos sinais das coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de cada superfície componente ao usar o teorema dos eixos paralelos [Problema Resolvido 9.7].

3. Determinação dos momentos de inércia e do produto de inércia para eixos de coordenadas que sofreram rotação. Na Seção 9.9, deduzimos as Eqs. (9.18), (9.19) e (9.20) a partir das quais é possível calcular os momentos de inércia e o produto de inércia para eixos de coordenadas que sofreram rotação em torno da origem O. Para aplicar essas equações, devemos conhecer um conjunto de valores I_x, I_y e I_{xy} para uma dada orientação dos eixos e nos lembrar de que θ é positivo para rotações anti-horárias dos eixos e negativo para rotações horárias.

4. Cálculo dos momentos de inércia principais. Mostramos na Seção 9.9 que existe uma determinada orientação dos eixos de coordenadas para a qual os momentos de inércia atingem seus valores máximo e mínimo, $I_{máx}$ e I_{min}, produto de inércia é nulo. A Eq. (9.27) pode ser usada no cálculo desses valores, conhecidos como *momentos de inércia principais* da superfície em relação a O. Os eixos correspondentes são ditos *eixos principais* da superfície em relação a O e a orientação está definida pela Eq. (9.25). *Para determinar qual dos eixos principais corresponde a* $I_{máx}$ *e corresponde a* $I_{mín}$, devemos seguir o procedimento explicado no texto após a Eq. (9.27) ou, então, observar em torno de qual dos eixos principais a área da superfície está distribuída com maior proximidade; esse eixo corresponde a $I_{mín}$, [Problema Resolvido 9.7].

PROBLEMAS

9.67 a 9.70 Determine por integração direta o produto de inércia da superfície dada em relação aos eixos x e y.

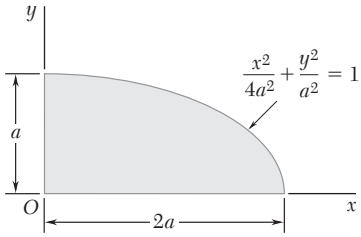


Figura P9.67

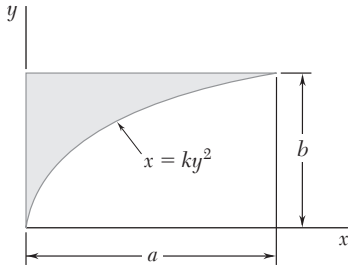


Figura P9.68

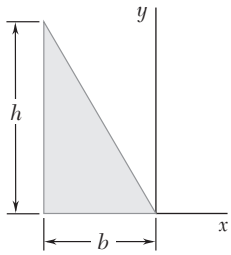


Figura P9.69

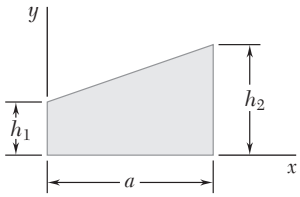


Figura P9.70

9.71 a 9.74 Usando o teorema dos eixos paralelos determine o produto de inércia da superfície mostrada na figura em relação aos eixos centroidais x e y.

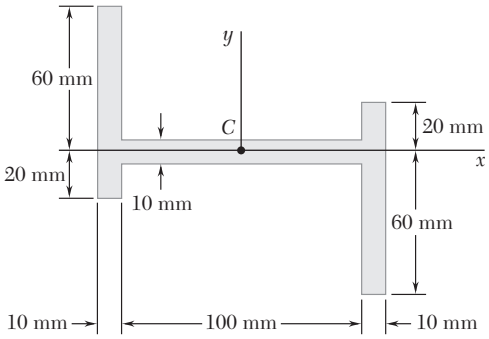


Figura P9.71

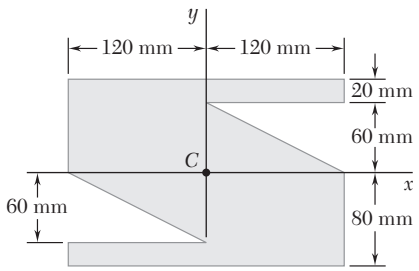


Figura P9.72

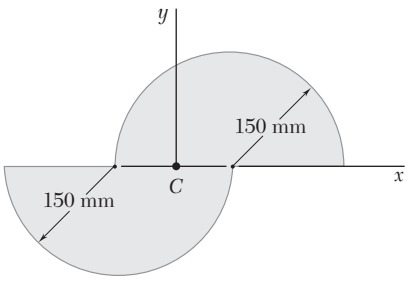


Figura P9.73

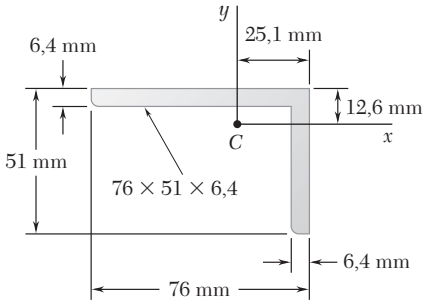


Figura P9.74

9.75 a 9.78 Usando o teorema dos eixos paralelos, determine o produto de inércia da superfície mostrada na figura em relação aos eixos centroidais x e y.

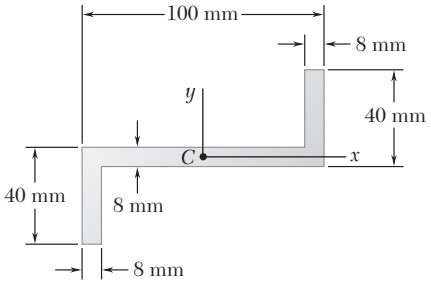


Figura P9.75

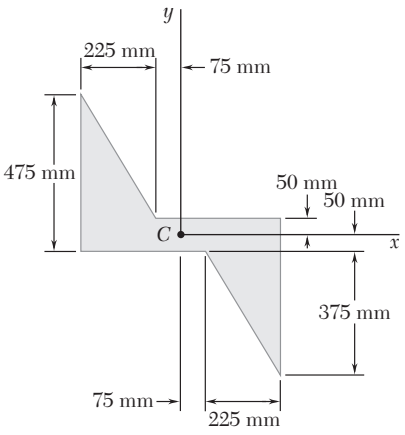


Figura P9.76

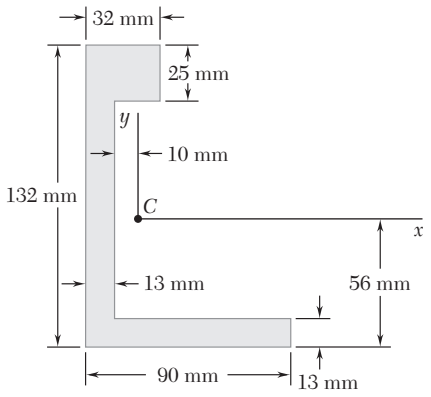


Figura P9.77

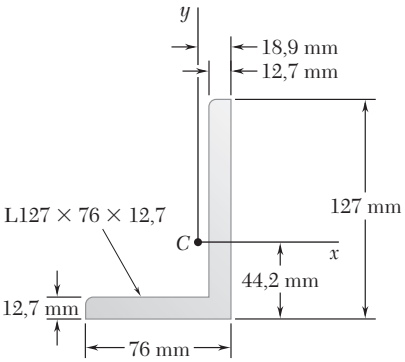


Figura P9.78

9.79 Para um quarto de elipse do Problema 9.67, determine os momentos de inércia e o produto de inércia em relação a novos eixos obtidos por rotação dos eixos x e y em torno de O (*a*) de 45° no sentido anti-horário, (*b*) de 30° no sentido horário.

9.80 Determine os momentos de inércia e o produto de inércia da superfície do Problema 9.72 em relação a novos eixos centroidais obtidos por rotação dos eixos x e y de 30° no sentido anti-horário.

9.81 Determine os momentos de inércia e o produto de inércia da superfície do Problema 9.73 em relação a novos eixos centroidais obtidos por rotação dos eixos x e y de 60° no sentido anti-horário.

9.82 Determine os momentos de inércia e o produto de inércia da superfície do Problema 9.75 em relação a novos eixos centroidais obtidos por rotação dos eixos x e y de 45° no sentido horário.

9.83 Determine os momentos de inércia e o produto de inércia da seção transversal de cantoneira de L76 × 51 × 6,4 mm do Problema 9.74 em relação a novos eixos centroidais obtidos por rotação dos eixos x e y de 30° no sentido horário.

9.84 Determine os momentos de inércia e o produto de inércia da seção transversal de cantoneira de L127 × 76 × 12,7 mm do Problema 9.78 em relação a novos eixos centroidais obtidos por rotação dos eixos x e y de 45° no sentido anti-horário.

9.85 Para um quarto de elipse do Problema 9.67, determine a orientação dos eixos principais na origem e os valores correspondentes dos momentos de inércia.

9.86 a 9.88 Para a superfície indicada, determine a orientação dos eixos principais na origem e os valores correspondentes dos momentos de inércia.

9.86 Superfície do Problema 9.72.
9.87 Superfície do Problema 9.73.
9.88 Superfície do Problema 9.75.

9.89 e 9.90 Para a seção transversal de cantoneira indicada, determine a orientação dos eixos principais na origem os valores correspondentes dos momentos de inércia.

9.88 A seção transversal de cantoneira de L76 × 51 × 6,4 mm do Problema 9.74.
9.90 A seção transversal de cantoneira de L127 × 76 × 12,7 mm do Problema 9.78.

*9.10 Círculo de Mohr para momentos e produtos de inércia

O círculo usado na seção anterior para ilustrar as relações existentes entre os momentos e os produtos de inércia de uma dada superfície em relação a eixos que passam por um ponto fixo O foi proposto originalmente pelo engenheiro alemão Otto Mohr (1835-1918), conhecido como *círculo de Mohr*. Será mostrado aqui que, se os momentos e o produto de inércia de uma superfície A em relação a dois eixos retangulares x e y que passam por um ponto O forem conhecidos, pode-se utilizar o círculo de Mohr para se determinar graficamente (*a*) os eixos principais e os momentos de inércia principais da superfície em relação a O e (*b*) os momentos e o produto de inércia da superfície em relação a qualquer outro par de eixos retangulares x' e y' passando por O.

Considere uma dada superfície A e dois eixos de coordenadas retangulares x e y (Fig. 9.19*a*). Supondo que os momentos de inércia I_x e I_y e o produto de inércia I_{xy} sejam conhecidos, vamos representá-los em um diagrama desenhando um ponto X de coordenadas I_x e I_{xy} e um ponto Y de coordenadas I_y e $-I_{xy}$ (Fig. 9.19*b*). Se I_{xy} for positivo, como suposto na Fig. 9.19*a*, o ponto X fica localizado acima do eixo horizontal e o ponto Y fica abaixo, conforme mostra a Fig. 9.19*b*. Se I_{xy} for negativo, o ponto X ficará localizado abaixo do eixo horizontal e o ponto Y ficará acima. Ligando X e Y por uma linha reta, representamos por C o ponto de interseção da linha XY com o eixo horizontal e traçamos um círculo com centro C e diâmetro XY. Observando que a abscissa de C e o raio do círculo são, respectivamente, iguais às grandezas $I_{\text{méd}}$ e R definidas pelas fórmulas (9.23), concluímos que o círculo obtido é o círculo de Mohr para a superfície dada em relação ao ponto O. Logo, as abscissas dos pontos A e B, onde o círculo intercepta o eixo horizontal, representam respectivamente os momentos principais de inércia $I_{\text{máx}}$ e $I_{\text{mín}}$ da superfície.

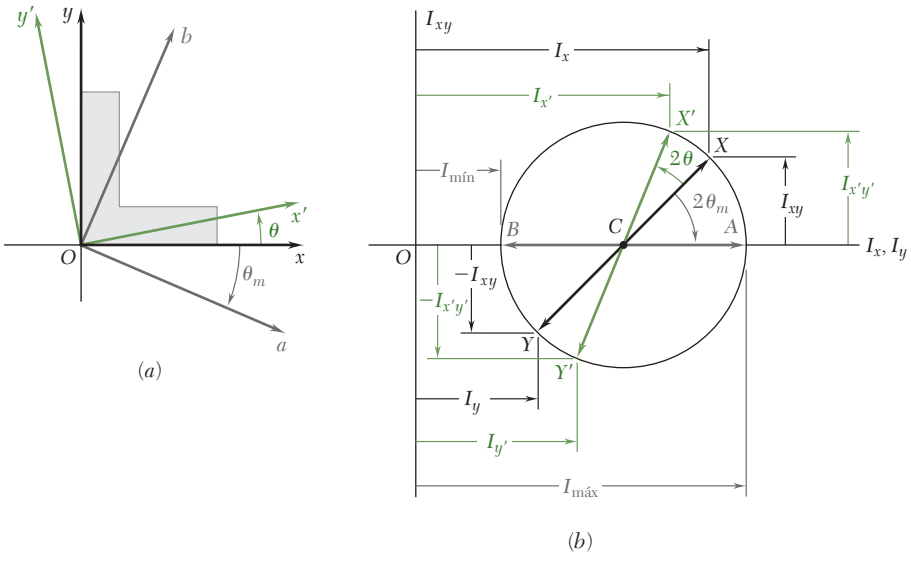
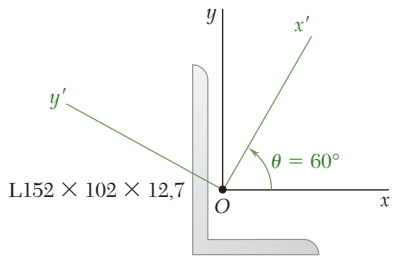


Figura 9.19

Uma vez que tg $(XCA) = 2I_{xy}/(I_x - I_y)$, verificamos também que o ângulo XCA é igual em intensidade a um dos ângulos $2\theta_m$ que satisfazem a Eq. (9.25); logo, o ângulo θ_m, que na Fig. 9.19*a* define o eixo principal Oa correspondente ao ponto A na Fig. 9.19*b*, é igual a metade do ângulo XCA do círculo de Mohr. Observamos ainda que, se $I_x > I_y$ e $I_{xy} > 0$, como no caso aqui considerado, a rotação que leva CX para CA é horária. Nessas condições, o ângulo θ_m obtido na Eq. (9.25), que define o eixo principal Oa na Fig. 9.19*a*, é negativo; portanto, a rotação que leva Ox para Oa também é horária. Concluímos que os sentidos de rotação nas partes da Fig. 9.19 são os mesmos. Se for preciso uma rotação horária de $2\theta_m$, de modo a levar CX para CA no círculo de Mohr, uma rotação horária θ_m levará Ox para o eixo principal correspondente Oa na Fig. 9.19*a*.

Como o círculo de Mohr é definido de maneira única, pode-se obter o mesmo círculo considerando-se os momentos e o produto de inércia da superfície A em relação aos eixos retangulares x' e y' (Fig. 9.19*a*). O ponto X' de coordenadas $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ e o ponto Y' de coordenadas $I_{y'}$ e $-I_{x'y'}$ ficam, então, localizados sobre o círculo de Mohr, e o ângulo $X'CA$ na Fig. 9.19*b* deve ser igual a duas vezes o ângulo $x'Oa$ na Fig. 9.19*a*. Conforme já observamos, uma vez que o ângulo XCA é o dobro do ângulo xOa, resulta que o ângulo XCX' na Fig. 9.19*b* é o dobro do ângulo xOx' na Fig. 9.19*a*. O diâmetro $X'Y'$, que define os momentos e o produto de inércia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ da superfície dada em relação aos eixos retangulares x' e y' que formam um ângulo θ com os eixos x e y, pode ser obtido por rotação de um ângulo 2θ do diâmetro XY, correspondendo aos momentos e ao produto de inércia I_x, I_y e I_{xy}. Observamos que a rotação que leva o diâmetro XY para o diâmetro $X'Y'$ na Fig. 9.19*b* tem o mesmo sentido da rotação que leva os eixos x e y para os eixos x' e y' na Fig. 9.19*a*.

Deve-se observar que o uso do círculo de Mohr não fica limitado a soluções gráficas, ou seja, a soluções baseadas em desenhos e medições cuidadosas dos diversos parâmetros envolvidos. Pelo simples esboço do círculo de Mohr e com o uso de trigonometria, é possível deduzir facilmente as diversas relações necessárias para uma solução numérica de um dado problema (ver o Problema Resolvido 9.8).



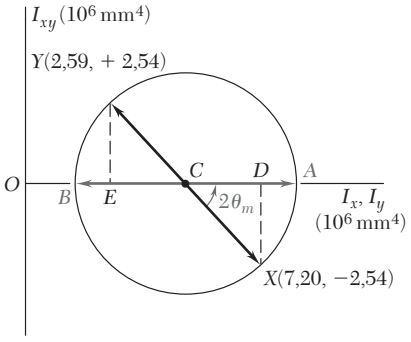
PROBLEMA RESOLVIDO 9.8

Para a seção mostrada, sabe-se que os momentos e o produto de inércia em relação aos eixos x e y são iguais a:

$$I_x = 7{,}20 \times 10^6\ \text{mm}^4 \qquad I_y = 2{,}59 \times 10^6\ \text{mm}^4 \qquad I_{xy} = -2{,}54 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

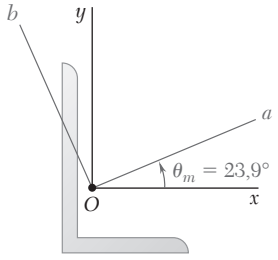
Usando o círculo de Mohr, determine (*a*) os eixos principais da seção em relação a O, (*b*) os valores dos momentos de inércia principais da seção em relação a O, (*c*) os momentos e o produto de inércia da seção em relação aos eixos x' e y' que formam um ângulo de 60° com eixos x e y.

SOLUÇÃO



Traçando o círculo de Mohr. Primeiro plotamos o ponto X de coordenadas $I_x = 7{,}20$ e $I_{xy} = -2{,}54$, e o ponto Y, de coordenadas $I_y = 2{,}59$ e $-I_{xy} = +2{,}54$. Ligando X e Y por meio de uma linha reta, definimos o centro C do círculo de Mohr. A abscissa de C, que representa $I_{\text{méd}}$ e o raio R do círculo, pode ser medida diretamente ou calculada do seguinte modo:

$$I_{\text{méd}} = OC = \tfrac{1}{2}(I_x + I_y) = \tfrac{1}{2}(7{,}24 \times 10^6 + 2{,}61 \times 10^6) = 4{,}825 \times 10^6\ \text{mm}^4$$
$$CD = \tfrac{1}{2}(I_x - I_y) = \tfrac{1}{2}(7{,}20 \times 10^6 - 2.59 \times 10^6) = 2{,}305 \times 10^6\ \text{mm}^4$$
$$R = \sqrt{(CD)^2 + (DX)^2} = \sqrt{(2{,}315 \times 10^6)^2 + (2{,}54 \times 10^6)^2}$$
$$= 3{,}437 \times 10^6\ \text{mm}^4$$



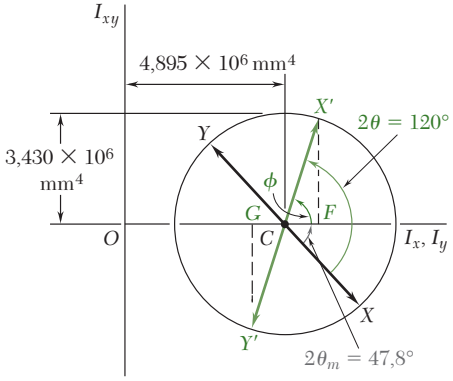
a. Eixos principais. Os eixos principais da seção correspondem aos pontos A e B do círculo de Mohr, e o ângulo do qual devemos girar CX para levá-lo a CA define $2\theta_m$. Temos:

$$\text{tg}\ 2\theta_m = \frac{DX}{CD} = \frac{2{,}54}{2{,}305} = 1{,}102 \qquad 2\theta_m = 47{,}8° \curvearrowleft \qquad \theta_m = 23{,}9° \curvearrowleft \blacktriangleleft$$

Logo, os eixos principais Oa correspondentes ao valor máximo do momentos de inércia é obtido por rotação do eixo x de 23,9° no sentido anti-horário; o eixo principal Ob correspondente ao valor mínimo do momento de inércia é obtido por rotação do eixo y por meio do mesmo ângulo.

b. Momentos de inércia principais. Os momentos de inércia principais estão representados pelas abscissas de A e B. Temos:

$$I_{\text{máx}} = OA = OC + CA = I_{\text{méd}} + R = (4{,}895 + 3{,}430)10^6\ \text{mm}^4$$
$$I_{\text{máx}} = 8{,}33 \times 10^6\ \text{mm}^4 \blacktriangleleft$$
$$I_{\text{mín}} = OB = OC - BC = I_{\text{méd}} - R = (4{,}895 - 3{,}430)10^6\ \text{mm}^4$$
$$I_{\text{mín}} = 1{,}47 \times 10^6\ \text{mm}^4 \blacktriangleleft$$



c. Momentos e produto de inércia em relação aos eixos x′ e y′. Sobre o círculo de Mohr, os pontos X' e Y' correspondentes aos eixos x' e y' são obtidos pela rotação de CX e CY de um ângulo $2\theta = 2(60°) = 120°$ no sentido anti-horário. As coordenadas de X' e Y' fornecem os momentos e o produto de inércia desejados. Observando que o ângulo CX' forma com o eixo horizontal é $\phi = 120° - 47{,}8° = 72{,}2°$, temos:

$$I_{x'} = OF = OC + CF = 4{,}895 \times 10^6\ \text{mm}^4 + (3{,}430 \times 10^6\ \text{mm}^4)\cos 72{,}2°$$
$$I_{x'} = 5{,}94 \times 10^6\ \text{mm}^4 \blacktriangleleft$$
$$I_{y'} = OG = OC - GC = 4{,}895 \times 10^6\ \text{mm}^4 - (3{,}430 \times 10^6\ \text{mm}^4)\cos 72{,}2°$$
$$I_{y'} = 3{,}28 \times 10^6\ \text{mm}^4 \blacktriangleleft$$
$$I_{x'y'} = FX' = (3{,}430 \times 10^6\ \text{mm}^4)\ \text{sen}\ 72{,}2°$$
$$I_{x'y'} = 3{,}27 \times 10^6\ \text{mm}^4 \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas desta seção, usaremos o *círculo de Mohr* para determinar os momentos e os produtos de inércia de uma dada superfície para diferentes orientações dos eixos de coordenadas. Embora em alguns casos o uso do círculo de Mohr possa não ser tão direto quanto a substituição nas equações apropriadas [Eqs. (9.18) a (9.20)], este método de solução tem a vantagem de prover uma representação visual das relações entre as diversas variáveis. Além disso, o círculo de Mohr mostra todos os valores de momentos e produtos de inércia possíveis para um dado problema.

Usando o círculo de Mohr. A teoria subjacente foi apresentada na Seção 9.9 e discutimos as aplicações deste método na Seção 9.10 e no Problema Resolvido 9.8. Nesse mesmo problema, apresentamos os passos que devemos seguir para determinar os *eixos principais,* os *momentos de inércia principais* e os *momentos e produto de inércia em relação a uma orientação específica dos eixos de coordenadas.* Ao usar o círculo de Mohr na resolução de problemas, é importante lembrarmos os seguintes pontos:

a. O círculo de Mohr é completamente definido pelas grandezas R e $I_{méd}$ que representam, respectivamente, o raio do círculo e a distância da origem O ao centro C do círculo. Essas grandezas poderão ser obtidas a partir das Eqs. (9.23), caso os momentos e o produto de inércia sejam conhecidos para uma dada orientação dos eixos. No entanto, o círculo de Mohr pode ser definido por outras combinações de valores conhecidos [Problemas 9.103, 9.106 e 9.107]. Para esses casos, pode ser preciso primeiro levantar uma ou mais hipóteses, tais como escolher uma localização arbitrária do centro quando $I_{méd}$ é desconhecido, atribuir intensidades relativas aos momentos de inércia (por exemplo, $I_x > I_y$) ou selecionar o sinal do produto de inércia.

b. O ponto X de coordenadas (I_x, I_{xy}) e o ponto Y de coordenadas $(I_y, -I_{xy})$ são localizados sobre o círculo de Mohr e são diametralmente opostos.

c. Uma vez que os momentos de inércia devem ser positivos, todo o círculo de Mohr deve ficar à direita do eixo I_{xy}; resulta que $I_{méd} > R$ em todos os casos.

d. Para uma rotação dos eixos de coordenadas de um ângulo θ, a rotação associada do diâmetro do círculo de Mohr é igual a 2θ e se dá no mesmo sentido (horário ou anti-horário). Recomendamos enfaticamente que os pontos conhecidos sobre a circunferência do círculo sejam rotulados com as letras maiúsculas apropriadas, como foi feito na Fig. 9.19*b* e nos círculos de Mohr do Problema Resolvido 9.8. Isso possibilitará que determinemos, para cada valor de θ, o sinal do produto de inércia correspondente e estabeleçamos qual momento de inércia está associado a cada eixo de coordenadas [ver o Problema Resolvido 9.9, itens *a* e *c*].

Embora tenhamos apresentado o círculo de Mohr no contexto específico do estudo de momentos e produtos de inércia, a técnica do círculo de Mohr também se aplica à solução de problemas análogos, mas fisicamente diferentes em mecânica dos materiais. Esse uso múltiplo de uma técnica específica não é único e, à medida que prosseguiremos nossos estudos de engenharia, encontrar diversos métodos de solução que podem ser aplicados a uma variedade de problemas.

PROBLEMAS

9.91 Usando o círculo de Mohr para um quarto de elipse do Problema 9.67, determine os momentos de inércia e o produto de inércia em relação a novos eixos obtidos por rotação dos eixos x e y em torno de O (*a*) de 45° no sentido anti-horário, (*b*) de 30° no sentido horário.

9.92 Usando o círculo de Mohr, determine os momentos de inércia e o produto de inércia da superfície do Problema 9.72 em relação a novos eixos centroidais obtidos por rotação dos eixos x e y de 30° no sentido anti-horário.

9.93 Usando o círculo de Mohr, determine os momentos de inércia e o produto de inércia da superfície do Problema 9.73 em relação a novos eixos centroidais obtidos por rotação dos eixos x e y de 60° no sentido anti-horário.

9.94 Usando o círculo de Mohr, determine os momentos de inércia e o produto de inércia da superfície do Problema 9.75 em relação a novos eixos centroidais obtidos por rotação dos eixos x e y de 45° no sentido horário.

9.95 Usando o círculo de Mohr, determine os momentos de inércia e o produto de inércia da seção transversal da cantoneira de L76 × 51 × 6,4 mm do Problema 9.74 em relação a novos eixos centroidais obtidos por rotação dos eixos x e y de 30° no sentido horário.

9.96 Usando o círculo de Mohr, determine os momentos de inércia e o produto de inércia da seção transversal da cantoneira de L127 × 76 × 12,7 mm do Problema 9.78 em relação a novos eixos centroidais obtidos por rotação dos eixos x e y de 45° no sentido anti-horário.

9.97 Para um quarto de elipse do Problema 9.67, use o círculo de Mohr para determinar a orientação dos eixos principais na origem e os valores correspondentes dos momentos de inércia.

9.98 a 9.102 Usando o círculo de Mohr para a superfície indicada, determine a orientação dos eixos centroidais principais e os valores correspondentes dos momentos de inércia.

9.98 Superfície do Problema 9.72.
9.99 Superfície do Problema 9.76.
9.100 Superfície do Problema 9.73.
9.101 Superfície do Problema 9.74.
9.102 Superfície do Problema 9.75.

(Os momentos de inércia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ da superfície do Problema 9.102 foram determinados no Problema 9.44.)

9.103 Os momentos de inércia e o produto de inércia de uma seção transversal da cantoneira de L102 × 76 × 6,4 mm em relação a dois eixos retangulares x e y passando por C são, respectivamente, $\bar{I}_x = 0{,}166 \times 10^6$ mm^4, $\bar{I}_y = 0{,}453 \times 10^6$ mm^4 e $\bar{I}_{xy} < 0$, sendo $\bar{I}_{mín} = 0{,}051 \times 10^6$ mm^4 o valor mínimo do momento de inércia da superfície em relação a qualquer eixo que passa por C. Usando o círculo de Mohr, determine (*a*) o produto de inércia $\bar{I}_{xy}$ da supefície, (*b*) a orientação dos eixos principais, (*c*) o valor de $\bar{I}_{máx}$.

9.104 e 9.105 Usando o círculo de Mohr para a seção transversal de cantoneira mostrada na figura, determine a orientação dos eixos centroidais principais e os valores correspondentes do momento de inércia. (As propriedades da seção transversal são dadas na Fig. 9.13.)

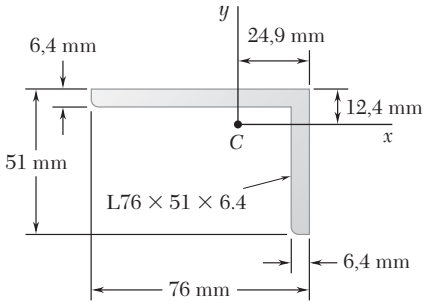


Figura P9.104

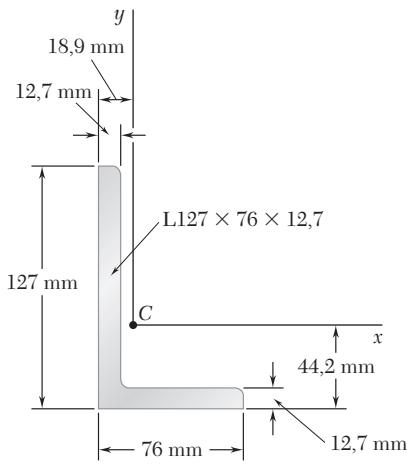


Figura P9.105

***9.106** Para uma dada superfície, os momentos de inércia em relação a dois eixos retangulares centroidais x e y são $\bar{I}_x = 468 \times 10^6$ mm^4 e $\bar{I}_y = 117 \times 10^6$ mm^4, respectivamente. Sabendo que após a rotação dos eixos x e y de 30° no sentido anti-horário em torno do centroide o produto de inércia relativo aos eixos girados é 566×10^6 mm^4, use o círculo de Mohr para determinar (*a*) a orientação dos eixos principais, (*b*) os momentos de inércia centroidais principais.

9.107 Sabe-se que para uma dada área $\bar{I}_y = 48 \times 10^6$ mm^4 e $\bar{I}_{xy} = -20 \times 10^6$ mm^4, x e y representam eixos retangulares centroidais. Se o eixo correspondente ao produto de inércia máximo é obtido por rotação do eixo x de 67,5° no sentido anti-horário em torno do centroide C, use o círculo de Mohr para determinar (*a*) o momento de inércia $\bar{I}_x$ da superfície, (*b*) os momentos de inércia centroidais principais.

***9.108** Usando o círculo de Mohr, mostre que, para qualquer polígono regular (tal como um pentágono), (*a*) o momento de inércia em relação a qualquer eixo que passe pelo centroide é o mesmo, (*b*) o produto de inércia em relação a qualquer par de eixos retangulares que passe pelo centroide é nulo.

***9.109** Usando o círculo de Mohr, demonstre que a expressão $I_{x'}I_{y'} - I_{x'}^2I_{y'}$ é independente da orientação dos eixos x' e y', onde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'}I_{y'}$ representam, respectivamente, os momentos e o produto de inércia de uma dada superfície em relação a um par de eixos retangulares x' e y' passando por um dado ponto O. Mostre também que a expressão dada é igual ao quadrado do comprimento da tangente traçada da origem do sistema de coordenadas ao círculo de Mohr.

***9.110** Usando a propriedade de invariância estabelecida no problema anterior, expresse o produto de inércia I_{xy} de uma superfície A em relação a um par de eixos retangulares passando por O em termos dos momentos de inércia I_x e I_y de A e dos momentos de inércia principais $I_{mín}$ e $I_{máx}$ em relação a O. Use a fórmula obtida para calcular o produto de inércia I_{xy} da seção transversal da cantoneira de L76 × 51 × 6,4 mm mostrada na Figura 9.13, sabendo que seu momento de inércia máximo é 490×10^6 mm^4.

MOMENTOS DE INÉRCIA DE CORPOS

9.11 Momento de inércia de um corpo

Considere um pequeno corpo de massa Δm fixado em uma barra de massa desprezível que pode girar livremente em torno de um eixo AA' (Fig. 9.20*a*). Se um binário é aplicado ao sistema, a barra e o corpo, considerados inicialmente em repouso, começarão a girar em torno de AA'. Os detalhes desse movimento serão estudados posteriormente em dinâmica. Por ora, queremos apenas indicar que o tempo necessário para que o sistema alcance uma dada velocidade de rotação é proporcional à massa Δm e ao quadrado da distância r. O produto $r^2\,\Delta m$ fornece, portanto, uma medida da *inércia* do sistema, ou seja, uma medida da resistência que o sistema oferece quando tentamos colocá-lo em movimento. Por essa razão, o produto $r^2\Delta m$ é denominado *momento de inércia* do corpo de massa Δm em relação ao eixo AA'.

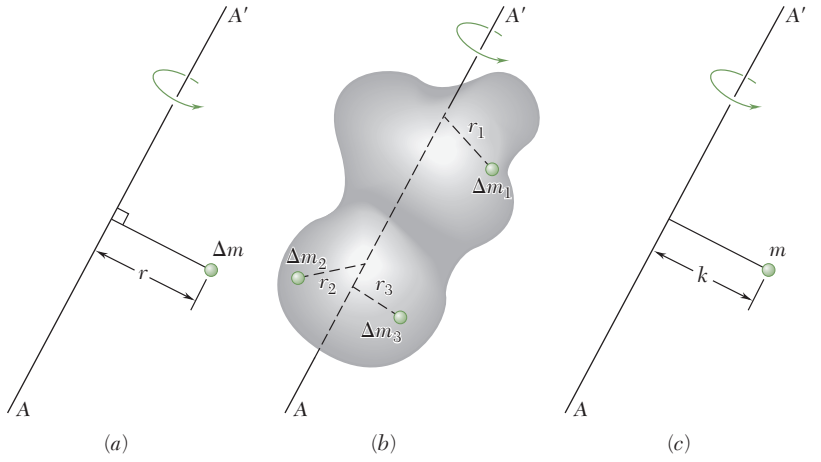


Figura 9.20

Considere agora um corpo de massa m que deve ser posto para girar em torno de um eixo AA' (Fig. 9.20*b*). Dividindo o corpo em elementos de massa Δm_1, Δm_2, etc., verificamos que a resistência do corpo ao movimento de rotação é medida pela soma $r_1^2\,\Delta m_1 + r_2^2\,\Delta m_2 + \cdots$. Esta soma define, portanto, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo AA'. Aumentando o número de elementos, concluímos que o momento de inércia é igual, no limite, à integral:

$$I = \int r^2\,dm \tag{9.28}$$

O *raio de giração* k do corpo em relação ao eixo AA' é definido pela relação:

$$I = k^2 m \qquad \text{ou} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{9.29}$$

Logo, o raio de giração k representa a distância a que toda massa do corpo deve ser concentrada para que seu momento de inércia em relação a AA' permaneça inalterado (Fig. 9.20*c*). Seja mantido em seu formato original (Fig. 9.20*b*), seja concentrado da maneira mostrada na Fig. 9.20*c*, o corpo de massa m reagirá do mesmo modo a uma rotação, ou *giração*, em torno de AA'.

No Sistema Internacional de unidades, o raio de giração k é expresso em metros e a massa m, em quilogramas; logo, a unidade usada para o momento de inércia de um corpo é kg · m^2.*

O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo de coordenadas pode ser facilmente expresso em termos das coordenadas x, y, z do elemento de massa dm (Fig. 9.21). Observando, por exemplo, que o quadrado da distância r do elemento dm ao eixo y é $z^2 + x^2$, denotamos o momento de inércia do corpo em relação ao eixo y do seguinte modo:

$$I_y = \int r^2\, dm = \int (z^2 + x^2)\, dm$$

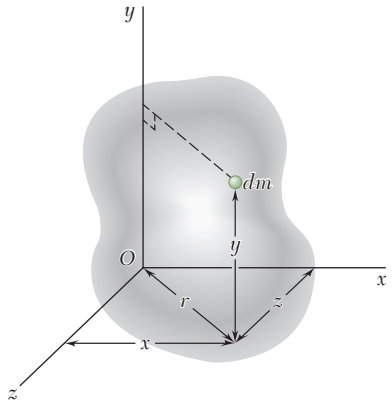


Figura 9.21

Expressões similares podem ser obtidas para os momentos de inércia em relação aos eixos x e z. Temos:

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_y = \int (z^2 + x^2)\, dm \tag{9.30}$$
$$I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

Foto 9.2 Como você discutirá em seu curso de dinâmica, o comportamento rotacional de uma árvore de comando de válvulas depende do seu momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação.

9.12 Teorema dos eixos paralelos

Considere um corpo de massa m. Seja $Oxyz$ um sistema de coordenadas retangulares cuja origem está em um ponto arbitrário O, e $Gx'y'z'$ um sistema de *eixos centroidais* paralelos, ou seja, um sistema cuja origem está no centro de gravidade G do corpo** e cujos eixos x', y', z' são paralelos aos eixos x, y, z, respectivamente (Fig. 9.22). Representando por x, y, z as coordenadas de G em relação a $Oxyz$, temos as seguintes relações

* A parte relativa ao sistema usual dos EUA não foi inserido no texto traduzido.

** Observe que o termo *centroidal* é usado aqui para definir um eixo que passa pelo centro de gravidade G do corpo, seja G coincidente ou não com o centroide do volume do corpo.

entre as coordenadas x, y, z do elemento dm em relação a $Oxyz$ e suas coordenadas x', y', z' em relação aos eixos centroidais $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \bar{x} \qquad y = y' + \bar{y} \qquad z = z' + \bar{z} \tag{9.31}$$

Voltando às Eqs. (9.30), podemos expressar o momento de inércia do corpo em relação ao eixo x da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2]\, dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2)\, dm + 2\bar{y}\int y'\, dm + 2\bar{z}\int z'\, dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\int dm \end{aligned}$$

A primeira integral nessa expressão representa o momento de inércia $\bar{I}_{x'}$ do corpo em relação ao eixo centroidal x'; *a* segunda e a terceira integrais representam o momento de primeira ordem do corpo em relação aos planos $z'x'$ e $x'y'$, respectivamente, e, como ambos os planos contêm G, as duas integrais são *nulas;* a última integral é igual à massa total m do corpo. Temos, então:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \tag{9.32}$$

e, de maneira análoga:

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \qquad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \tag{9.32′}$$

Pela Fig. 9.22, verificamos facilmente que a soma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa o quadrado da distância OB entre os eixos y e y'. Analogamente, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ e $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ representam os quadrados da distância entre os eixos x e x' e os eixos z e z', respectivamente. Portanto, representando por d a distância entre um eixo arbitrário AA' e um eixo centroidal paralelo BB' (Fig. 9.23), podemos escrever a seguinte relação geral entre os momentos de inércia I do corpo em relação a AA' e seu momento de inércia $\bar{I}$ em relação a BB':

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{9.33}$$

Expressando os momentos de inércia em termos dos raios de giração correspondentes, podemos escrever também

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{9.33}$$

onde k e $\bar{k}$ representam os raios de giração do corpo em relação a AA' e BB', respectivamente.

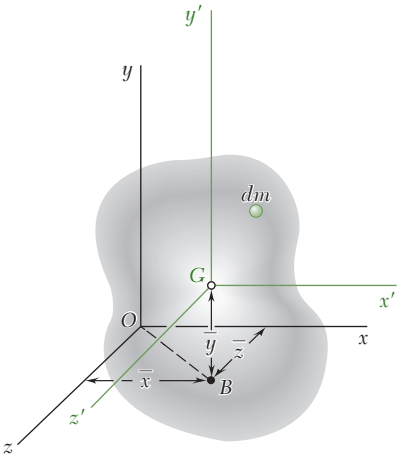


Figura 9.22

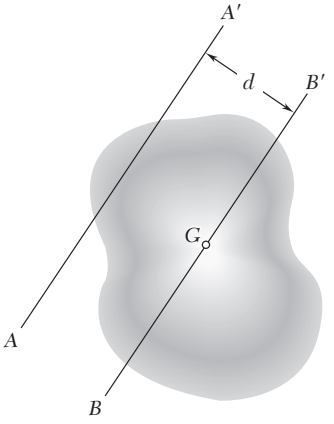


Figura 9.23

9.13 Momentos de inércia de placas delgadas

Considere uma placa delgada de espessura uniforme t, feita de um material homogêneo de massa específica ρ (massa específica = massa por uni-

dade de volume). O momento de inércia de massa da placa em relação a um eixo AA' *contido no plano* da placa (Fig. 9.24*a*) é:

$$I_{AA',\,\text{massa}} = \int r^2\, dm$$

Uma vez que $dm = \rho t\, dA$, temos:

$$I_{AA',\,\text{massa}} = \rho t \int r^2\, dA$$

Mas r representa a distância do elemento de área dA ao eixo AA'.

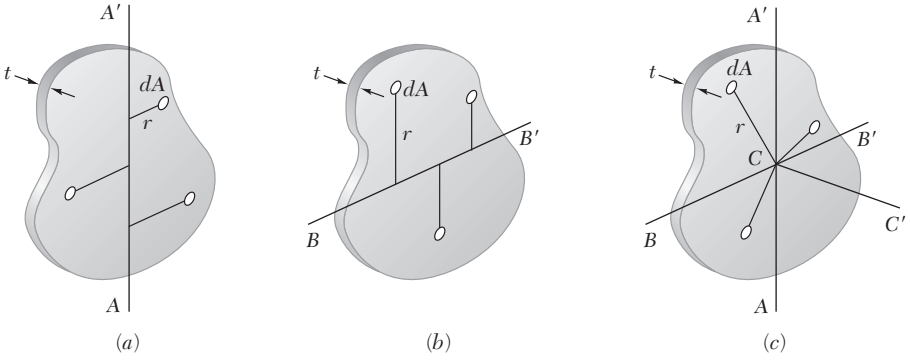


Figura 9.24

Logo, a integral é igual ao momento de inércia da superfície da placa em relação a AA'. Temos:

$$I_{AA',\,\text{massa}} = \rho t I_{AA',\,\text{área}} \tag{9.35}$$

De modo semelhante, para um eixo BB' contido no plano da placa e perpendicular a AA' (Fig. 9.24*b*), temos:

$$I_{BB',\,\text{massa}} = \rho t I_{BB',\,\text{área}} \tag{9.36}$$

Considerando agora o eixo CC' *perpendicular* ao plano da placa e passando pelo ponto de interseção C de AA' e BB' (Fig. 9.24*c*), temos

$$I_{CC',\,\text{massa}} = \rho t J_{C,\,\text{área}} \tag{9.37}$$

sendo J_C o momento de inércia *polar* da superfície da placa em relação ao ponto C.

Recordando a relação entre os momentos de inércia retangular e polar de uma superfície, $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$, escrevemos a seguinte relação entre os momentos de inércia de corpo de uma placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \tag{9.38}$$

Placa retangular. No caso de uma placa retangular de lados a e b (Fig. 9.25), obtemos os seguintes momentos de inércia de massa em relação a eixos que passam pelo centro de gravidade da placa:

$$I_{AA',\text{massa}} = \rho t I_{AA',\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}a^3 b)$$
$$I_{BB',\text{massa}} = \rho t I_{BB',\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}ab^3)$$

Observando que o produto ρabt é igual à massa m da placa, escrevemos os momentos de inércia de corpo de uma placa retangular delgada da seguinte maneira:

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{9.39}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{9.40}$$

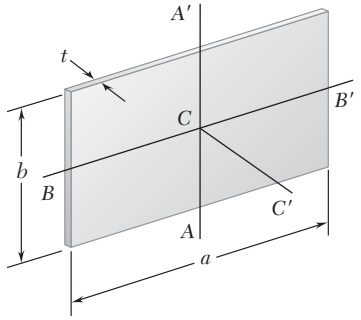


Figura 9.25

Placa circular. No caso de uma placa circular, ou disco, de raio r (Fig. 9.26), temos:

$$I_{AA',\text{massa}} = \rho t I_{AA',\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{4}\pi r^4)$$

Observando que o produto $\rho\pi r^2 t$ é igual à massa m da placa e que $I_{AA'} = I_{BB'}$, escrevemos os momentos de inércia de corpo de uma placa circular delgada da seguinte maneira:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{9.41}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{9.42}$$

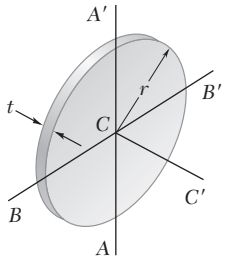
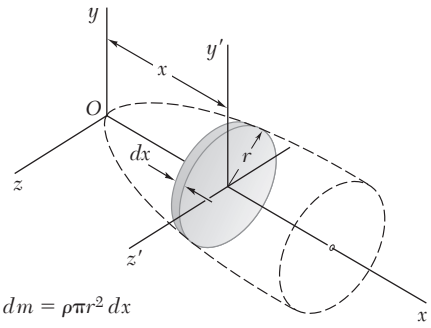


Figura 9.26

9.14 Determinação do momento de inércia de um corpo tridimensional por integração

O momento de inércia de um corpo tridimensional é obtido pelo cálculo da integral $I = \int r^2\, dm$. Se o corpo é feito de um material homogêneo de massa específica ρ, o elemento de massa dm é igual a $\rho\, dV$ e podemos escrever $I = \rho\int r^2\, dV$. Esta integral depende do formato do corpo. Logo, para se calcular o momento de inércia de um corpo tridimensional, provavelmente será preciso efetuar uma integração tripla ou, pelo menos, uma integração dupla.

Todavia, se o corpo tiver dois planos de simetria, provavelmente será possível determinar o momento de inércia do corpo com uma integração simples, escolhendo como elemento de massa dm uma fatia delgada perpendicular aos planos de simetria. No caso de corpos de revolução, por exemplo, o elemento de massa seria um disco delgado (Fig. 9.27). Usando a fórmula (9.42), o momento de inércia do disco em relação ao eixo de revolução pode ser expresso como indicado na Fig. 9.27. Seu momento de inércia em relação a cada um dos outros dois eixos de coordenadas é obtido pela fórmula (9.41) e pelo teorema dos eixos paralelos. A integração da expressão obtida conduz aos momentos de inércia do corpo.



$dm = \rho\pi r^2\, dx$

$dI_x = \tfrac{1}{2}\, r^2\, dm$

$dI_y = dI_{y'} + x^2\, dm = \left(\tfrac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$

$dI_z = dI_{z'} + x^2\, dm = \left(\tfrac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$

Figura 9.27 Determinação do momento de inércia de um corpo de revolução.

9.15 Momentos de inércia de corpos compostos

Os momentos de inércia de alguns formatos simples são mostrados na Fig. 9.28. Para um corpo constituído de vários desses formatos simples, pode-se obter o momento de inércia em relação a um dado eixo calculando-se primeiro os momentos de inércia de suas partes componentes em relação ao eixo desejado e adicionando-os em seguida. Tal como no caso de superfícies, o raio de giração de um corpo composto *não pode* ser obtido pela adição dos raios de giração de suas partes componentes.

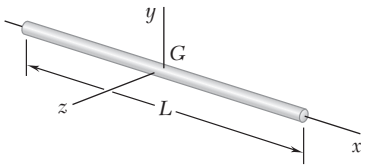
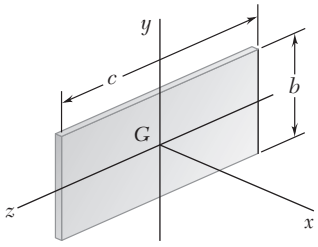
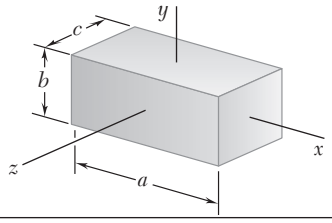
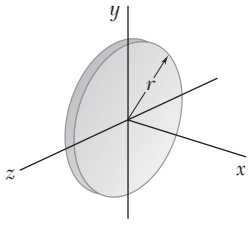
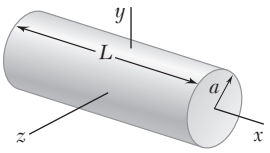
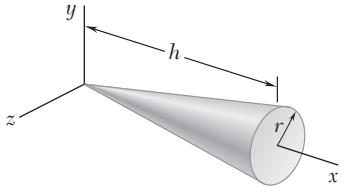
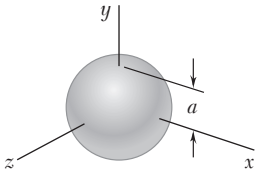
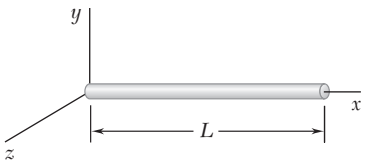
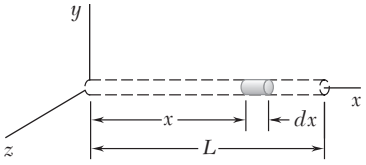
Barra estreita		$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
Placa retangular delgada		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$
Prisma retangular		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
Cone circular		$I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$

Figura 9.28 Momentos de inércia de massa de formatos geométricos simples.



PROBLEMA RESOLVIDO 9.9

Determine o momento de inércia de uma barra estreita de comprimento L e massa m em relação a um eixo perpendicular à barra passando por uma das extremidades da barra.

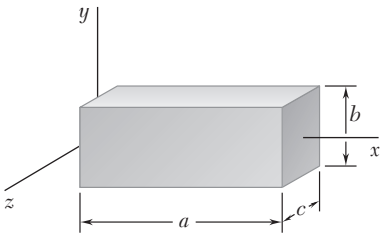


SOLUÇÃO

Escolhendo o elemento diferencial de massa mostrado na figura, temos:

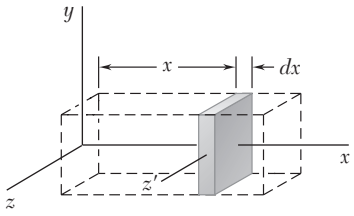
$$dm = \frac{m}{L}dx$$

$$I_y = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2\frac{m}{L}dx = \left[\frac{m}{L}\frac{x^3}{3}\right]_0^L \qquad I_y = \tfrac{1}{3}mL^2 \;\blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 9.10

Para o prisma retangular homogêneo mostrado na figura, determine o momento de inércia em relação ao eixo z.



SOLUÇÃO

Escolhemos como elemento diferencial de massa o elemento delgado mostrado na figura. Logo:

$$dm = \rho bc\,dx$$

Voltando à Seção 9.13, verificamos que o momento de inércia do elemento em relação ao eixo z' é:

$$dI_{z'} = \tfrac{1}{12}b^2\,dm$$

Aplicando o teorema dos eixos paralelos, obtemos o momento de inércia de massa do elemento em relação ao eixo z.

$$dI_z = dI_{z'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{12}b^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\rho bc\,dx$$

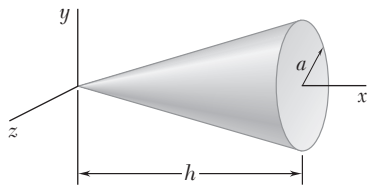
Integrando de $x = 0$ até $x = a$, obtemos:

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\rho bc\,dx = \rho abc(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2)$$

Como a massa total de prisma é $m = \rho abc$, podemos escrever:

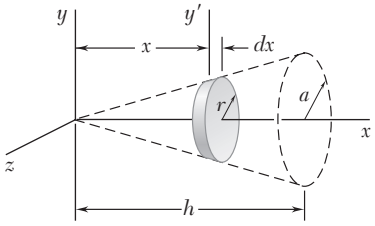
$$I_z = m(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2) \qquad I_z = \tfrac{1}{12}m(4a^2 + b^2) \;\blacktriangleleft$$

Observamos que, se o prisma é delgado, sendo b pequeno em comparação com a, a expressão para I_z reduz-se a $\frac{1}{3}ma_2$, que é o resultado obtido no Problema Resolvido 9.9, quando $L = a$.



PROBLEMA RESOLVIDO 9.11

Determine o momento de inércia de um cone circular em relação a (*a*) seu eixo longitudinal, (*b*) um eixo que passa pelo vértice do cone e é perpendicular ao seu eixo longitudinal, (*c*) um eixo que passa pelo centroide do cone e é perpendicular a seu eixo longitudinal.



SOLUÇÃO

Escolhemos o elemento diferencial de massa mostrado na figura.

$$r = a\frac{x}{h} \qquad dm = \rho\pi r^2\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx$$

a. Momento de inércia I_x. Usando a expressão deduzida na Seção 9.13 para um disco esbelto, calculamos o momento de inércia de massa do elemento diferencial em relação ao eixo *x*.

$$dI_x = \tfrac{1}{2}r^2\,dm = \tfrac{1}{2}\left(a\frac{x}{h}\right)^2\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx$$

Integrando de $x = 0$ até $x = h$, obtemos:

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h$$

Como a massa total do cone é $m = \frac{1}{3}\rho\pi a^2 h$, podemos escrever:

$$I_x = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h = \tfrac{3}{10}a^2(\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h) = \tfrac{3}{10}ma^2 \qquad I_x = \tfrac{3}{10}ma^2 \;\blacktriangleleft$$

b. Momento de inércia I_y. É usado o mesmo elemento diferencial. Aplicando o teorema dos eixos paralelos e usando a expressão deduzida na Seção 9.13 para um disco esbelto, temos:

$$dI_y = dI_{y'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{4}r^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{4}r^2 + x^2)\,dm$$

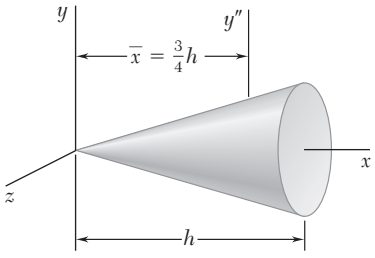
Substituindo as expressões para *r* e *dm* na equação, obtemos:

$$dI_y = \left(\frac{1}{4}\frac{a^2}{h^2}x^2 + x^2\right)\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)\frac{h^5}{5}$$

Introduzindo a massa total *m* do cone, reescrevemos I_y da seguinte maneira:

$$I_y = \tfrac{3}{5}(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2)\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h \qquad I_y = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) \;\blacktriangleleft$$



c. Momento de inércia $I_{y''}$. Aplicamos o teorema dos eixos paralelos e, assim, temos:

$$I_y = \bar{I}_{y''} + m\bar{x}^2$$

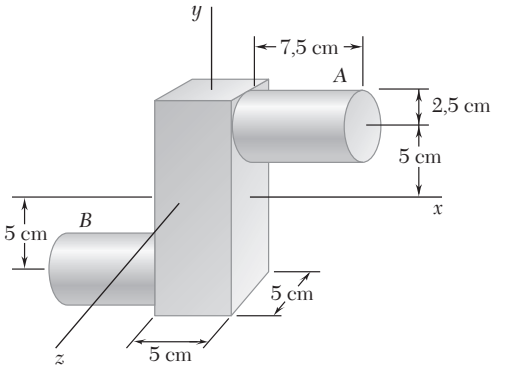
Resolvendo para $\bar{I}_{y''}$ e retomando $\bar{x} = \frac{3}{4}h$, temos:

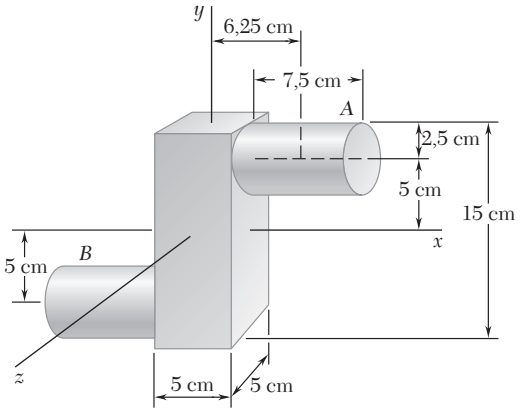
$$\bar{I}_{y''} = I_y - m\bar{x}^2 = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) - m(\tfrac{3}{4}h)^2$$

$$\bar{I}_{y''} = \tfrac{3}{20}m(a^2 + \tfrac{1}{4}h^2) \;\blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 9.12

Uma peça de aço forjado consiste em um prisma retangular de 15 × 5 × 5 cm e dois cilindros de 5 cm de diâmetro e 7,5 cm de comprimento, tal como mostra a figura. Determine os momentos de inércia da peça em relação aos eixos de coordenadas, sabendo que o peso específico do aço é 0,077 N/cm^3.





SOLUÇÃO

Cálculos das massas

Prisma

$$V = (5\text{ cm})(5\text{ cm})(15\text{ cm}) = 375\text{ cm}^3$$

$$W = \frac{(375\text{ cm}^3)(0{,}077\text{ N/cm}^3)}{1728\text{ in}^3/\text{ft}^3} = 28{,}875\text{N}$$

$$m = \frac{28{,}875\text{ N}}{9{,}81\text{ m/s}^2} = 2{,}943\text{ kg}$$

Cada cilindro

$$V = \pi(2{,}5\text{ cm})^2(7{,}5\text{ cm}) = 147{,}26\text{ cm}^3$$

$$W = \frac{(147{,}26\text{ cm}^3)(0{,}077\text{ N/m}^3)}{1728\text{ in}^3/\text{ft}^3} = 11{,}339\text{ N}$$

$$m = \frac{11{,}339\text{ N}}{9{,}81\text{ m/s}^2} = 1{,}156\text{ kg}$$

Momentos de inércia. Os momentos de inércia de cada componente são calculados a partir da Fig.9.28, usando-se o teorema dos eixos paralelos quando necessário. Observe que todos os comprimentos são expressos em centímetros.

Prisma

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{12}(2{,}943\text{ kg})[(15\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2] = 61{,}313\text{ kg}\cdot\text{cm}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{12}(2{,}943\text{ kg})[(5\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2] = 12{,}263\text{ kg}\cdot\text{cm}^2$$

Cada cilindro

$$I_x = \tfrac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 = \tfrac{1}{2}(1{,}156\text{ kg})(2{,}5\text{ cm})^2 + (1{,}156\text{ kg})(5\text{ cm})^2 = 32{,}513\text{ kg}\cdot\text{cm}$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) = m\bar{x}^2 = \tfrac{1}{12}(1{,}156\text{ kg})[3(2{,}5\text{ cm})^2 + (7{,}5\text{ cm})^2] + (1{,}156\text{ kg})(6{,}25\text{ cm})^2 = 52{,}381\text{ kg}\cdot\text{cm}$$

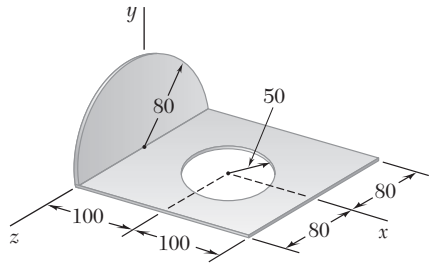
$$I_z = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \tfrac{1}{12}(1{,}156\text{ kg})[3(2{,}5\text{ cm})^2 + (7{,}5\text{ cm})^2] + (1{,}156\text{ kg})[(6{,}25\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2] = 81{,}281\text{ kg}\cdot\text{cm}^2$$

Todo o corpo. Adicionando os valores obtidos:

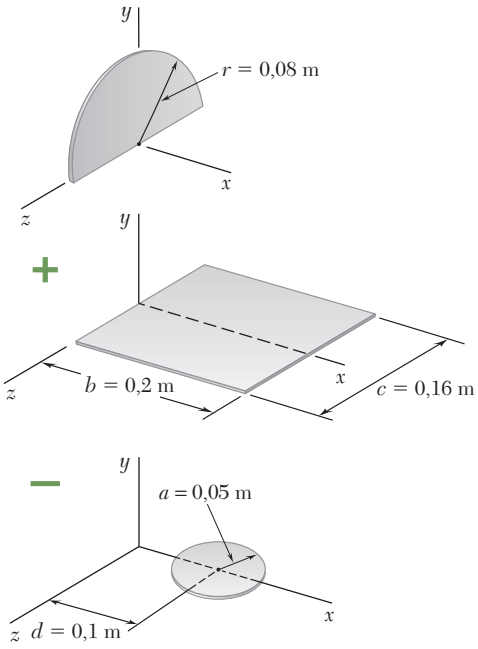
$$I_x = 61{,}313 + 2(32{,}513) \qquad I_x = 126{,}339\text{ kg}\cdot\text{cm}^2 \blacktriangleleft$$

$$I_y = 12{,}263 + 2(52{,}381) \qquad I_y = 117{,}025\text{ kg}\cdot\text{cm}^2 \blacktriangleleft$$

$$I_z = 61{,}313 + 2(81{,}281) \qquad I_z = 223{,}875\text{ kg}\cdot\text{cm}^2 \blacktriangleleft$$



Dimensões em mm



PROBLEMA RESOLVIDO 9.13

Uma placa de aço delgada de 4 mm de espessura é cortada e dobrada para formar a peça da máquina mostrada na figura. Sabendo que a massa específica do aço é 7.850 kg/m^3, determine os momentos de inércia da peça da máquina em relação aos eixos de coordenadas.

SOLUÇÃO

Observamos que a peça da máquina consiste em uma placa semicircular e uma placa retangular da qual foi retirada uma placa circular.

Cálculo das massas. ***Placa semicircular***

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 t = \tfrac{1}{2}\pi(0{,}08\text{ m})^2(0{,}004\text{ m}) = 40{,}21 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_1 = \rho V_1 = (7{,}85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(40{,}21 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 0{,}3156\text{ kg}$$

Placa retangular

$$V_2 = (0{,}200\text{ m})(0{,}160\text{ m})(0{,}004\text{ m}) = 128 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_2 = \rho V_2 = (7{,}85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(128 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 1{,}005\text{ kg}$$

Placa circular

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi(0{,}050\text{ m})^2(0{,}004\text{ m}) = 31{,}42 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_3 = \rho V_3 = (7{,}85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(31{,}42 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 0{,}2466\text{ kg}$$

Momentos de inércia. Adotando o método apresentado na Seção 9.13, calculamos os momentos de inércia de cada componente.

Placa semicircular. Observamos na Fig. 9.28 que, para uma placa circular de massa m e raio r:

$$I_x = \tfrac{1}{2}mr^2 \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{4}mr^2$$

Devido à simetria, temos que, para uma placa semicircular

$$I_x = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2) \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}mr^2)$$

Como a massa de uma placa semicular é $m_1 = \frac{1}{2}m$, temos:

$$I_x = \tfrac{1}{2}m_1 r^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}3156\text{ kg})(0{,}08\text{ m})^2 = 1{,}010 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}mr^2) = \tfrac{1}{4}m_1 r^2 = \tfrac{1}{4}(0{,}3156\text{ kg})(0{,}08\text{ m})^2 = 0{,}505 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Placa retangular

$$I_x = \tfrac{1}{12}m_2 c^2 = \tfrac{1}{12}(1{,}005\text{ kg})(0{,}16\text{ m})^2 = 2{,}144 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{3}m_2 b^2 = \tfrac{1}{3}(1{,}005\text{ kg})(0{,}2\text{ m})^2 = 13{,}400 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = I_x + I_z = (2{,}144 + 13{,}400)(10^{-3}) = 15{,}544 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Placa circular

$$I_x = \tfrac{1}{4}m_3 a^2 = \tfrac{1}{4}(0{,}2466\text{ kg})(0{,}05\text{ m})^2 = 0{,}154 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}m_3 a^2 + m_3 d^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}(0{,}2466\text{ kg})(0{,}05\text{ m})^2 + (0{,}2466\text{ kg})(0{,}1\text{ m})^2 = 2{,}774 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{4}m_3 a^2 + m_3 d^2 = \tfrac{1}{4}(0{,}2466\text{ kg})(0{,}05\text{ m})^2 + (0{,}2466\text{ kg})(0{,}1\text{ m})^2 =$$
$$= 2{,}620 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Peça da máquina completa

$$I_x = (1{,}010 + 2{,}144 - 0{,}154)(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_x = 3{,}00 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_y = (0{,}505 + 15{,}544 - 2{,}774)(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_y = 13{,}28 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_z = (0{,}505 + 13{,}400 - 2{,}620)(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_z = 11{,}29 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, apresentamos o *momento de inércia de massa* e o *raio de giração* de um corpo tridimensional em relação a um dado eixo [Eqs. (9.28) e (9.29)]. Também deduzimos um *teorema dos eixos paralelos* referente a momentos de inércia de massa e discutimos o cálculo dos momentos de inércia de massa de placas delgadas e corpos tridimensionais.

1. Cálculo dos momentos de inércia de massa. O momento de inércia de massa I de um corpo em relação a um dado eixo pode ser calculado diretamente a partir da definição dada na Eq. (9.28) para formatos comuns [Problema Resolvido 9.9]. Em muitos casos, porém, é necessário dividir o corpo em fatias delgadas, calcular o momento de inércia de uma fatia típica em relação ao eixo dado – usando o teorema dos eixos paralelos – e integrar a expressão obtida.

2. Aplicação do teorema dos eixos paralelos. Na Seção 9.12, deduzimos o teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia de massa

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{9.33}$$

estabelecendo que o momento de inércia I de um corpo de massa m em relação a um dado eixo é igual à soma do momento de inércia $\bar{I}$ desse corpo em relação ao *eixo centroidal paralelo* e ao produto md^2, sendo d a distância entre os dois eixos. Quando o momento de inércia de um corpo tridimensional é calculado em relação a um dos eixos de coordenadas, d^2 pode ser substituído pela soma dos quadrados das distâncias medidas ao longo dos outros dois eixos de coordenadas [Eqs. (9.32) e (9.32′)].

3. Evitando erros de unidades. Para evitar erros, é essencial que você seja consistente no uso de unidades. Logo, todos os comprimentos devem ser expressos em metros e todas as massas em Kg.cm^2 Assim, é fortemente recomendado que sejam incluídas as unidades ao efetuar os cálculos [Problemas Resolvidos 9.12 e 9.13].

4. Cálculo do momento de inércia de massa de placas delgadas. Mostramos na Seção 9.13 que o momento de inércia de massa de uma placa delgada em relação a um dado eixo pode ser obtido pelo produto do momento correspondente de inércia da superfície da placa com a massa específica ρ e a espessura t da placa [Eqs. (9.35) a (9.37)]. Observe que, sendo o eixo CC' na Fig. 9.24*c perpendicular à placa*, $I_{CC',\,\text{massa}}$ massa é associado ao momento de inércia *polar* $J_{C,\,\text{área}}$.

Em vez de calcular diretamente o momento de inércia de uma placa delgada em relação a um eixo especificado, às vezes podemos concluir que é mais conveniente calcular primeiro o momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao eixo especificado e, em seguida, aplicar o teorema dos eixos paralelos. Além disso, para determinar o momento de inércia de uma placa delgada em relação a um eixo perpendicular à placa, podemos querer determinar primeiro seus momentos de inércia em relação a dois eixos perpendiculares no plano e, então, usar a Eq. (9.38). Finalmente, lembre-se de que a massa de uma placa de área A, espessura t e massa específica ρ é $m = \rho tA$.

5. Determinação do momento de inércia de um corpo por integração direta simples. Discutimos na Seção 9.14 e exemplificamos nos Problemas Resolvidos 9.10 e 9.11 de que maneira se pode usar uma integração simples para calcular o momento de inércia de um corpo que pode ser dividido em uma série de elementos delgados paralelos. Nesses casos, às vezes você precisará expressar a massa do corpo em termos da massa específica e das dimensões do corpo. Assim como nos Problemas Resolvidos, considerando que o corpo tenha sido dividido em elementos delgados perpendiculares ao eixo x, precisaremos expressar as dimensões de cada elemento em função da variável x.

a. No caso especial de um corpo de revolução, o elemento é um disco delgado e as equações fornecidas na Fig. 9.27 devem ser usadas para determinar o momento de inércia do corpo [Problema Resolvido 9.11].

b. No caso geral, quando o corpo não é de revolução, o elemento diferencial não é um disco, mas um elemento delgado de formato diferente, e as equações da Fig. 9.27 não podem ser usadas. Veja, por exemplo, o Problema Resolvido 9.10, em que o elemento era uma placa delgada retangular. Para configurações mais complexas, podemos querer usar uma ou mais das seguintes equações, baseadas nas Eqs. (9.32) e (9.32′) da Seção 9.12.

$$dI_x = dI_{x'} + (\bar{y}_{el}^2 + \bar{z}_{el}^2)\, dm$$
$$dI_y = dI_{y'} + (\bar{z}_{el}^2 + \bar{x}_{el}^2)\, dm$$
$$dI_z = dI_{z'} + (\bar{x}_{el}^2 + \bar{y}_{el}^2)\, dm$$

onde as plicas indicam os eixos centroidais de cada elemento $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ e $\bar{z}_{el}$ e onde representam as coordenadas do seu centroide. Os momentos de inércia centroidais do elemento são determinados da maneira descrita anteriormente para uma placa delgada: voltando à Fig. 9.12, calcule os momentos correspondentes de inércia de superfície do elemento e multiplique o resultado pela massa específica ρ e pela espessura t do elemento. Além disso, considerando que o corpo tenha sido dividido em elementos delgados perpendiculares ao eixo x, lembre-se de que você pode obter $dI_{x'}$ adicionando $dI_{y'}$ e $dI_{z'}$, em vez de calculá-lo diretamente. Finalmente, usando a geometria do corpo, expresse o resultado obtido em termos da variável única x e integre em x.

6. Cálculo do momento de inércia de um corpo composto. Conforme estabelecemos na Seção 9.15, o momento de inércia de um corpo composto em relação a um eixo especificado é igual à soma dos momentos de inércia de seus componentes em relação ao mesmo eixo. Os Problemas Resolvidos 9.12 e 9.13 ilustram o método de solução adequado. Você deve se lembrar também de que o momento de inércia de um componente só será negativo se o componente estiver *removido* (como no caso de um furo).

Embora os problemas de corpos compostos desta seção sejam relativamente diretos, precisaremos trabalhar com cuidado para evitar erros de cálculo. Além disso, se alguns dos momentos de inércia de que você necessitar não estiverem dados na Fig. 9.28, teremos de deduzir suas próprias fórmulas usando as técnicas desta seção.

PROBLEMAS

9.111 Determine o momento de inércia de massa do anel de massa m, cortado de uma placa delgada uniforme, com relação (*a*) ao eixo AA' (*b*) ao eixo centroidal CC' que é perpendicular ao plano do anel.

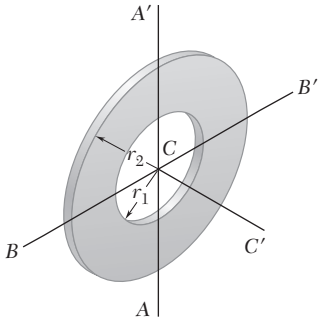


Figura P9.111

9.112 Um placa delgada semicircular tem massa m. Determine o momento de inércia de massa da placa em relação (*a*) ao eixo centroidal BB', (*b*) ao eixo centroidal CC' perpendicular à placa.

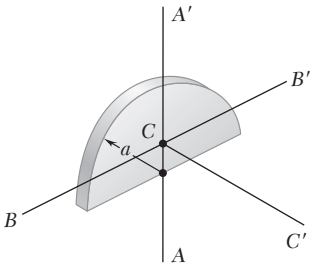


Figura P9.112

9.113 Um quarto de anel mostrado na figura tem massa m e foi cortado de uma placa delgada uniforme. Sabendo que $r_1 = \frac{3}{4} r_2$ determine o momento de inércia de massa de um quarto de anel em relação (*a*) ao eixo AA', (*b*) ao eixo centroidal CC' perpendicular ao plano de um quarto de anel.

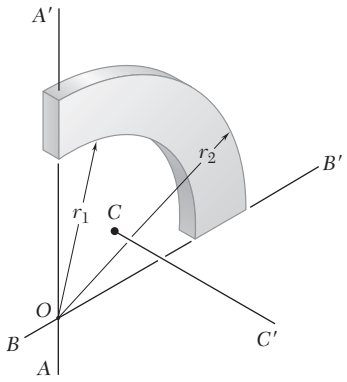


Figura P9.113

9.114 O arco parabólico mostrado na figura foi cortado de uma placa delgada uniforme. Indicando a massa do arco parabólico por m, determine seu momento de inércia com relação (*a*) ao eixo BB', (*b*) o eixo DD' que é perpendicular ao arco parabólico. (*Dica:* Ver o Problema Resolvido 9.3.)

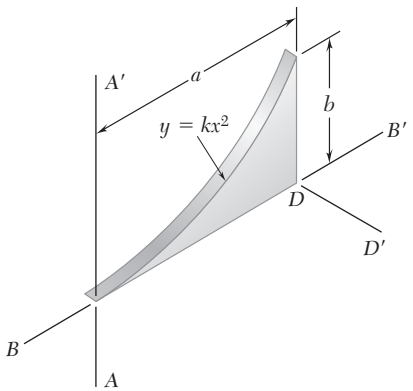


Figura P9.114

9.115 Uma placa delgada de massa m foi cortada em forma de paralelogramo com o mostra a figura. Determine o momento de inércia da massa da placa com relação (*a*) ao eixo x, (*b*) ao eixo BB' que é perpendicular a placa.

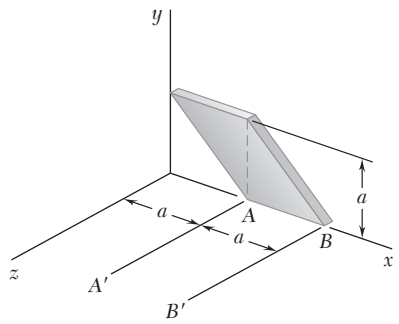


Figura P9.115 e P9.116

9.116 Uma placa delgada de massa m foi cortada em forma de paralelogramo como mostra a figura. Determine o momento de inércia da massa da placa com relação (a) ao eixo y, (b) ao eixo AA' que é perpendicular a placa.

9.117 Uma placa delgada de massa m tem o formato trapezoidal mostrado na figura. Determine o momento de inércia de massa da placa em relação (a) ao eixo x, (b) ao eixo y.

9.118 Uma placa delgada de massa m tem o formato trapezoidal mostrado na figura. Determine o momento de inércia de massa da placa em relação (a) ao eixo centroidal CC' perpendicular à placa, (b) ao eixo AA' paralelo ao eixo x e localizado a uma distância $1{,}5a$ da placa.

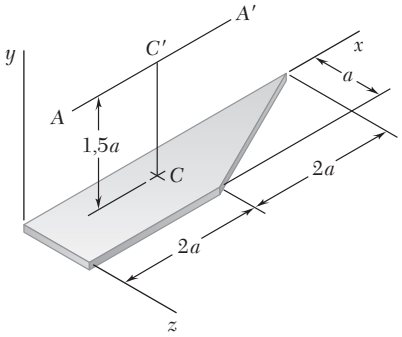


Figura *P9.117 e P9.118*

9.119 A superfície plana mostrada na figura é girada em torno do eixo x para formar um corpo de revolução homogêneo de massa m. Usando integração direta, expresse o momento de inércia do corpo em relação ao eixo x em termos de m e h.

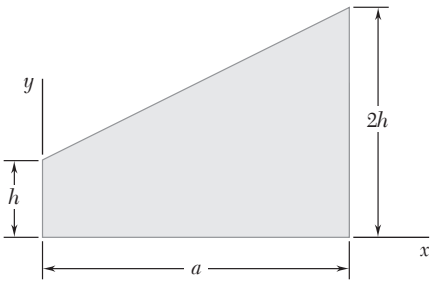


Figura P9.119

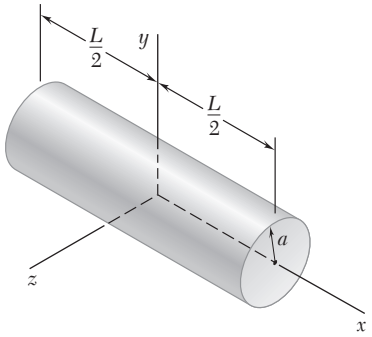


Figura P9.120

9.120 Determine por integração direta o momento de inércia em relação ao eixo y do cilindro circular mostrado na figura, considerando que ele tem massa específica uniforme e massa m.

9.121 A superfície plana mostrada na figura é girada em torno do eixo x para formar um corpo de revolução homogêneo de massa m. Determine por integração direta o momento de inércia do corpo em relação (a) ao eixo x, (b) ao eixo y. Expresse suas respostas em termos de m e as dimensões do sólido.

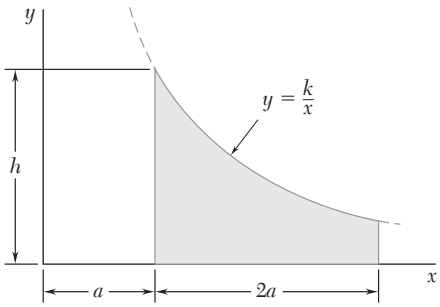


Figura P9.121

9.122 Determine por integração direta o momento de inércia em relação ao eixo x do corpo tetraédrico mostrado na figura, considerando que ele tem massa específica uniforme e massa m.

9.123 Determine por integração direta o momento de inércia em relação ao eixo y do corpo tetraédrico mostrado na figura, considerando que ele tem massa específica uniforme e massa m.

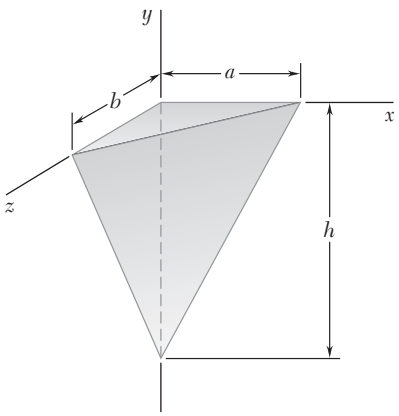


Figura P9.122 e P9.123

***9.124** Determine por integração direta o momento de inércia em relação ao eixo z do corpo em formato de semielipsoide mostrado na figura, considerando que ele tem massa específica uniforme e massa m.

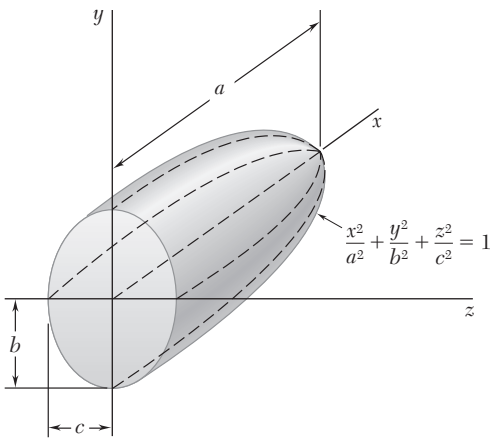


Figura P9.124

***9.125** Um arame fino de aço é dobrado no formato mostrado na figura. Representando por m' a massa por unidade de comprimento do arame, determine por integração direta o momento de inércia do arame em relação a cada um dos eixos coordenados.

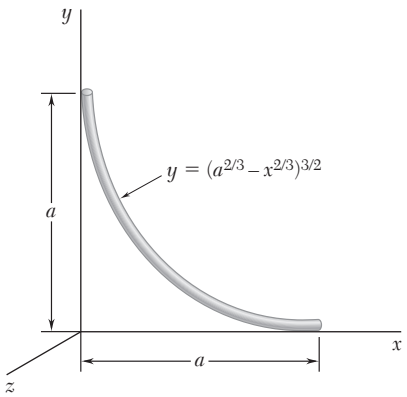


Figura P9.125

9.126 Uma placa delgada triangular de massa m é soldada ao longo de sua base AB a um bloco, tal como mostra a figura. Sabendo que a placa faz um ângulo θ com o eixo y, determine por integração direta o momento de inércia de massa da placa em relação (*a*) ao eixo x, (*b*) ao eixo y, (c) ao eixo z.

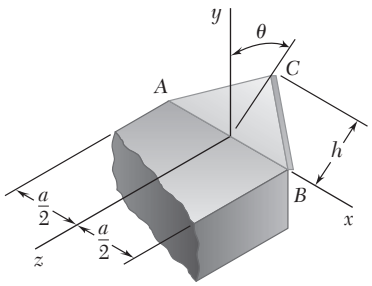


Figura P9.126

9.127 A figura mostra a seção transversal de uma polia plana fundida. Determine seu momento de inércia de massa e seu raio de giração em relação ao eixo AA'. (A massa específica do latão é 8.650 kg/m^3 e a massa específica do policarboneto reforçado em fibra é 1.250 kg/m^3.)

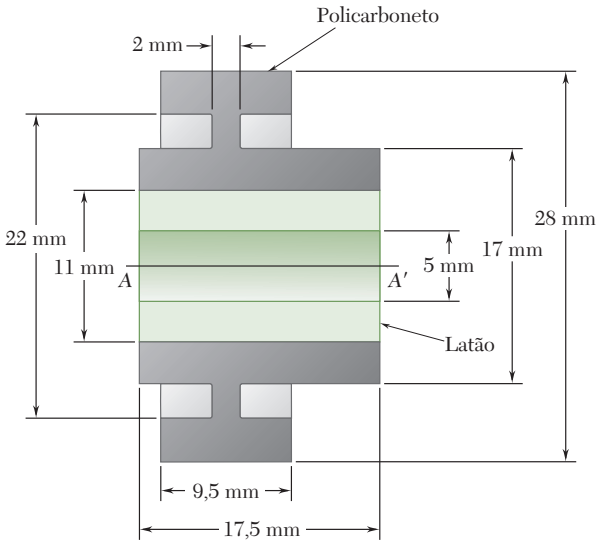


Figura P9.127

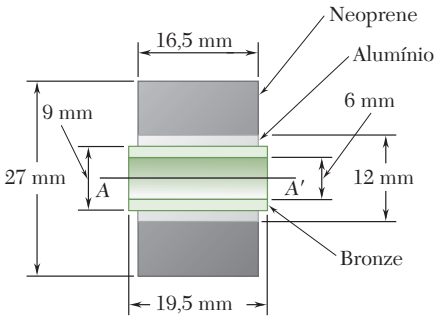


Figura P9.128

9.128 A figura mostra a seção transversal de um rolete esticador. Determine seu momento de inércia de massa e seu raio de giração em relação ao eixo AA'. (O peso específico do bronze é 84.170 N/m^3; do alumínio, 27.000 N/m^3; do neoprene, 12.260 N/m^3).

9.129 Sabendo que a casca cilíndrica delgada mostrada na figura tem massa m, espessura t e altura h, determine o momento de inércia de massa da casca em relação ao eixo x. (*Dica:* Considere que a casca é formada removendo-se um cilindro de raio a e altura h de um cilindro de raio $a + t$ e altura h; despreze os termos contendo t^2 e t^3, e mantenha aqueles termos que contenham t.)

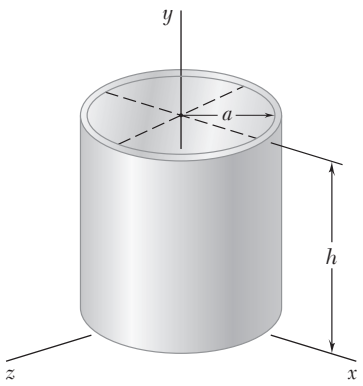


Figura P9.129

9.130 Uma peça de máquina mostrada na figura é formada por uma superfície cônica feita por usinagem num cilindro. Para $b = \frac{1}{2}h$, determine o momento de inércia de massa e o raio de giração da peça da máquina com relação a eixo y.

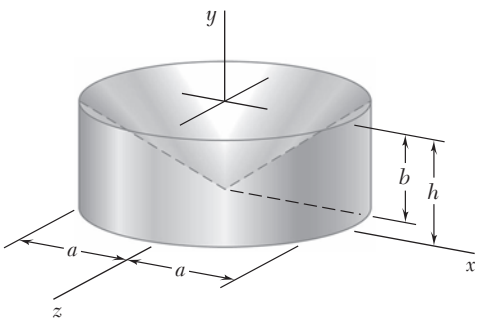


Figura P9.130

9.131 Após um período de uso, uma das lâminas de um desfibrador desgasta-se, assumindo o formato mostrado na figura de massa 0,18 kg. Sabendo que os momentos de inércia da lâmina em relação aos eixos AA' e BB' são 0,320 g · m^2 e 0,680 g · m^2, respectivamente, determine (*a*) a localização do eixo centroidal GG', (*b*) o raio de giração em relação ao eixo GG'.

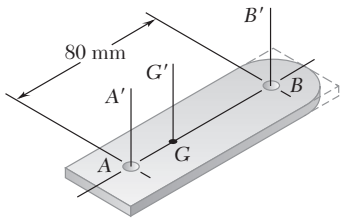


Figura P9.131

9.132 Determine o momento de inércia de massa de um componente de máquina de 4 N mostrado na figura com relação ao eixo AA'.

9.133 O componente de alumínio de uma máquina tem um furo de seção quadrada centrado ao longo de seu comprimento. Determine (*a*) o valor de *a* para que o momento de inércia do componente em relação ao eixo AA', que intercepta a superfície superior do furo, seja máximo, (*b*) os valores correspondentes do momento de inércia de massa e do raio de giração em relação ao eixo AA'. (O peso específico do alumínio é 27.000 N/m^3.)

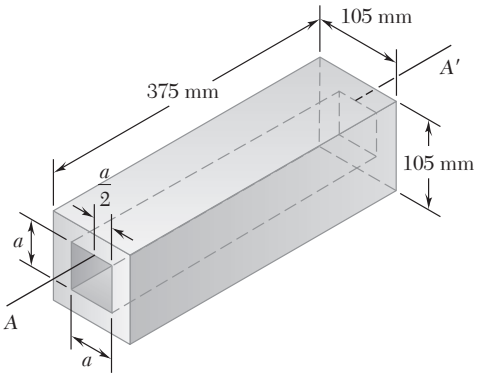


Figura P9.133

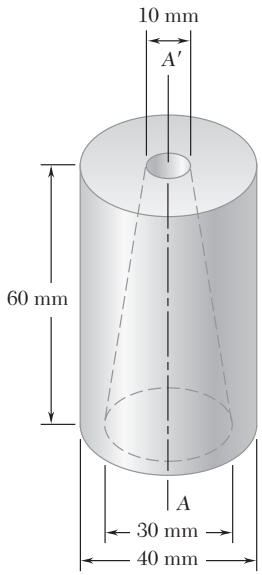


Figura P9.132

9.134 As conchas e os braços de um anemômetro são fabricados de um material de massa específica ρ. Sabendo que o momento de inércia de uma casca hemisférica de massa *m* e espessura *t* em relação ao seu eixo centroidal GG' é $5ma^2/12$, determine (*a*) o momento de inércia do anemômetro em relação ao eixo AA', (*b*) a razão a/l para que o momento de inércia centroidal das conchas seja igual a 1% do momento de inércia das conchas em relação ao eixo AA'.

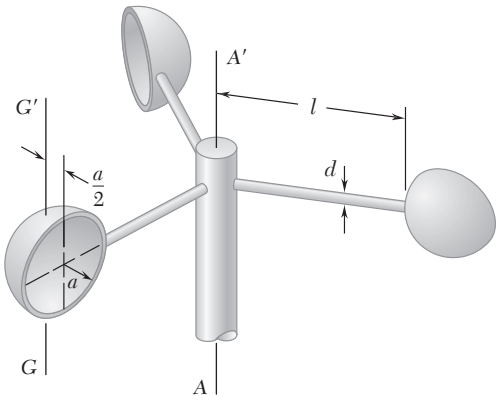


Figura P9.134

9.135 e 9.136 Um pedaço de chapa metálica de 2 mm de espessura é cortado e dobrado para formar o componente de máquina mostrado na figura. Sabendo que a massa específica do aço é 7.850 kg/m^3, determine o momento de inércia de massa do componente em relação a cada um dos eixos de coordenadas.

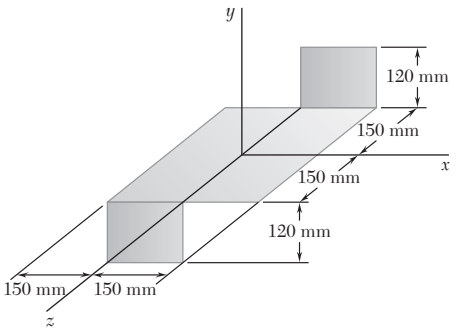


Figura P9.135

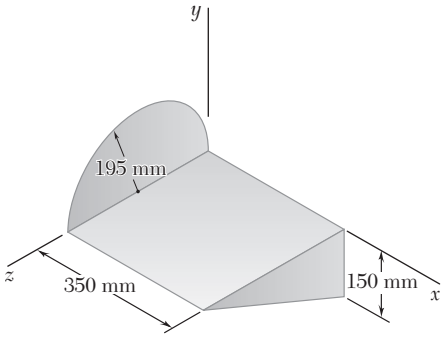


Figura P9.136

9.137 A tampa de um dispositivo eletrônico é feita com chapa de alumínio de 1,25 mm de espessura. Determine o momento de inércia de massa em relação a cada um dos eixos de coordenadas. (O peso específico do alumínio é 27.000 N/m^3.)

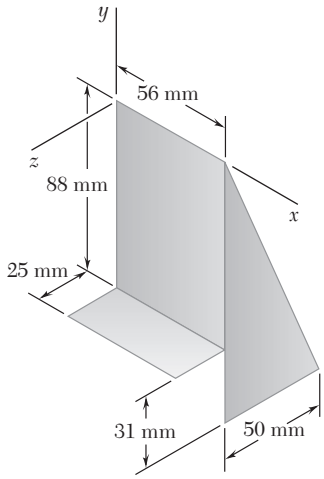


Figura P9.138

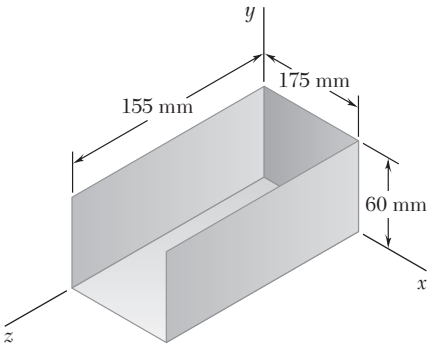


Figura P9.137

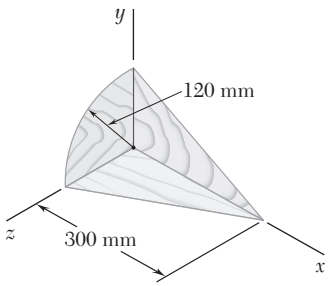


Figura P9.139

9.138 Um apoio estrutural é feito com chapa de aço galvanizado de 1,25 mm de espessura. Determine o momento de inércia de massa do apoio em relação a cada um dos eixos de coordenadas. (O peso específico do aço galvanizado é 77.000 N/m^3.)

9.139 Um subconjunto de um modelo de aeroplano é fabricado com três peças de 1,5 mm de madeira. Desprezando a massa do adesivo usado na montagem das três peças, determine o momento de inércia de massa do subconjunto com relação a cada um dos eixos coordenados. (A massa específica da madeira é 780 kg/m^3).

***9.140** Um fazendeiro constrói uma calha soldando uma chapa de aço retangular de espessura 2 mm a uma metade de um tambor. Sabendo que a massa específica do aço é 7.850 kg/m^3 e que a espessura das paredes do tambor é 1,8 mm, determine o momento de inércia da massa da calha em relação aos eixos coordenados. Despreze a massa das soldas.

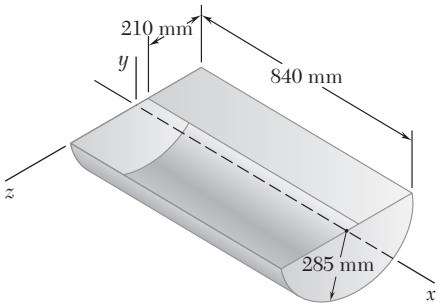


Figura *P9.140*

9.141 O elemento de máquina mostrado na figura é fabricado em aço. Determine o momento de inércia de massa do conjunto em relação (*a*) ao eixo *x*, (*b*) ao eixo *y*, (*c*) ao eixo *z*. (A massa específica do aço é 7.850 kg/m^3.)

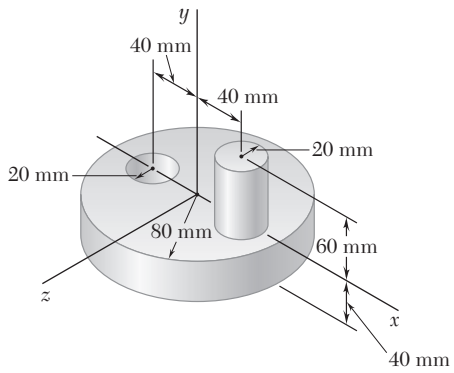


Figura P9.141

9.142 Determine o momento de inércia de massa do elemento de máquina de aço mostrado na figura em relação ao eixo *y*. (O peso específico do aço é 77.000 N/m^3.)

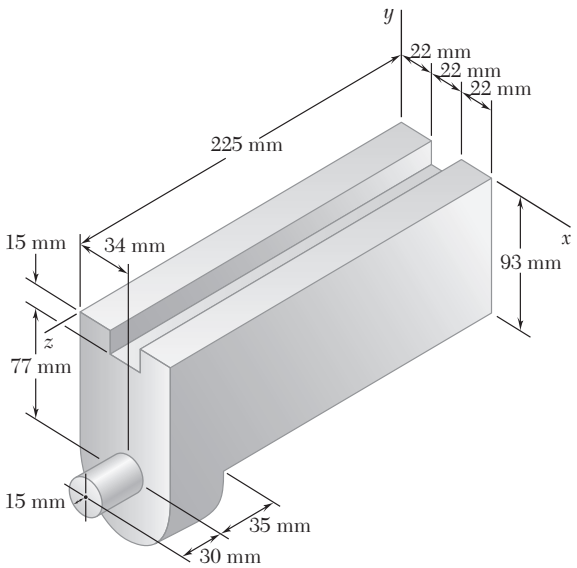


Figura P9.142 e *P9.143*

9.143 Determine o momento de inércia de massa do elemento de máquina de aço mostrado na figura em relação ao eixo *z*. (O peso específico do aço é 77.000 N/m^3.)

9.144 Determine o momento de inércia de massa e o raio de giração do elemento de máquina de aço mostrado na figura em relação ao eixo *x*. (A massa específica do aço é 7.850 kg/m^3.)

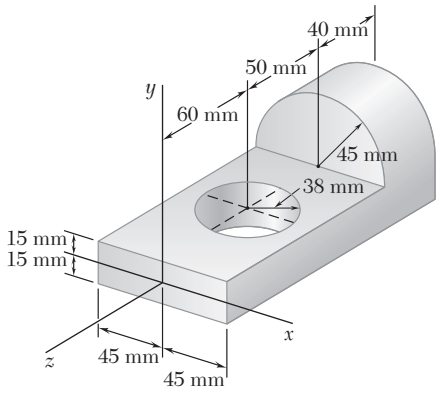


Figura P9.144

9.145 Determine o momento de inércia de massa do objeto de aço mostrado na figura em relação (*a*) ao eixo *x*, (*b*) ao eixo *y*, (*c*) ao eixo *z*. (A massa específica do aço é 7.850 kg/m^3.)

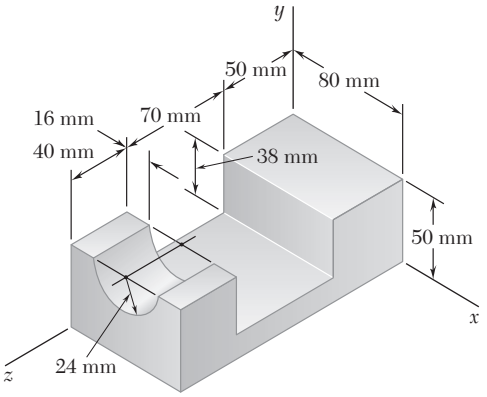


Figura P9.145

9.146 Um arame de alumínio com 0,049 kg/m de massa por unidade de comprimento é usado para formar o círculo e os membros retilíneos mostrados na figura. Determine o momento de inércia de massa do conjunto em relação a cada um dos eixos coordenados.

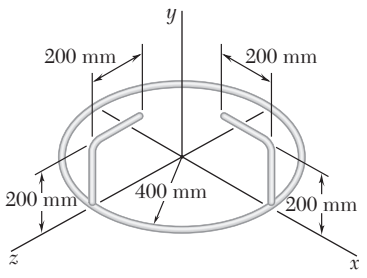


Figura *P9.146*

9.147 A armação mostrada na figura é formada por um arame de aço de 3 mm de diâmetro. Sabendo que a massa específica do aço é 7.850 kg/m^3, determine o momento de inércia de massa da armação em relação a cada um dos eixos coordenados.

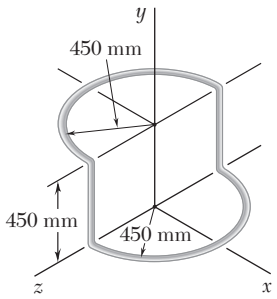


Figura P9.147

9.148 Um arame homogêneo com 0,056 kg/m de massa por unidade de comprimento é usado para formar a armação mostrada na figura. Determine o momento de inércia da armação em relação a cada um dos eixos coordenados.

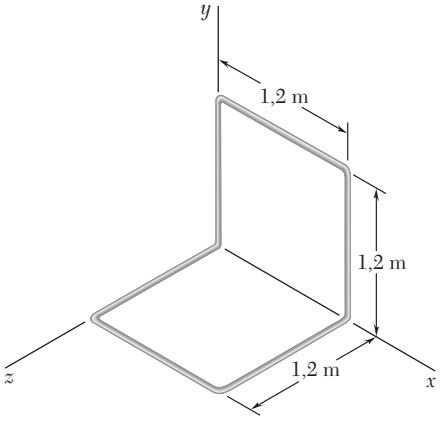


Figura P9.148

*9.16 Momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário que passa por O e produtos de inércia de corpos

Nesta seção, veremos que o momento de inércia de um corpo pode ser determinado em relação a um eixo arbitrário *OL* que passa pela origem (Fig. 9.29), se já estiverem determinados os momentos de inércia em relação aos três eixos de coordenadas, bem como outras grandezas a serem definidas a seguir.

O momento de inércia I_{OL} do corpo em relação a *OL* é igual a $\int p^2\,dm$, sendo p a distância perpendicular do elemento de massa dm ao eixo *OL*. Se representarmos por $\boldsymbol{\lambda}$ o vetor unitário ao longo de *OL* e por $\mathbf{r}$ o vetor posição do elemento dm, observamos que a distância perpendicular p é igual a r sen θ, que é a intensidade do produto vetorial $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}$. Logo, temos:

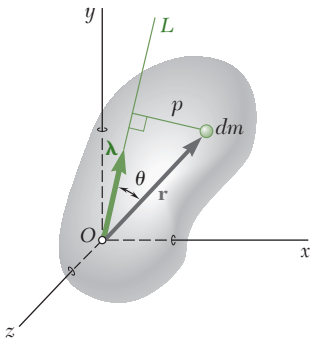


Figura 9.29

$$I_{OL} = \int p^2\,dm = \int |\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2\,dm \tag{9.43}$$

Expressando $|\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2$ em termos dos componentes retangulares do produto vetorial, temos

$$I_{OL} = \int [(\lambda_x y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2]\,dm$$

onde os componentes $\boldsymbol{\lambda}_x$, $\boldsymbol{\lambda}_y$, $\boldsymbol{\lambda}_z$ do vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ representam os cossenos diretores do eixo *OL* e os componentes x, y, z de $\mathbf{r}$ representam as coordenadas do elemento de massa dm. Expandindo os quadrados e rearrumando os termos, temos:

$$I_{OL} = \lambda_x^2 \int (y^2 + z^2)\,dm + \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2)\,dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2)\,dm$$
$$- 2\lambda_x\lambda_y \int xy\,dm - 2\lambda_y\lambda_z \int yz\,dm - 2\lambda_z\lambda_x \int zx\,dm \tag{9.44}$$

Voltando às Eqs. (9.30), notamos que as três primeiras integrais em (9.44) representam, respectivamente, os momentos de inércia I_x, I_y e I_z do corpo em relação aos eixos de coordenadas. As três últimas integrais em (9.44), que envolvem os produtos de coordenadas, são denominadas *produtos de inércia* do corpo em relação aos eixos x e y, aos eixos y e z e aos eixos z e x, respectivamente. Temos:

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \tag{9.45}$$

Reescrevendo a Eq. (9.44) em termos das integrais definidas nas Eqs. (9.30) e (9.45), temos:

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \tag{9.46}$$

Observamos que a definição dos produtos de inércia de um corpo dada nas Eqs. (9.45) é uma extensão da definição do produto de inércia de uma superfície (Seção 9.8). Produtos de inércia de um corpo reduzem-se a zero nas mesmas condições de simetria em que os produtos de inércia de uma superfície se anulam, e o teorema dos eixos paralelos para produtos de inércia de um corpo é expresso por relações similares à formula derivada para o produto de inércia de uma superfície. Substituindo as expressões para x, y e z dadas nas Eqs. (9.31) nas Eqs. (9.45), concluímos que

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\,\bar{y} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\,\bar{z} \\ I_{zx} &= \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\,\bar{x} \end{aligned} \tag{9.47}$$

sendo $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ as coordenadas do centro de gravidade G do corpo e $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$, $\bar{I}_{z'x'}$ representantes dos produtos de inércia do corpo em relação aos eixos centroidais x', y', z' (Fig. 9.22).

*9.17 Elipsoide de inércia e eixos principais de inércia

Vamos admitir que o momento de inércia do corpo considerado na seção anterior tenha sido determinado em relação a um grande número de eixos OL que passam pelo ponto fixo O e que tenha sido plotado um ponto O sobre cada eixo OL a uma distância $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ de O. O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos forma uma superfície (Fig. 9.30). A equação dessa superfície pode ser obtida substituindo-se I_{OL} por $1/(OQ)^2$ em (9.46) e depois multiplicando-se os membros da equação por $(OQ)^2$. Observando que

$$(OQ)\lambda_x = x \qquad (OQ)\lambda_y = y \qquad (OQ)\lambda_z = z$$

com x, y, z representando as coordenadas retangulares de Q, temos:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1 \tag{9.48}$$

A equação obtida é a equação de uma *superfície quádrica*. Como o momento de inércia I_{OL} é diferente de zero para cada eixo OL, nenhum ponto Q pode ficar a uma distância infinita de O. Portanto, a superfície

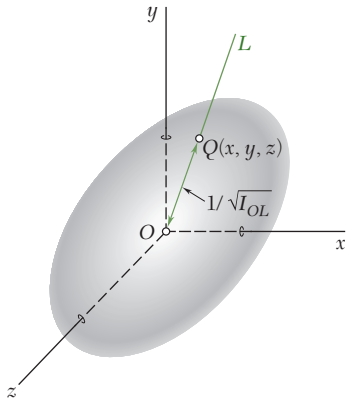


Figura 9.30

quádrica obtida é um *elipsoide*. Esse elipsoide, que define o momento de inércia do corpo em relação a qualquer eixo que passe por O, é conhecido como o *elipsoide de inércia* do corpo em O.

Observamos que, se os eixos na Fig. 9.30 são girados, os coeficientes da equação que define o elipsoide se alteram, pois tornam-se iguais aos momentos e produtos de inércia do corpo em relação aos eixos de coordenadas girados. No entanto, o *próprio elipsoide permanece inalterado*, pois sua forma depende apenas da distribuição de massa do corpo considerado. Suponha que escolhemos como eixo de coordenadas os eixos principais x', y', z' do elipsoide de inércia (Fig. 9.31). Sabe-se que a equação do elipsoide em relação a esses eixos de coordenadas é da forma

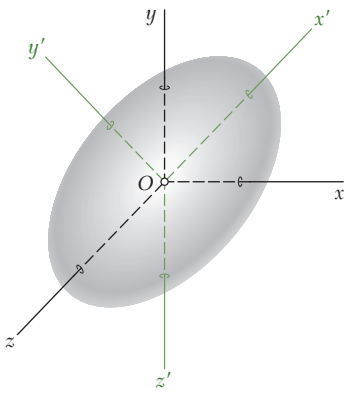


Figura 9.31

$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1 \tag{9.49}$$

que não contém quaisquer produtos das coordenadas. Comparando as Eqs. (9.48) e (9.49), observamos que os produtos de inércia do corpo em relação aos eixos x', y', z' precisam ser nulos. Os eixos x', y', z' são conhecidos como *eixos principais de inércia* do corpo em O e os coeficientes $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ são referidos como os *momentos principais de inércia* do corpo em O. Observe que, dado um corpo de formato arbitrário e um ponto O, sempre é possível encontrar eixos que são os eixos principais do corpo em O, ou seja, em relação aos quais os produtos de inércia do corpo são nulos. De fato, qualquer que seja o formato do corpo, os momentos e os produtos de inércia do corpo em relação aos eixos x, y e z que passam por O irão definir um elipsoide, e esse elipsoide terá eixos principais que, por definição, são os eixos principais de inércia do corpo em O.

Se os eixos principais de inércia x', y', z' são usados como eixos de coordenadas, a expressão obtida na Eq. (9.46) para o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário reduz-se a:

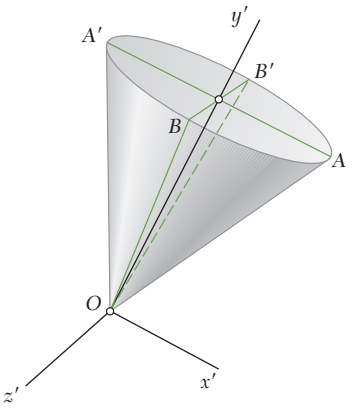


Figura 9.32

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \tag{9.50}$$

A determinação dos eixos principais de inércia de um corpo de formato arbitrário é um tanto complexa e será discutida na próxima seção. Todavia, há muitos casos em que esses eixos podem ser identificados de imediato. Por exemplo, considere o corpo cônico homogêneo de base elíptica mostrado na Fig. 9.32: esse corpo tem dois planos de simetria perpendiculares entre si, OAA' e OBB'. Observemos na definição (9.45) que, se os planos $x'y'$ e $y'z'$ são escolhidos para coincidir com os dois planos de simetria, todos os produtos de inércia são nulos. Portanto, os eixos x', y' e z' assim selecionados são os eixos principais de inércia do corpo cônico em O. No caso do corpo homogêneo em forma de tetraedro regular $OABC$ mostrado na Fig. 9.33, a linha que une o vértice O ao centro D da face oposta é um eixo principal de inércia em O, e qualquer linha que passe por O perpendicular a OD também é um eixo principal de inércia em O. Essa propriedade fica evidente se observarmos que uma rotação de 120° do corpo em torno de OD deixa inalterados o formato e a distribuição de massa. Resulta que o elipsoide de inércia em O também permanece inalterado mediante tal rotação. Logo, o elipsoide é um corpo de revolução cujo eixo de revolução é OD, e a linha OD, assim como qualquer linha perpendicular que passe por O, deve ser um eixo principal do elipsoide.

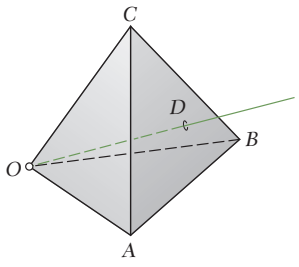


Figura 9.33

*9.18 Determinação dos eixos principais e dos momentos principais de inércia de um corpo de formato arbitrário

O método de análise descrito nesta seção deve ser usado quando o corpo que está em consideração não apresenta uma propriedade clara de simetria.

Considere o elipsoide de inércia do corpo em um dado ponto O (Fig. 9.34); seja $\mathbf{r}$ o vetor raio de um ponto P sobre a superfície do elipsoide e seja $\mathbf{n}$ o vetor unitário ao longo da normal a essa superfície em P. Observamos que os únicos pontos em que $\mathbf{r}$ e $\mathbf{n}$ são colineares são os pontos P_1, P_2 e P_3, onde os eixos principais interceptam a parte visível da superfície do elipsoide e os pontos correspondentes sobre o outro lado do elipsoide.

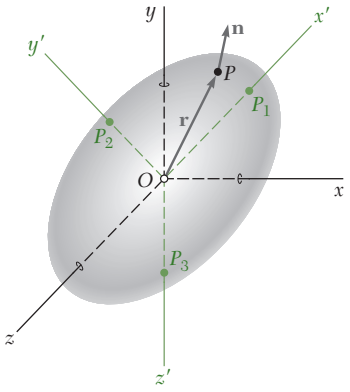


Figura 9.34

Lembremos agora do cálculo de que a direção da normal a uma superfície de equação $f(x, y, z) = 0$ em um ponto $P(x, y, z)$ é definida pelo gradiente ∇f da função f nesse ponto. Para obter os pontos em que os eixos principais interceptam a superfície do elipsoide de inércia, devemos então escrever que $\mathbf{r}$ e ∇f são colineares,

$$\nabla f = (2K)\mathbf{r} \tag{9.51}$$

sendo K uma constante, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, e

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k}$$

Retomando a Eq. (9.48), notamos que a função $f(x, y, z)$ correspondente ao elipsoide de inércia é:

$$f(x, y, z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 1$$

Substituindo $\mathbf{r}$ e ∇f na Eq. (9.51) e igualando os coeficientes dos vetores unitários, obtemos:

$$\begin{aligned} I_x x - I_{xy} y - I_{zx} z &= Kx \\ -I_{xy} x + I_y y - I_{yz} z &= Ky \\ -I_{zx} x - I_{yz} y + I_z z &= Kz \end{aligned} \tag{9.52}$$

Dividindo cada termo pela distância r de O a P, obtemos equações similares que envolvem os cossenos diretores λ_x, λ_y e λ_z:

$$\begin{aligned} I_x\lambda_x - I_{xy}\lambda_y - I_{zx}\lambda_z &= K\lambda_x \\ -I_{xy}\lambda_x + I_y\lambda_y - I_{yz}\lambda_z &= K\lambda_y \\ -I_{zx}\lambda_x - I_{yz}\lambda_y + I_z\lambda_z &= K\lambda_z \end{aligned} \tag{9.53}$$

Transpondo os termos do segundo membro para o primeiro, chegamos ao seguinte sistema de equações lineares homogênea:

$$\begin{aligned} (I_x - K)\lambda_x - I_{xy}\lambda_y - I_{zx}\lambda_z &= 0 \\ -I_{xy}\lambda_x + (I_y - K)\lambda_y - I_{yz}\lambda_z &= 0 \\ -I_{zx}\lambda_x - I_{yz}\lambda_y + (I_z - K)\lambda_z &= 0 \end{aligned} \tag{9.54}$$

Para que esse sistema tenha solução diferente da trivial, $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$, seu determinante deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} I_x - K & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y - K & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z - K \end{vmatrix} = 0 \tag{9.55}$$

Expandindo esse determinante e trocando sinais, temos

$$\begin{aligned} K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K \\ - (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \end{aligned} \tag{9.56}$$

Trata-se de uma equação cúbica em K que fornece três raízes reais positivas K_1, K_2 e K_3.

Para obter os cossenos diretores do eixo principal correspondente à raiz K_1, substituímos K por K_1 nas Eqs. (9.54). Como essas equações são agora linearmente dependentes, apenas duas delas podem ser usadas para se determinar λ_x, λ_y e λ_z. No entanto, pode-se obter uma equação adicional voltando à Seção 2.12, em que se viu que os cossenos diretores devem satisfazer a relação:

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \tag{9.57}$$

Repetindo esse procedimento com K_2 e K_3, obtemos os cossenos diretores dos outros dois eixos principais.

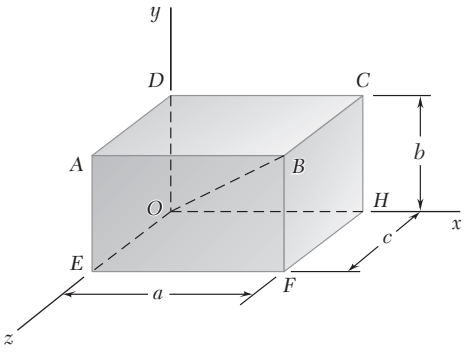
Vamos mostrar agora que *as raízes* K_1, K_2 e K_3 *da Eq. (9.56) são os momentos principais de inércia do corpo considerado.* Vamos substituir K nas Eqs. (9.53) pela raiz K_1 e λ_x, λ_y e λ_z pelos valores correspondentes $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ e $(\lambda_z)_1$ dos cossenos diretores; as três equações serão satisfeitas. Multipliquemos agora cada termo da primeira, segunda e terceira equações por $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ e $(\lambda_z)_1$, respectivamente, e adicionemos as equações obtidas desse modo. Resulta que:

$$\begin{aligned} I_x^2(\lambda_x)_1^2 + I_y^2(\lambda_y)_1^2 + I_z^2(\lambda_z)_1^2 - 2I_{xy}(\lambda_x)_1(\lambda_y)_1 \\ - 2I_{yz}(\lambda_y)_1(\lambda_z)_1 - 2I_{zx}(\lambda_z)_1(\lambda_x)_1 = K_1[(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2] \end{aligned}$$

Voltando à Eq. (9.46), observamos que o primeiro membro dessa equação representa o momento de inércia do corpo em relação ao eixo principal correspondente a K_1; logo, trata-se do momento principal de inércia correspondente a essa raiz. Por outro lado, voltando à Eq. (9.57), observamos que o segundo membro reduz-se a K_1. Portanto, K_1 é o próprio momento principal de inércia. Da mesma maneira, podemos mostrar que K_2 e K_3 são os outros momentos principais de inércia do corpo.

PROBLEMA RESOLVIDO 9.14

Considere o corpo em forma de prisma retangular de massa m e lados a, b, c. Determine (a) os momentos e os produtos de inércia do corpo em relação aos eixos de coordenadas mostradas na figura, (b) o momento de inércia do corpo em relação à diagonal OB.



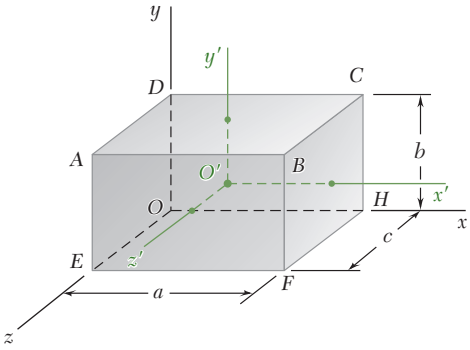
SOLUÇÃO

a. Momentos e produtos de inércia em relação aos eixos de coordenadas. ***Momentos de inércia.*** Apresentando os eixos centroidais x', y', z', em relação aos quais os momentos de inércia são fornecidos na Fig. 9.28, aplicamos o teorema dos eixos paralelos:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \tfrac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)$$

$$I_x = \tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2) \quad \blacktriangleleft$$

De forma semelhante: $I_y = \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ ◀



Produtos de inércia. Devido à simetria, os produtos de inércia em relação aos eixos centroidais x', y', z' são nulos, e estes são eixos principais de inércia. Usando o teorema dos eixos pararelos, temos:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\,\bar{y} = 0 + m(\tfrac{1}{2}a)(\tfrac{1}{2}b) \qquad I_{xy} = \tfrac{1}{4}mab \quad \blacktriangleleft$$

De forma semelhante: $I_{yz} = \tfrac{1}{4}mbc$ $I_{zx} = \tfrac{1}{4}mca$ ◀

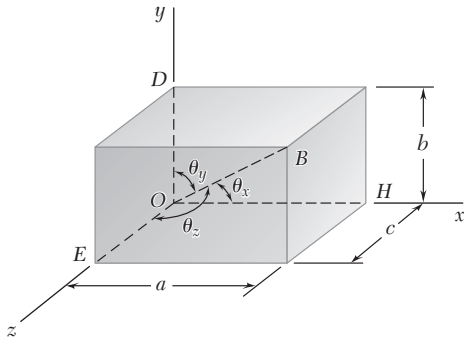
b. Momento de inércia em relação a *OB*. Referimo-nos à Eq. (9.46):

$$I_{OB} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$

onde os cossenos diretores de OB são:

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{OH}{OB} = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

$$\lambda_y = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \qquad \lambda_z = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

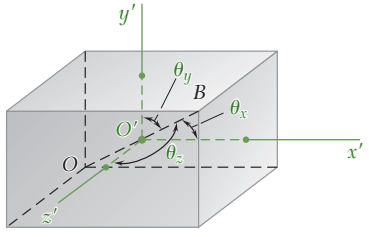


Substituindo os valores obtidos para os momentos e produtos de inércia e para os cossenos diretores na equação para I_{OB}, obtemos:

$$I_{OB} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\left[\tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2)a^2 + \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)b^2 + \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)c^2 - \tfrac{1}{2}ma^2b^2 - \tfrac{1}{2}mb^2c^2 - \tfrac{1}{2}mc^2a^2\right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \blacktriangleleft$$

Solução alternativa. O momento de inércia I_{OB} pode ser obtido diretamente dos momentos principais de inércia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$, pois a linha OB passa pelo centroide O'. Sendo x', y', z' os eixos principais de inércia, usamos a Eq. (9.50) para escrever:



$$I_{OB} = \bar{I}_{x'}\lambda_x^2 + \bar{I}_{y'}\lambda_y^2 + \bar{I}_{z'}\lambda_z^2$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\left[\frac{m}{12}(b^2 + c^2)a^2 + \frac{m}{12}(c^2 + a^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2 + b^2)c^2\right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 9.15

Se $a = 3c$ e $b = 2c$ para o prisma retangular do Problema Resolvido 9.14, determine (*a*) os momentos principais de inércia na origem *O*, (*b*) os eixos principais de inércia em *O*.

SOLUÇÃO

a. Momentos principais de inércia na origem O. Substituindo $a = 3c$ e $b = 2c$ na solução do Problema Resolvido 9.14, temos:

$$I_x = \tfrac{5}{3}mc^2 \qquad I_y = \tfrac{10}{3}mc^2 \qquad I_z = \tfrac{13}{3}mc^2$$
$$I_{xy} = \tfrac{3}{2}mc^2 \qquad I_{yz} = \tfrac{1}{2}mc^2 \qquad I_{zx} = \tfrac{3}{4}mc^2$$

Substituindo os valores dos momentos e os produtos de inércia na Eq. (9.56) e agrupando os termos, temos:

$$K^3 - (\tfrac{28}{3}mc^2)K^2 + (\tfrac{3.479}{144}m^2c^4)K - \tfrac{589}{54}m^3c^6 = 0$$

Em seguida, determinamos as raízes dessa equação; pela discussão da Seção 9.18, segue-se que essas raízes são os momentos principais de inércia do corpo na origem.

$$K_1 = 0{,}568867mc^2 \qquad K_2 = 4{,}20885mc^2 \qquad K_3 = 4{,}55562mc^2$$
$$K_1 = 0{,}569mc^2 \qquad K_2 = 4{,}21mc^2 \qquad K_3 = 4{,}56mc^2 \quad \blacktriangleleft$$

b. Eixos principais de inércia O. Para determinar a direção de um eixo principal de inércia, primeiro substituímos o valor correspondente de *K* em duas das Eqs. (9.54); as equações resultantes em conjunto com a Eq. (9.57) constituem um sistema de três equações do qual é possível determinar os cossenos diretores do eixo principal correspondente. Logo, para o primeiro momento principal de inércia K_1, temos:

$$(\tfrac{5}{3} - 0{,}568867)mc^2(\lambda_x)_1 - \tfrac{3}{2}mc^2(\lambda_y)_1 - \tfrac{3}{4}mc^2(\lambda_z)_1 = 0$$
$$-\tfrac{3}{2}mc^2(\lambda_x)_1 + (\tfrac{10}{3} - 0{,}568867)\,mc^2(\lambda_y)_1 - \tfrac{1}{2}mc^2(\lambda_z)_1 = 0$$
$$(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2 = 1$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$(\lambda_x)_1 = 0{,}836600 \qquad (\lambda_y)_1 = 0{,}496001 \qquad (\lambda_z)_1 = 0{,}232557$$

Assim, os ângulos que os eixos principais de inércia fazem com os eixos de coordenadas são:

$$(\theta_x)_1 = 33{,}2° \qquad (\theta_y)_1 = 60{,}3° \qquad (\theta_z)_1 = 76{,}6° \quad \blacktriangleleft$$

Usando sucessivamente o mesmo conjunto de equações com K_2 e K_3, concluímos que os ângulos associados ao segundo e terceiro momentos principais de inércia na origem são, respectivamente:

$$(\theta_x)_2 = 57{,}8° \qquad (\theta_y)_2 = 146{,}6° \qquad (\theta_z)_2 = 98{,}0° \quad \blacktriangleleft$$

e

$$(\theta_x)_3 = 82{,}8° \qquad (\theta_y)_3 = 76{,}1° \qquad (\theta_z)_3 = 164{,}3° \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, definimos os *produtos de inércia de massa* I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} de um corpo e mostramos como determinar os momentos de inércia desse corpo em relação a um eixo arbitrário que passa pela origem *O*. Também aprendemos como determinar na origem *O* os *eixos principais de inércia* de um corpo e os *momentos principais de inércia* correspondentes.

1. Determinação dos produtos de inércia de massa de um corpo composto. Os produtos de inércia de massa de um corpo composto em relação aos eixos de coordenadas podem ser expressos como as somas dos produtos de inércia de suas partes componentes em relação a esses eixos. Para cada parte componente, podemos usar o teorema dos eixos paralelos e escrever as Eqs. (9.47)

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\,\bar{y} \qquad I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\,\bar{z} \qquad I_{zx} = \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\,\bar{x}$$

onde as plicas indicam os eixos centroidais de cada parte componente e $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ representam as coordenadas do seu centro de gravidade. Temos que ter em mente que os produtos de inércia de massa de um corpo podem ser positivos, negativos ou nulos, e certifiquemo-nos de levar em conta os sinais de $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$.

a. Das propriedades de simetria de uma parte componente, pode-se deduzir que dois ou todos os três de seus produtos de inércia de massa são nulos. Por exemplo, para uma placa delgada paralela ao plano *xy;* um arame situado em um plano paralelo ao plano *xy;* um corpo com um plano de simetria paralelo ao plano *xy;* e um corpo com um eixo de simetria paralelo ao eixo *z*, pode-se verificar que *os produtos de inércia* $\bar{I}_{y'z'}$, e $\bar{I}_{z'x'}$ *são nulos.*

Para placas retangulares, circulares ou semicirculares com eixos de simetria paralelos aos eixos de coordenadas; arames retilíneos paralelos a um eixo de coordenadas; arames circulares e semicirculares com eixos de simetria paralelos aos eixos de coordenadas; e prismas retangulares com eixos de simetria paralelos aos eixos de coordenadas, *os produtos de inércia* $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$ e $I_{z'x'}$ *são todos nulos.*

b. Produtos de inércia diferentes de zero podem ser calculados pelas Eqs. (9.45). Embora geralmente seja necessária uma integração tripla para se determinar um produto de inércia de massa, uma integração simples poderá ser usada caso o corpo em consideração possa ser dividido em uma série de elementos delgados paralelos. Nesse caso, os cálculos serão semelhantes àqueles discutidos na lição anterior para os momentos de inércia.

(*continua*)

2. Cálculo do momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário *OL*. Uma expressão para o momento de inércia I_{OL} foi deduzida na Seção 9.16 e é dada na Eq. (9.46). Antes de calcular I_{OL}, devemos determinar os momentos de massa e os produtos de inércia do corpo em relação aos eixos de coordenadas dados, bem como os cossenos diretores do vetor unitário λ ao longo de *OL*.

3. Cálculo dos momentos principais de inércia de um corpo e determinação de seus eixos principais de inércia. Vimos na Seção 9.17 que é sempre possível encontrar uma orientação dos eixos de coordenadas para a qual os produtos de inércia de massa são nulos. Esses eixos são citados como os *eixos principais de inércia*, e os momentos de inércia correspondentes são conhecidos como os *momentos principais de inércia* do corpo. Em muitos casos, os eixos principais de inércia de um corpo podem ser determinados por suas propriedades de simetria. O procedimento para se determinarem os momentos e os eixos principais de inércia de um corpo sem propriedade evidente de simetria foi discutido na Seção 9.18 e ilustrado no Problema Resolvido 9.15. Esse procedimento consiste nos seguintes passos.

a. Expandir o determinante da Eq. (9.55) e resolver a equação cúbica resultante. A solução pode ser obtida por tentativa e erro ou, de preferência, com uma calculadora científica avançada ou um programa de computador apropriado. As raízes K_1, K_2 e K_3 dessa equação são os momentos principais de inércia do corpo.

b. Para determinar a direção do eixo principal correspondente a K_1, devemos substituir esse valor de $\mathbf{K}$ em duas das Eqs. (9.54) e resolver essas equações em conjunto com a Eq. (9.57) para os cossenos diretores do eixo principal correspondente a K_1.

c. Repitir esse procedimento com K_2 e K_3 para se determinar as direções dos outros dois eixos principais. Para se certificar dos cálculos, podemos verificar que o produto escalar de dois vetores unitários quaisquer ao longo dos eixos que obtivemos é nulo e, portanto, que esses eixos são perpendiculares entre si.

PROBLEMAS

9.149 Determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} do aparelho de aço mostrado na figura. (A massa específica do aço é 7.850 kg/m^3.)

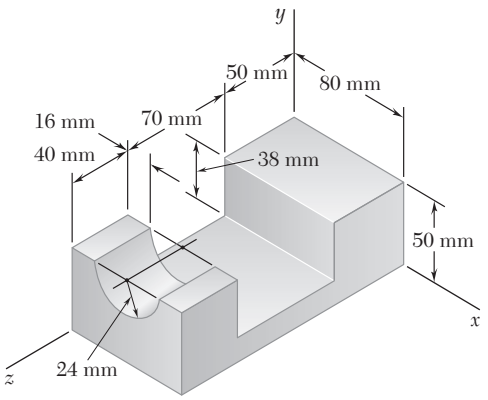


Figura P9.149

9.150 Determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} da peça de máquina de aço mostrado na figura. (A massa específica do aço é 7.850 kg/m^3.)

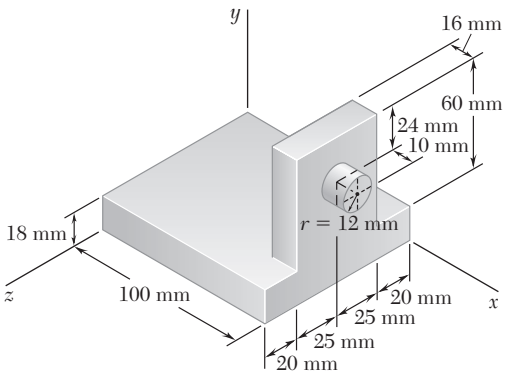


Figura P9.150

9.151 e 9.152 Determine os produtos de inércia de massa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} da peça de máquina de alumínio fundido mostrado na figura. (O peso específico do alumínio é 27.000 N/m^3.)

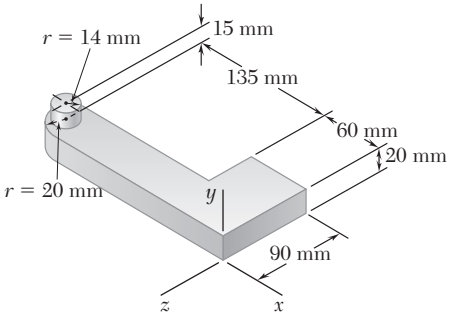


Figura P9.151

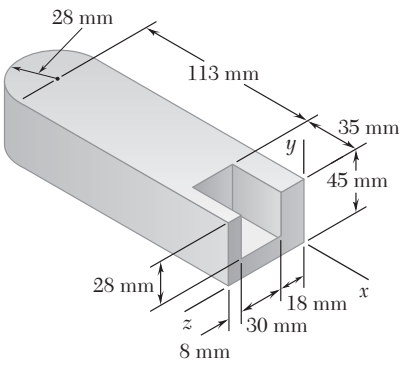


Figura P9.152

9.153 a 9.156 Uma seção de chapa de aço de 2 mm de espessura é cortada e dobrada para formar o componente de máquina mostrado na figura. Sabendo que a massa específica do aço é 7.850 kg/m^3, determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} do componente.

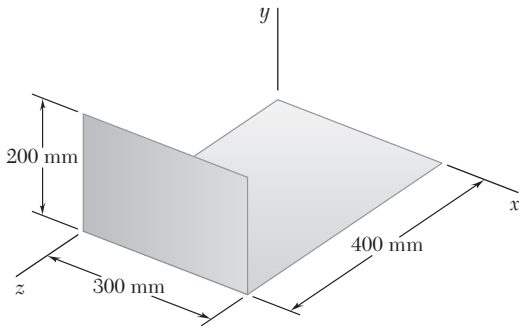


Figura P9.153

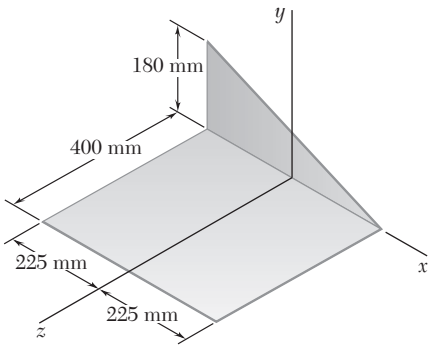


Figura P9.154

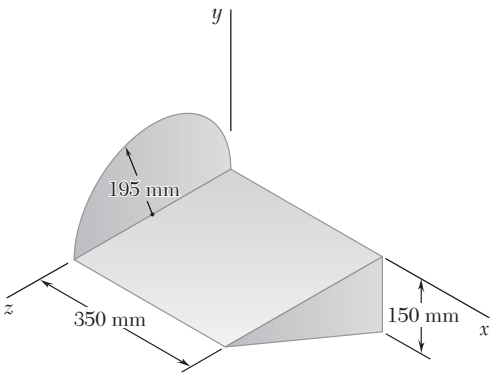


Figura P9.155

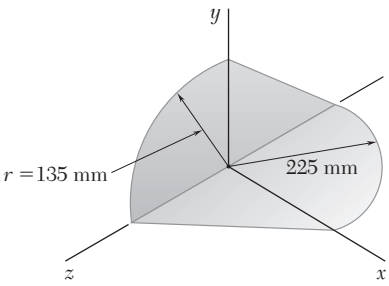


Figura P9.156

9.157 e 9.158 Um arame de latão com peso por unidade de comprimento w é usado para formar a armação mostrada na figura. Determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} da armação.

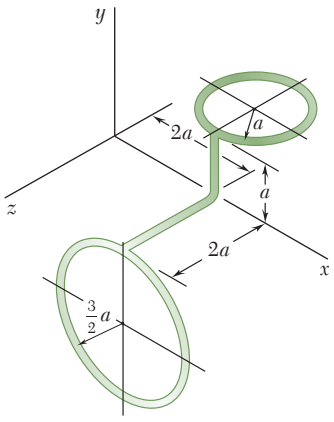


Figura P9.157

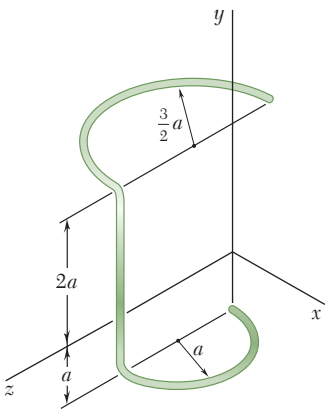


Figura P9.158

9.159 A armação mostrada na figura é formada por um arame de alumínio de 1,5 mm de espessura. Sabendo que a massa específica do alumínio é 2.700 N/mm^3, determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} da armação.

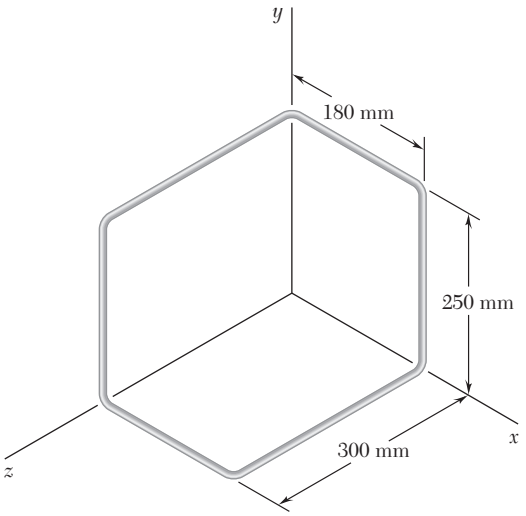


Figura P9.159

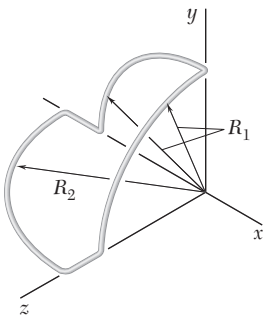


Figura P9.160

9.160 Um arame fino de alumínio com diâmetro uniforme é usado para formar a armação mostrada na figura. Representado por m' a massa por unidade de comprimento do arame, determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} da armação.

9.161 Complete a dedução das Eqs. (9.47), que representam o teorema de eixos paralelos para produtos de inércia de massa.

9.162 Para o tetraedro homogêneo de massa m mostrado na figura, (*a*) determine por integração direta o produto de inércia I_{zx}, (*b*) deduza I_{yz} e I_{xy} dos resultados obtidos no item *a*.

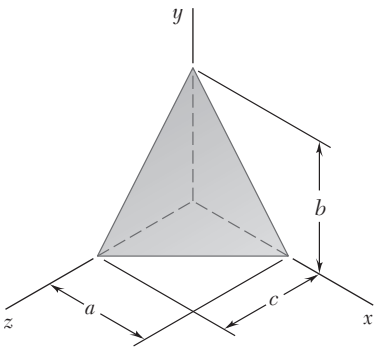


Figura P9.162

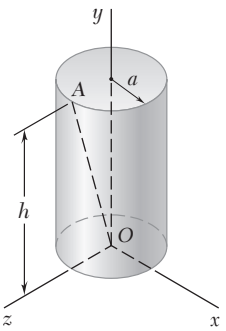


Figura *P9.163*

9.163 O cilindro circular homogêneo mostrado na figura tem massa m. Determine o momento de inércia do cilindro em relação à linha que liga a origem O e o ponto A localizado sobre o perímetro da superfície superior do cilindro.

9.164 O cone circular homogêneo mostrado na figura tem massa m. Determine o momento de inércia do cone em relação à linha que liga a origem O e o ponto A.

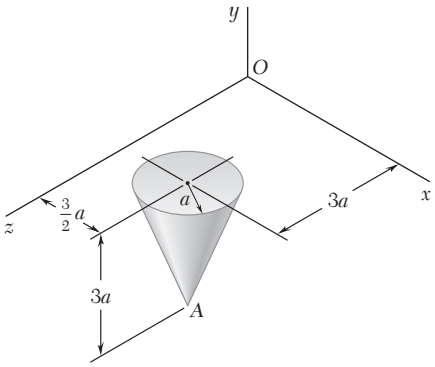


Figura P9.164

9.165 A figura mostra o elemento de máquina do Problema 9.141. Determine seus momentos de inércia em relação à linha que liga a origem O e o ponto A.

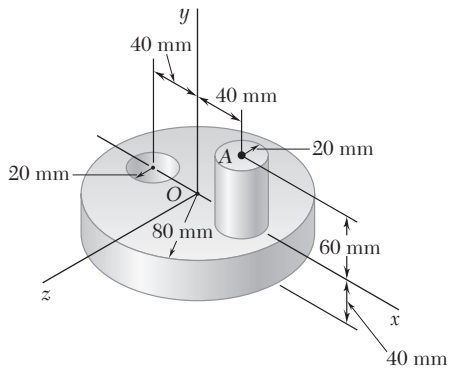


Figura P9.165

9.166 Determine o momento de inércia do elemento de máquina de aço dos Problemas 9.145 e 9.149 em relação ao eixo que passa pela origem e forma ângulos iguais com os eixos x, y e z.

9.167 Na figura é mostrada uma placa delgada dobrada de massa específica uniforme e peso W. Determine seu momento de inércia de massa em relação à linha que liga a origem O e o ponto A.

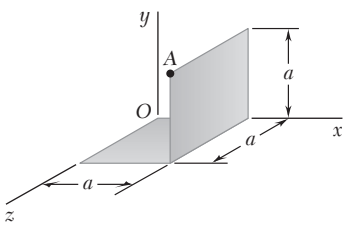


Figura P9.167

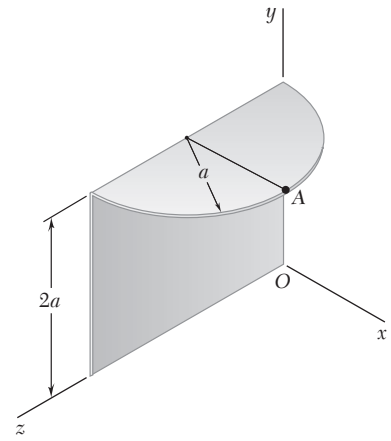


Figura P9.168

9.168 Um pedaço de chapa metálica de espessura t e massa específica ρ é cortada e dobrada no formato mostrado na figura. Determine seu momento de inércia de massa em relação à linha que liga a origem O e ponto A.

9.169 Determine o momento de inércia de massa do componente da máquina dos Problemas 9.136 e 9.155 em relação ao eixo que passa pela origem caracterizado pelo vetor unitário $\boldsymbol{\lambda} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k})/9$.

9.170 a *9.172* Para a armação de arame do problema indicado, determine o momento de inércia de massa da armação em relação ao eixo que passa pela origem caracterizado pelo vetor unitário $\boldsymbol{\lambda} = (-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$.

9.170 Problema 9.148.

9.171 Problema 9.147.

9.172 Problema 9.146.

9.173 Para o prisma retangular mostrado na figura, determine os valores das razões b/a e c/a para que o elipsoide de inércia do prisma seja uma esfera quando calculado (a) no ponto A, (b) no ponto B.

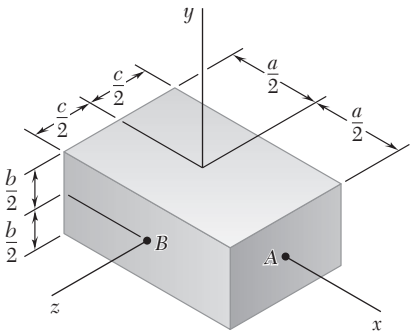


Figura P9.173

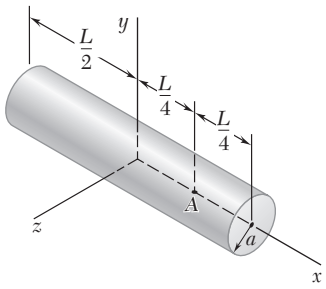


Figura P9.175

9.174 Para o cone circular do Problema Resolvido 9.11, determine o valor da razão a/h para que o elipsoide de inércia do cone seja uma esfera quando calculado (a) no vértice do cone, (b) no centro da base do cone.

9.175 Para o cilindro circular homogêneo mostrado na figura, de raio a e comprimento L, determine o valor da razão a/L para que o elipsoide de inércia do cilindro seja uma esfera quando calculado (a) no centroide do cilindro, (b) no ponto A.

9.176 Dado um corpo arbitrário e três eixos retangulares x, y e z, demonstre que o momento de inércia do corpo em relação a qualquer um dos três eixos não pode ser maior que a soma dos momentos de inércia do corpo em relação aos outros dois eixos. Em outras palavras, demonstre que a desigualdade $I_x \leq I_y + I_z$ e as duas desigualdades similares são satisfeitas. Além disso, demonstre que $I_y \geq \frac{1}{2}I_x$ caso o corpo seja sólido de revolução homogêneo, com x representando o eixo de revolução e y um eixo transversal.

9.177 Considere um cubo de massa m e lado a. (a) Mostre que o elipsoide de inércia no centro do cubo é uma esfera e use essa propriedade para determinar o momento de inércia do cubo em relação a uma de suas diagonais. (b) Mostre que o elipsoide de inércia em um dos vértices do cubo é um elipsoide de revolução e determine os momentos principais de inércia do cubo nesse ponto.

9.178 Dado um corpo homogêneo de massa m e de formato arbitrário e três eixos retangulares x, y e z com origem em O, demonstre que a soma $I_x + I_y + I_z$ dos momentos de inércia do corpo não pode ser menor que a soma equivalente calculada para uma esfera de igual massa e mesmo material centrada em O. Além disso, usando os resultados do Problema 9.176, mostre que, se o corpo é sólido de revolução, com x representando o eixo de revolução, seu momento de inércia I_y em relação a um eixo transversal y não pode ser menor que $3ma^2/10$, sendo a o raio da esfera de igual massa e mesmo material.

***9.179** O cilindro circular homogêneo mostrado na figura tem massa m, e o diâmetro OB da sua superfície superior forma ângulos de 45° com os eixos x e z. (a) Determine os momentos principais de inércia do cilindro na origem O. (b) Calcule os ângulos que os eixos principais de inércia em O formam com os eixos de coordenadas. (c) Esboce o cilindro e mostre a orientação dos eixos principais de inércia em relação aos eixos x, y e z.

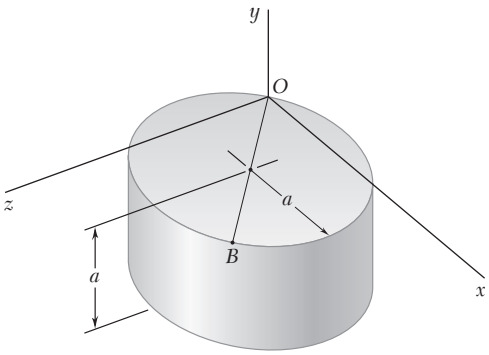


Figura P9.179

9.180 a *9.184 Para o componente descrito no problema indicado, determine (a) os momentos principais de inércia na origem, (b) os eixos principais de inércia na origem. Esboce o corpo e mostre a orientação dos eixos principais de inércia em relação aos eixos x, y e z.

***9.180** Problema 9.165.
***9.181** Problema 9.145 e 9.149.
***9.182** Problema 9.167.
***9.183** Problema 9.168.
***9.184** Problema 9.148 e 9.170.

REVISÃO E RESUMO

Na primeira metade deste capítulo, discutimos a determinação da resultante **R** de forças $\Delta\mathbf{F}$ distribuídas sobre uma superfície plana A quando as intensidades dessas forças são proporcionais tanto às áreas ΔA dos elementos sobre os quais elas atuam quanto às distâncias y entre esses elementos a um dado eixo x; temos, então, $\Delta F = ky\,\Delta A$. Verificamos que a intensidade da resultante **R** é proporcional ao momento de primeira ordem $Q_x = \int y\,dA$ da superfície A, ao passo que o momento de **R** em relação ao eixo x é proporcional ao *momento de segunda ordem*, ou *momento de inércia*, $I_x = \int y^2 dA$, de A em relação ao mesmo eixo [Seção 9.2].

Momentos de inércia retangulares

Os *momentos de inércia retangulares* I_x *e* I_y *de uma superfície* [Seção 9.3] foram obtidos pela avaliação das integrais:

$$I_x = \int y^2\,dA \qquad I_y = \int x^2\,dA$$

Esses cálculos podem ser reduzidos a integrações simples, escolhendo-se dA como sendo um elemento estreito paralelo a um dos eixos de coordenadas. Lembremos também de que é possível calcular I_x e I_y com o mesmo elemento (Fig. 9.35) usando a fórmula para o momento de inércia de uma superfície retangular [Problema Resolvido 9.3].

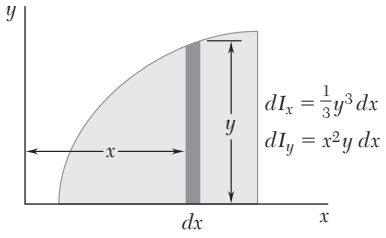


Figura 9.35

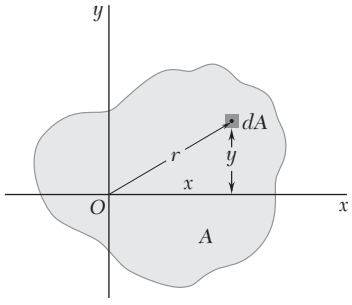


Figura 9.36

Momentos de inércia polar

O *momento de inércia polar de uma superfície* A em relação a um polo O [Seção 9.4] foi definido como

$$J_O = \int r^2\,dA \tag{9.3}$$

sendo r a distância de O ao elemento de área dA (Fig. 9.36). Observando que $r^2 = x^2 + y^2$, estabelecemos a relação:

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

Raio de giração

O *raio de giração de uma superfície* A em relação ao eixo x [Seção 9.5] foi definido como a distância k_x, sendo $I_x = k_x^2 A$. Com definições seme-

lhantes para os raios de giração de A em relação ao eixo y e em relação ao polo O, temos:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{9.5–9.7}$$

Teorema dos eixos paralelos

O teorema dos eixos paralelos foi apresentado na Seção 9.6. Esse teorema estabelece que o momento de inércia I de uma superfície em relação a um dado eixo AA' (Fig. 9.37) é igual ao momento de inércia $\bar{I}$ da superfície em relação ao eixo centroidal BB' paralelo a AA' *mais* o produto da área A pelo quadrado da distância d entre os dois eixos:

$$I = \bar{I} + Ad^2 \tag{9.9}$$

Essa fórmula também pode ser usada para se determinar o momento de inércia $\bar{I}$ de uma superfície em relação a um eixo centroidal BB' quando se conhece seu momento de inércia I em relação a um eixo paralelo AA'. Nesse caso, porém, o produto Ad^2 deve ser *subtraído* do momento de inércia I conhecido.

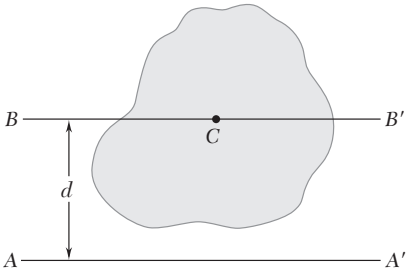


Figura 9.37

Uma relação equivalente existe entre o momento de inércia polar J_O de uma superfície em relação a um ponto O e o momento de inércia polar J_C da mesma superfície em relação ao seu centroide C. Representado por d a distância entre O e C, temos:

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \tag{9.11}$$

Superfícies compostas

O teorema dos eixos paralelos pode ser usado de maneira bastante eficaz para se calcular o *momento de inércia de uma superfície composta* em relação a um dado eixo [Seção 9.7]. Considerando cada superfície componente em separado, calculamos primeiro o momento de inércia de cada superfície em relação ao seu eixo centroidal, usando os dados fornecidos nas Figs. 9.12 e 9.13 sempre que possível. Em seguida, aplicamos o teorema dos eixos paralelos para determinar o momento de inércia de cada superfície componente em relação ao eixo desejado e acrescentamos os vários valores obtidos [Problemas Resolvidos 9.4 e 9.5].

Produto de inércia

As Seções 9.8 a 9.10 foram dedicadas à transformação dos momentos de inércia de uma superfície *mediante uma rotação dos eixos de coordenadas.* Primeiro, definimos o *produto de inércia de uma superfície* A como

$$I_{xy} = \int xy\, dA \tag{9.12}$$

e mostramos que $I_{xy} = 0$, se a superfície A for simétrica em relação a um ou ambos os eixos de coordenadas. Deduzimos também o *teorema dos eixos paralelos para produtos de inércia.* Obtivemos

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\,\bar{y}A \tag{9.13}$$

sendo $I_{x'y'}$, o produto de inércia da superfície em relação aos eixos centroidais x' e y' paralelos aos eixos x e y, respectivamente, e $\bar{x}$ e $\bar{y}$ as coordenadas do centroide da superfície [Seção 9.8].

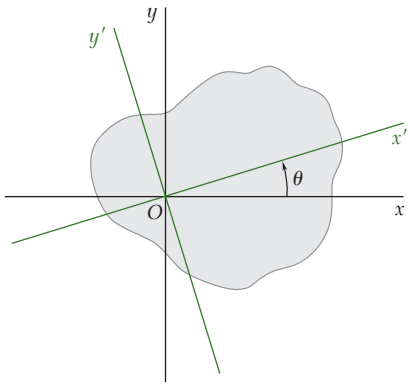


Figura 9.38

Rotação de eixos

Na Seção 9.9, determinamos os momentos e o produto de inércia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de uma superfície em relação aos eixos x' e y' obtidos por rotação dos eixos de coordenadas x e y originais de um ângulo θ no sentido anti-horário (Fig. 9.38). Expressamos $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ em termos dos momentos e do produto de inércia I_x, I_y e I_{xy} calculados em relação aos eixos x e y originais. Obtivemos:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \tag{9.18}$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \tag{9.19}$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \tag{9.20}$$

Eixos principais

Os *eixos principais da superfície em relação a O* foram definidos como sendo os dois eixos perpendiculares entre si em relação aos quais os momentos de inércia de uma superfície são um máximo e um mínimo. Os valores correspondentes de θ, representados por θ_m, foram obtidos da fórmula:

$$\text{tg}\,2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \tag{9.25}$$

Momentos principais de inércia

Os valores máximo e mínimo correspondentes de I são denominados *momentos principais de inércia* da superfície em relação a O. Obtivemos

$$I_{\text{máx., mín.}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{9.27}$$

Observamos também que os valores correspondentes do produto de inércia são nulos.

Círculo de Mohr

A transformação dos momentos e do produto de inércia de uma superfície mediante uma rotação de eixos pode ser representada graficamente pelo traçado do *círculo de Mohr* [Seção 9.10], Dados os mo-

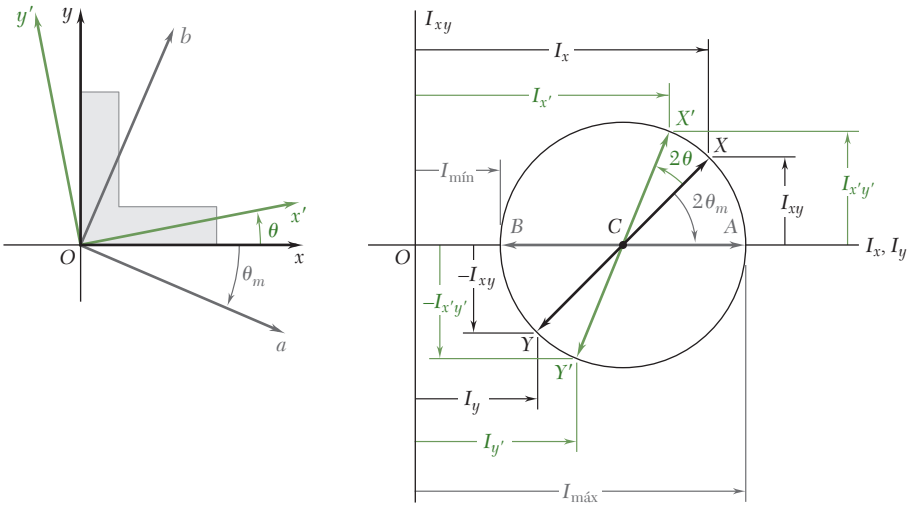


Figura 9.39

mentos e o produto de inércia I_x, I_y e I_{xy} de uma superfície em relação aos eixos de coordenadas x e y, plotamos os pontos $X(I_x, I_{xy})$ e $Y(I_y, -I_{xy})$ e traçamos a linha que une esses dois pontos (Fig. 9.39). Essa linha é um diâmetro do círculo de Mohr e, portanto, define esse círculo. À medida que os eixos de coordenadas são girados de θ, o diâmetro gira o *dobro desse ângulo*, e as coordenadas de X' e Y' fornecem os novos valores $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ dos momentos e do produto de inércia da superfície. Além disso, o ângulo θ_m e as coordenadas dos pontos A e B definem os eixos principais a e b e os momentos principais de inércia da superfície [Problema Resolvido 9.8].

Momentos de inércia de massa de um corpo

A segunda parte do capítulo foi dedicada à determinação de *momentos de inércia de massa de corpos*, que aparecem em problemas de dinâmica que envolvem a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo. O momento de inércia de massa de um corpo em relação a um eixo AA' foi definido como

$$I = \int r^2 \, dm \tag{9.28}$$

sendo r a distância de AA' ao elemento de massa [Seção 9.11]. O *raio de giração* do corpo foi definido como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{9.29}$$

Os momentos de inércia de um corpo em relação aos eixos de coordenadas foram expressos como:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) \, dm$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) \, dm \tag{9.30}$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \, dm$$

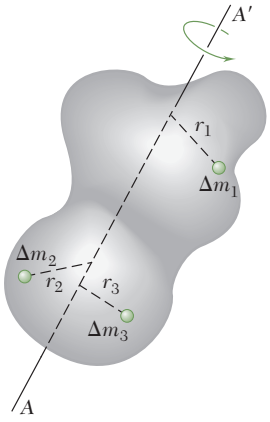


Figura 9.40

Teorema dos eixos paralelos

Vimos que o *teorema dos eixos paralelos* também se aplica aos momentos de inércia de massa [Seção 9.12]. Assim, o momento de inércia I de um corpo em relação a um eixo arbitrário AA' (Fig. 9.41) pode ser expresso como

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{9.33}$$

sendo $\bar{I}$ o momento de inércia do corpo em relação ao eixo centroidal BB' paralelo ao eixo AA', m a massa do corpo e d a distância entre os dois eixos.

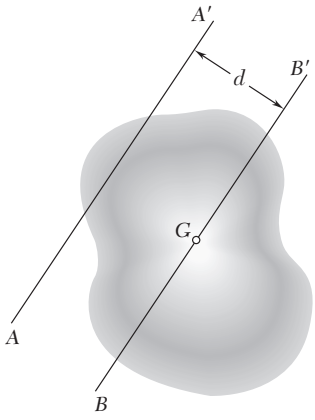


Figura 9.41

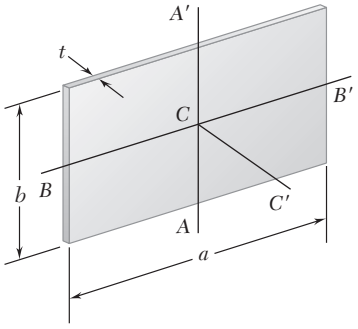


Figura 9.42

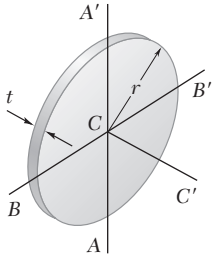


Figura 9.43

Momentos de inércia de placas delgadas

Os momentos de inércia de *placas delgadas* podem ser obtidos diretamente dos momentos de inércia de suas superfícies [Seção 9.13]. Concluímos que, para uma placa *retangular*, os momentos de inércia em relação aos eixos mostrados (Fig. 9.42) são

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{9.39}$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{9.40}$$

enquanto, para uma *placa circular* (Fig. 9.43), eles são

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{9.41}$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{9.42}$$

Corpos compostos

Quando um corpo tem *dois planos de simetria*, geralmente é possível efetuar uma integração simples para se determinar seu momento de inércia em relação a um dado eixo, selecionando-se o elemento de massa dm igual ao de uma placa delgada [Problemas Resolvidos 9.10 e 9.11]. Por outro lado, quando um corpo consiste em *diversos formatos geométricos simples*, seu momento de inércia em relação a um dado eixo pode ser obtido aplicando-se as fórmulas dadas na Fig. 9.28 juntamente com o teorema dos eixos paralelos [Problemas Resolvidos 9.12 e 9.13].

Momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário

Na última seção do capítulo, aprendemos a determinar o momento de inércia de um corpo *em relação a um eixo arbitrário OL* que passa pela origem O [Seção 9.16]. Representado por λ_x, λ_y, λ_z os componentes do

vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ ao longo de OL (Fig. 9.44) e apresentando os *produtos de inércia*

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \tag{9.45}$$

concluímos que o momento de inércia de um corpo em relação a OL pode ser expresso como:

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \tag{9.46}$$

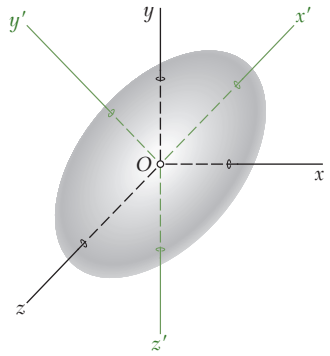


Figura 9.44

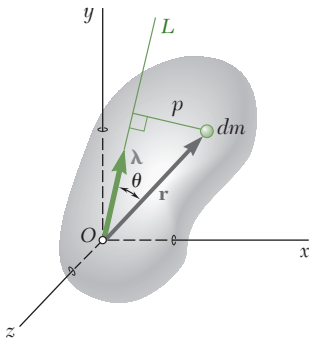


Figura 9.45

Elipsoide de inércia

Eixos principais de inércia
Momentos principais de inércia

Plotando um ponto Q ao longo de cada eixo OL a uma distância $OQ = 1/\sqrt{I_{0L}}$ de O [Seção 9.17], obtivemos a superfície de um elipsoide, conhecido como *elipsoide de inércia* do corpo no ponto O. Os eixos principais x', y', z' desse elipsoide (Fig. 9.45) são os *eixos principais de inércia* do corpo; ou seja, os produtos de inércia $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$, $I_{z'x'}$ do corpo em relação a esses eixos são todos nulos. Há muitas situações em que os eixos principais de inércia de um corpo podem ser deduzidos das propriedades de simetria do corpo. Escolhendo esses eixos como sendo os eixos de coordenadas, podemos então expressar I_{OL} como

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \tag{9.50}$$

sendo $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$ os *momentos principais de inércia* do corpo em O.

Quando os eixos principais de inércia não podem ser obtidos por inspeção [Seção 9.17], é preciso resolver a equação cúbica:

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K - (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \tag{9.56}$$

Verificamos [Seção 9.18] que as raízes K_1, K_2 e K_3 dessa equação são os momentos principais de inércia do corpo considerado. Os cossenos diretores $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$, $(\lambda_z)_1$ do eixo principal correspondente ao momento principal de inércia K_1 são, então, determinados por substituição de K_1 nas Eqs. (9.54) e solução de duas dessas equações e a Eq. (9.57) simultaneamente. O mesmo procedimento é, então, repetido com K_2 e K_3 para se determinarem os cossenos diretores dos outros dois eixos principais [Problema Resolvido 9.15].

PROBLEMAS DE REVISÃO

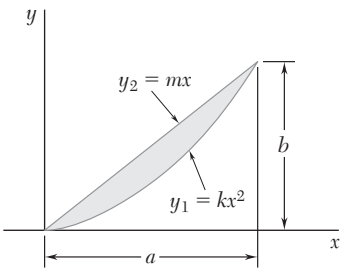


Figura P9.185

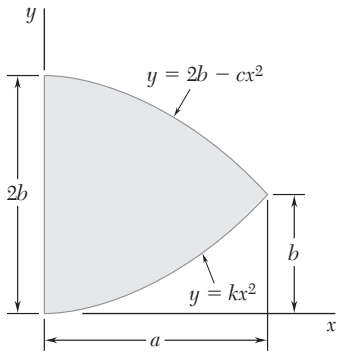


Figura P9.187

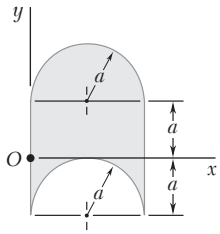


Figura P9.188

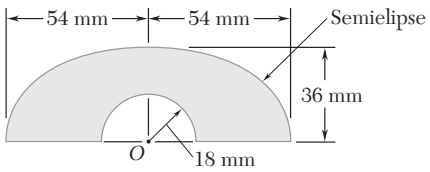


Figura P9.189

9.185 Determine por integração direta o momento de inércia da superfície sombreada em relação aos eixos x e y.

9.186 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada em relação aos eixos x e y.

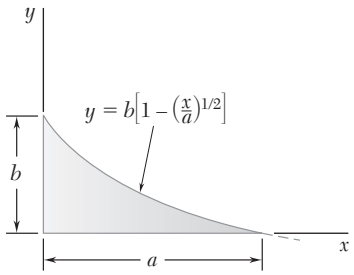


Figura P9.186

9.187 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada em relação ao eixo y.

9.188 Determine o momento de inércia da superfície sombreada em relação aos eixos x e y.

9.189 Determine o momento de inércia polar da superfície sombreada em relação (a) ao ponto O, (b) ao centroide da superfície.

9.190 Uma viga mestra assimétrica é formada por duas cantoneiras L76 × 76 × 6,4 mm e duas cantoneiras L152 × 102 × 12,7 mm soldadas a uma placa de aço de 16 mm como mostra a figura. Determine o momento de inércia do perfil combinado em relação aos eixos centroidais x e y.

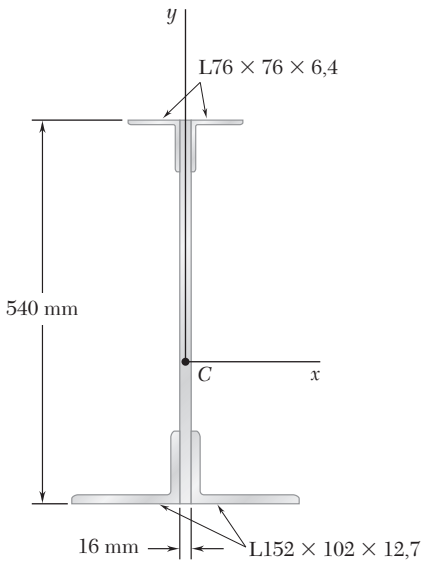


Figura P9.190

9.191 Usando o teorema de eixos paralelos, determine o produto de inércia da cantoneira de seção L127 × 76 × 12,7 mm mostrada na figura com relação aos eixos centroidais x e y.

9.192 Para a cantoneira de L127 × 76 × 12,7 mm mostrada na figura, use o círculo de Mohr para determinar (*a*) os momentos de inércia e o produto de inércia em relação a eixos centroidais novos obtidos por rotação dos eixos *x* e *y* de 30° no sentido horário, (*b*) a orientação dos eixos principais por meio do centroide e os valores correspondentes dos momentos de inércia.

9.193 Um pedaço de chapa metálica delgada e uniforme é cortado para formar o componente de máquina mostrado na figura. Representada a massa do componente por *m*, determine seu momento de inércia de massa em relação (*a*) ao eixo *x*, (*b*) ao eixo *y*.

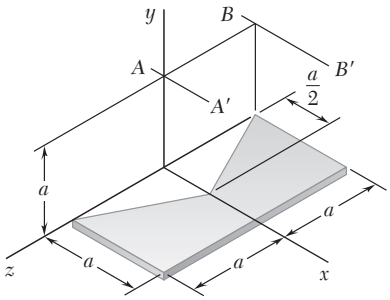
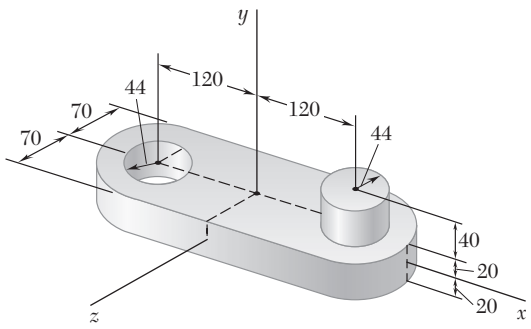


Figura P9.193 e *P9.194*

9.194 Um pedaço de chapa metálica delgada e uniforme é cortado para formar o componente de máquina mostrado na figura. Representada a massa do componente por *m*, determine o momento de inércia em relação (*a*) ao eixo *AA′*, (*b*) ao eixo *BB′*, sendo os eixos *AA′* e *BB′* paralelos ao eixo *x* e pertencentes a um plano paralelo ao plano *xz* a uma distância *a* acima.

9.195 Um pedaço de chapa metálica de 2 mm de espessura é cortado e dobrado para formar o componente de máquina mostrado na figura. Sabendo que a massa específica do aço é 7.850 kg/m^3, determine o momento de inércia de massa do componente em relação a cada um dos eixos coordenados.

9.196 Determine os momentos de inércia e os raios de giração do elemento de máquina de aço mostrado na figura em relação aos eixos *x* e *y*. (A massa específica do aço é 7.850 kg/m^3.)



Dimensões em mm

Figura *P9.196*

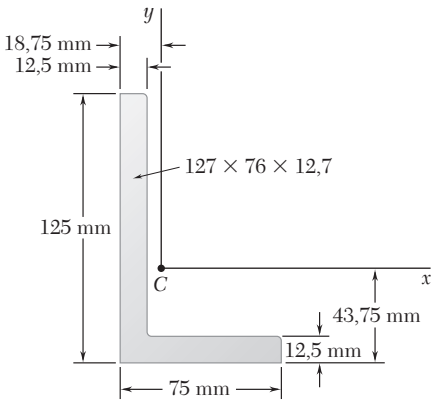


Figura P9.191 e *P9.192*

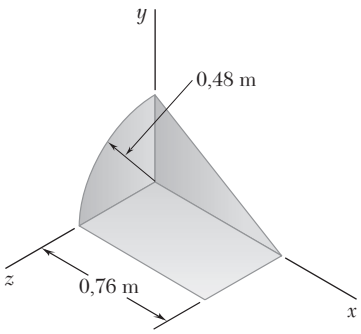


Figura P9.195

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

9.C1 Utilizando um aplicativo computacional desenvolva um programa para uma superfície com momentos e produto de inércia conhecidos I_x, I_y e I_{xy} que possa ser usado para calcular os momentos e o produto de inércia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ da superfície em relação a eixos x' e y' obtidos por rotação dos eixos originais de um ângulo θ no sentido anti-horário. Use este programa para calcular $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ da seção do Problema Resolvido 9.7 para valores de θ de 0 a 90°, usando incrementos de 5°.

9.C2 Utilizando um aplicativo computacional desenvolva um programa para uma superfície com momentos e produto de inércia conhecidos I_x, I_y e I_{xy} que possa ser usado para calcular a orientação dos eixos principais da superfície e os correspondentes valores dos momentos de inércia principais. Use este programa para resolver (*a*) Problema 9.89, (*b*) Problema Resolvido 9.7.

9.C3 Muitas seções transversais podem ser aproximadas por uma série de retângulos, tal como mostra a figura. Usando um aplicativo computacional, calcule os momentos de inércia e os raios de giração de seções desse tipo em relação a eixos centroidais horizontal e vertical. Utilize o programa para a seção transversal mostrada nas (*a*) Figuras P9.31 e P9.33, (*b*) Figuras P9.32 e P9.34, (*c*) Figura P9.43, (*d*) Figura P9.44.

9.C4 Muitas seções transversais podem ser aproximadas por uma série de retângulos, tal como mostra a figura. Usando um aplicativo computacional, calcule os produtos de inércia das seções transversais desse tipo em relação a eixos centroidais horizontal e vertical. Use este programa para resolver o (*a*) Problema P9.71, (*b*) Problema P9.75, (*c*) Problema P9.77.

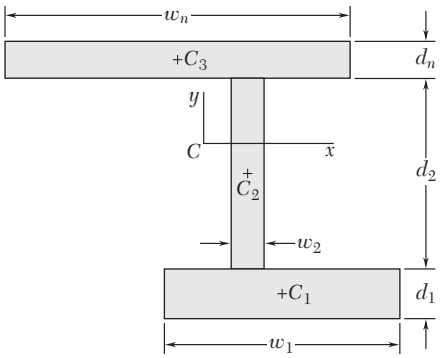


Figura P9.C3 e P9.C4

9.C5 A superfície mostrada na figura é girada em torno do eixo x para formar um corpo sólido homogêneo de massa m. Aproximando a superfície por uma série de 400 retângulos da forma $bcc'b'$, cada qual com largura ΔL, use um aplicativo computacional para determinar o momento de inércia de massa do corpo em relação ao eixo x. Use o programa para resolver o item a (a) do Problema Resolvido 9.11, (b) Problema 9.121, considerando que neste problema $m = 2$ kg, $a = 100$ mm e $h = 400$ mm.

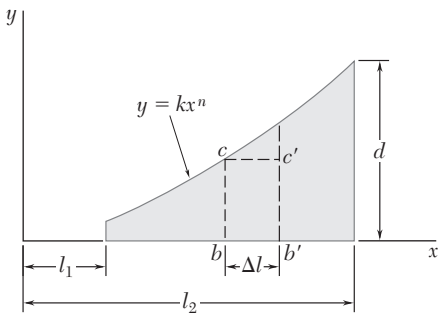


Figura P9.C5

9.C6 Um arame homogêneo com 0,6 N/m de peso por unidade de comprimento é usado para formar a armação mostrada na figura. Aproximando a armação por 10 segmentos retos, use um aplicativo computacional para determinar seu momento de inércia de massa I_x em relação ao eixo x. Use o programa para determinar I_x quando (a) $a = 25$ mm, $L = 275$ mm, $h = 100$ mm, (b) $a = 50$ mm, $L = 425$ mm, $h = 250$ mm, (c) $a = 125$ mm, $L = 625$ mm, $h = 150$ mm.

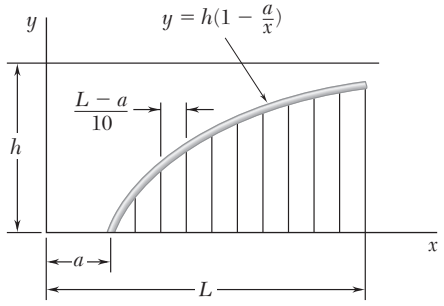


Figura P9.C6

***9.C7** Utilizando um aplicativo computacional desenvolva um programa que, para um corpo com momentos e produto de inércia conhecidos, I_x, I_y e I_{xy}, possa ser usado para o cálculo dos momentos de inércia principais de massa k_1, k_2 e k_3 da origem do corpo. Use este programa para resolver a do (a) Problema 9.180, (b) Problema 9.181, (c) Problema 9.184.

9.C8 Aprimore o programa computacional do Problema 9.C7 para o cálculo de ângulos formados entre os eixos principais de inércia na origem e os eixos coordenados. Use este programa para resolver (a) Problema 9.180, (b) Problema 9.181, (c) Problema 9.184.

O método do trabalho virtual é especialmente eficaz especialmente para casos em que há uma relação simples entre os deslocamentos dos pontos de aplicação das várias forças envolvidas. É o caso do elevador tipo tesoura, que pode ser usado por trabalhadores para obter acesso a uma ponte de autoestrada em construção.

CAPÍTULO 10

Método do trabalho virtual

10 Método do trabalho virtual

10.1 Introdução
10.2 Trabalho de uma força
10.3 Princípio do trabalho virtual
10.4 Aplicações do princípio do trabalho virtual
10.5 Máquinas reais e eficiência mecânica
10.6 Trabalho de uma força durante um deslocamento finito
10.7 Energia potencial
10.8 Energia potencial e equilíbrio
10.9 Estabilidade do equilíbrio

*10.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, foram resolvidos problemas que envolviam o equilíbrio de corpos rígidos, impondo que as forças externas atuantes nos corpos estavam equilibradas. As equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_A = 0$ foram escritas e resolvidas para as incógnitas desejadas. Agora vamos considerar um método diferente, que se mostrará mais eficaz para resolver certos tipos de problemas de equilíbrio. Esse método é baseado no *princípio dos trabalhos virtuais* e foi usado formalmente pela primeira vez pelo matemático suíço Jean Bernoulli no século XVIII.

Como você verá na Seção 10.3, o princípio dos trabalhos virtuais afirma que, se uma partícula, um corpo rígido ou, de maneira mais geral, um sistema de corpos rígidos ligados entre si, em equilíbrio sob a ação de várias forças externas, sofre um deslocamento arbitrário a partir dessa posição de equilíbrio, o trabalho total efetuado pelas forças externas durante o deslocamento é nulo. Este princípio é particularmente eficaz quando aplicado à solução de problemas que envolvam o equilíbrio de máquinas ou mecanismos que consistam em vários elementos ligados entre si.

Na segunda parte do capítulo, o método dos trabalhos virtuais será aplicado de uma forma alternativa, baseada no conceito de *energia potencial*. Será mostrado na Seção 10.8 que, se uma partícula, um corpo rígido ou um sistema de corpos rígidos está em equilíbrio, então a derivada de sua energia potencial em relação a uma variável que define sua posição deve ser zero.

Neste capítulo, iremos também aprender a avaliar a eficiência mecânica de uma máquina (Seção 10.5) e a determinar se uma posição de equilíbrio dada é estável, instável ou neutra (Seção 10.9).

*10.2 Trabalho de uma força

Vamos primeiro definir os termos *deslocamento* e *trabalho* tal como são usados em mecânica. Considere uma partícula que se move de um ponto A em direção a um ponto vizinho A' (Fig 10.1). Se $\mathbf{r}$ representa o vetor posição correspondente ao ponto A, o pequeno vetor que liga A e A' pode ser representado pelo diferencial $d\mathbf{r}$; o vetor $d\mathbf{r}$ é chamado de *deslocamento* da partícula. Agora, vamos considerar que a força $\mathbf{F}$ está atuando sobre a partícula. O *trabalho da força* $\mathbf{F}$ *correspondente ao deslocamento* $d\mathbf{r}$ é definido pela quantidade

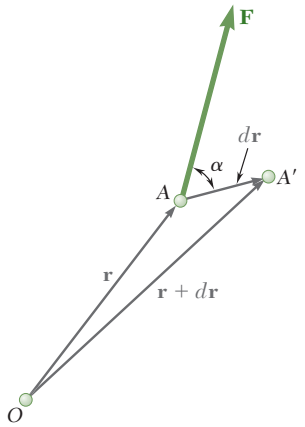


Figura 10.1

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.1}$$

a qual obtemos formando o produto escalar da força $\mathbf{F}$ pelo deslocamento $d\mathbf{r}$. Representadas, respectivamente, por F e ds as intensidades da força e do deslocamento, e por α o ângulo formado por $\mathbf{F}$ e $d\mathbf{r}$, e recordando a definição do produto escalar de dois vetores (Seção 3.9), temos:

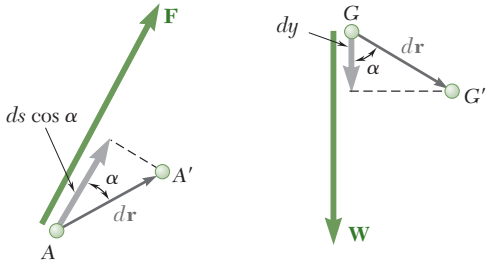
$$dU = F\, ds \cos\alpha \tag{10.1'}$$

Sendo uma *grandeza escalar*, o trabalho tem intensidade e sinal, mas não direção. Observamos também que o trabalho deve ser expresso em

unidades obtidas pela multiplicação de unidades de comprimento por unidades de força. Portanto, o trabalho deverá ser expresso em N · m. A unidade de trabalho N · m é denominada joule (J).*

Segue-se de (10.1′) que o trabalho dU é positivo se o ângulo α for agudo, e negativo se o ângulo α for obtuso. Três casos particulares são de especial interesse. Se a força **F** tem a mesma direção de $d\mathbf{r}$, o trabalho dU se reduz a $F\,ds$. Se **F** tem direção oposta à de $d\mathbf{r}$, o trabalho é $dU = -F\,ds$. Finalmente, se **F** é perpendicular a $d\mathbf{r}$, o trabalho dU é zero.

O trabalho dU de uma força **F** durante um deslocamento $d\mathbf{r}$ pode também ser considerado como o produto de F pelo componente $ds\cos\alpha$ do deslocamento $d\mathbf{r}$ ao longo de **F** (Fig. 10.2*a*). Essa interpretação é especialmente útil no cálculo do trabalho realizado pelo peso **W** de um corpo



(*a*) (*b*)

Figura 10.2

(Fig. 10.2*b*). O trabalho de **W** é igual ao produto de W pelo deslocamento vertical dy do centro de gravidade G do corpo. Se o deslocamento está direcionado para baixo, o trabalho é positivo; se está direcionado para cima, o trabalho é negativo.

Diversas forças encontradas frequentemente em estática *não realizam trabalho:* forças aplicadas a pontos fixos ($ds = 0$) ou atuando em uma direção perpendicular ao deslocamento ($\cos\alpha = 0$). Entre essas forças, estão: a reação em um pino sem atrito quando o corpo suportado gira em torno do pino; a reação em uma superfície sem atrito quando o corpo em contato se move ao longo da superfície; a reação em um rolete que se move ao longo de seu trilho; o peso de um corpo quando seu centro de gravidade se move horizontalmente; e a força de atrito exercida em uma roda que rola sem escorregar (pois, em qualquer instante, o ponto de contato não se move). Exemplos de forças que *realizam trabalho* são: o peso de um corpo (exceto no caso considerado anteriormente), a força de atrito exercida em um corpo que escorrega em uma superfície rugosa e a maioria das forças aplicadas a um corpo em movimento.

Foto 10.1 As forças exercidas pelos cilindros hidráulicos para posicionar a caçamba suspensa mostrada podem ser determinadas efetivamente por meio do método dos trabalhos virtuais, pois existe uma relação simples entre os deslocamentos dos pontos de aplicação das forças exercidas sobre os elementos do elevador.

* Joule é a unidade do SI de *energia*, seja na forma mecânica (trabalho, energia potencial, energia cinética) ou na forma química, elétrica ou térmica. Devemos notar que, embora N · m = J, o momento de uma força deve ser expresso em N · m, e não em joules, pois o momento de uma força não é uma forma de energia.

Em certos casos, a soma do trabalho realizado por várias forças é igual a zero. Considere, por exemplo, dois corpos rígidos *AC* e *BC* unidos em *C* por um *pino sem atrito* (Fig. 10.3*a*). Entre as forças atuantes em *AC*, está a força **F** exercida em *C* por *BC*. Em geral, o trabalho dessa força

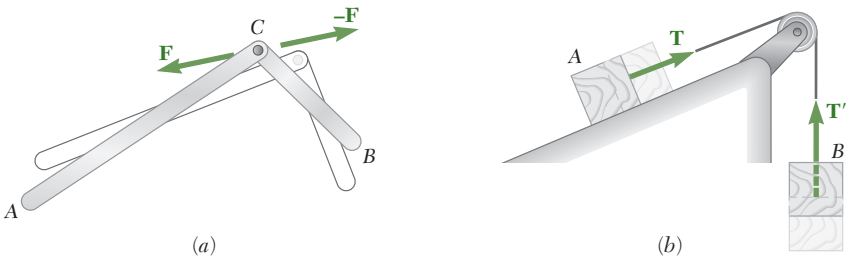


Figura 10.3

não será igual a zero, mas será igual em intensidade e oposto em sinal ao trabalho da força $-\mathbf{F}$ exercida por *AC* em *BC*, pois essas forças são iguais e opostas e são aplicadas à mesma partícula. Portanto, quando se considera o trabalho total feito por todas as forças atuantes em *AB* e *BC*, o trabalho das duas forças internas em *C* é cancelado. Um resultado equivalente é obtido se considerarmos um sistema que consista em dois blocos unidos por uma *corda inextensível AB* (Fig. 10.3*b*). O trabalho da força de tração **T** em *A* é igual em intensidade ao trabalho da força de tração **T′** em *B*, já que essas forças têm a mesma intensidade e os pontos *A* e *B* se movem pela mesma distância; mas, em um caso, o trabalho é positivo e, no outro, é negativo. Portanto, o trabalho das forças internas novamente é cancelado.

Pode-se mostrar que o trabalho total das forças internas que mantêm unidas as partículas de um corpo rígido é igual a zero. Considere duas partículas *A* e *B* de um corpo rígido e as duas forças iguais e opostas **F** e $-\mathbf{F}$ que elas exercem uma sobre a outra (Fig. 10.4). Enquanto geralmente,

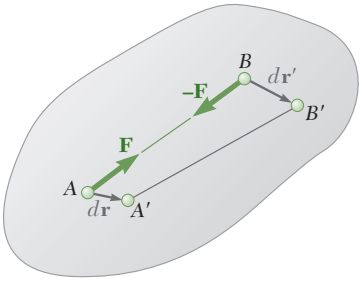


Figura 10.4

pequenos deslocamentos $d\mathbf{r}$ e $d\mathbf{r}'$ das duas partículas são diferentes, os componentes desses deslocamentos ao longo de *AB* devem ser iguais; caso contrário, as partículas não permaneceriam à mesma distância uma da outra, e o corpo não seria rígido. Portanto, o trabalho de **F** é igual em intensidade e oposto em sinal ao trabalho de $-\mathbf{F}$, e a soma deles é igual a zero.

Quando se calcula o trabalho das forças externas atuantes em um corpo rígido, muitas vezes é conveniente determinar o trabalho de um binário sem considerar separadamente o trabalho de cada uma das duas for-

ças que formam o binário. Considere as duas forças **F** e −**F** que formam um binário de momento **M** e atuam sobre um corpo rígido (Fig. 10.5). Qualquer pequeno deslocamento do corpo rígido que leve A e B, respectivamente, até A' e B'' pode ser dividido em duas partes, em uma das quais os pontos A e B sofrem deslocamentos iguais $d\mathbf{r}_1$, e outra em que A' permanece fixo enquanto B' se move até B'' por meio de um deslocamento $d\mathbf{r}_2$ de intensidade $ds_2 = r\,d\theta$. Na primeira parte do movimento, o trabalho de **F** é igual em intensidade e oposto em sinal ao trabalho de −**F**, e a soma desses trabalhos é zero. Na segunda parte do movimento, somente a força **F** realiza trabalho, e seu trabalho é $dU = F\,ds_2 = Fr\,d\theta$. Porém, o produto Fr é igual à intensidade M do momento do binário. Portanto, o trabalho de um binário de momento **M** exercido sobre um corpo rígido é

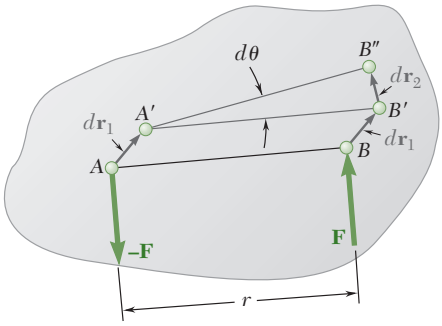


Figura 10.5

$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

sendo $d\theta$ o pequeno ângulo, expresso em radianos, que o corpo roda. Novamente, observamos que o trabalho deve ser expresso em unidades obtidas pela multiplicação de unidades de comprimento por unidades de força.

*10.3 Princípio do trabalho virtual

Considere uma partícula submetida à ação de várias forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ (Fig. 10.6). Podemos imaginar que essa partícula sofre um pequeno deslocamento de A até A'. Esse deslocamento é possível, porém não será necessariamente realizado. As forças podem estar equilibradas e a partícula estar em repouso, ou a partícula pode se mover sob a ação das forças dadas em uma direção diferente de AA'. Como o deslocamento considerado não ocorre realmente, ele é denominado *deslocamento virtual*, e é representado por $\delta\mathbf{r}$. O símbolo $\delta\mathbf{r}$ representa um diferencial de primeira ordem; ele é utilizado para distinguir o deslocamento virtual do deslocamento $d\mathbf{r}$ que ocorreria no movimento real. Como você verá, deslocamentos virtuais podem ser usados para se determinar se as condições de equilíbrio de uma partícula material estão satisfeitas.

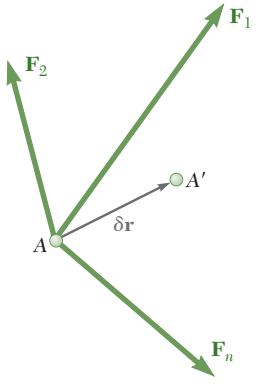


Figura 10.6

O trabalho de cada uma das forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ durante o deslocamento virtual $\delta\mathbf{r}$ é denominado *trabalho virtual*. O trabalho virtual de todas as forças atuantes na partícula da Fig. 10.6 é

$$\begin{aligned}\delta U &= \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n) \cdot \delta\mathbf{r}\end{aligned}$$

ou

$$\delta U = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} \tag{10.3}$$

sendo **R** a resultante das forças dadas. Portanto, o trabalho virtual total das forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ é igual ao trabalho virtual de sua resultante **R**.

O princípio do trabalho virtual para uma partícula estabelece que, *se uma partícula está em equilíbrio, o trabalho virtual total das forças atuantes sobre ela é zero para qualquer deslocamento virtual dessa partícula.* Essa condição é necessária: se a partícula estiver em equilíbrio, a resultante **R** das forças será zero, e segue-se da Eq. (10.3) que o trabalho virtual total δU é zero. A condição é também suficiente: se o trabalho virtual total δU é zero para qualquer deslocamento virtual, o produto escalar $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r}$ é zero para qualquer $\delta\mathbf{r}$, e a resultante **R** deve ser zero.

No caso de um corpo rígido, o princípio dos trabalhos virtuais estabelece que, *se um corpo rígido está em equilíbrio, o trabalho virtual total das forças externas atuantes sobre o corpo rígido é zero para qualquer deslocamento virtual desse corpo.* A condição é necessária: se o corpo está em equilíbrio, todas as partículas que formam o corpo estão em equilíbrio e o trabalho virtual total das forças atuantes sobre todas as partículas deve ser zero; vimos, porém, na seção anterior, que o trabalho total das forças internas é zero; portanto, o trabalho total das forças externas deve também ser zero. Pode-se demonstrar que essa condição é também suficiente.

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser estendido ao caso de um *sistema de corpos rígidos ligados entre si.* Se o sistema permanece ligado durante o deslocamento virtual, *somente o trabalho das forças externas ao sistema precisa ser considerado,* pois o trabalho total das forças internas nas várias conexões é zero.

*10.4 Aplicações do princípio do trabalho virtual

O princípio do trabalho virtual é particularmente eficaz quando aplicado à solução de problemas que envolvam máquinas ou mecanismos que consistam em vários corpos rígidos ligados entre si. Considere, por exemplo, a alavanca articulada *ACB* da Fig. 10.7*a*, usada para comprimir um bloco

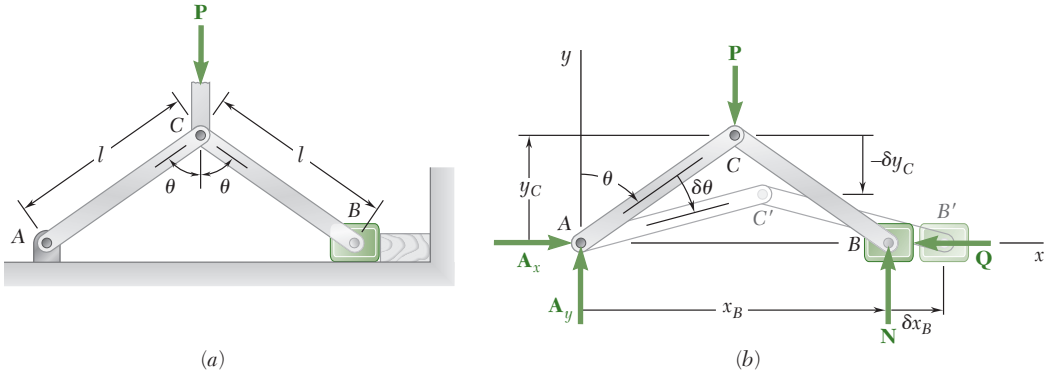


Figura 10.7

de madeira. Desejamos determinar a força exercida pela alavanca sobre o bloco quando uma dada força **P** é aplicada em *C*, considerando que não há atrito. Representada por **Q** a reação do bloco sobre a alavanca, traçamos o diagrama de corpo livre da alavanca e consideramos o deslocamento virtual obtido dando um incremento positivo $\delta\theta$ ao ângulo θ (Fig. 10.7*b*). Escolhendo um sistema de eixos coordenados com a origem em *A*, verificamos que x_B aumenta enquanto y_C diminui. Isso é indicado na figura, onde são mostrados um incremento positivo δx_B e um incremento negativo $-\delta y_C$. As reações $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ e **N** não realizarão trabalho durante o deslocamento virtual considerado, e precisamos calcular apenas o trabalho de **P** e **Q**. Como **Q** e δx_B têm sentidos opostos, o trabalho virtual de **Q** é $\delta U_Q = -Q\,\delta x_B$. Como **P** e o incremento mostrado $(-\delta y_C)$ têm o mesmo sentido, o trabalho virtual de **P** é $\delta U_P = +P(-\delta y_C) = -P\,\delta y_C$. O

sinal de menos obtido poderia ter sido previsto pela simples observação de que as forças **Q** e **P** são direcionadas em sentidos opostos aos eixos x e y positivos, respectivamente. Expressando as coordenadas x_B e y_C em termos do ângulo θ e diferenciando-as, obtemos:

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \operatorname{sen}\theta & y_C &= l\cos\theta \\ \delta x_B &= 2l\cos\theta\,\delta\theta & \delta y_C &= -l\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta \end{aligned} \tag{10.4}$$

O trabalho virtual total das forças **Q** e **P** é, portanto:

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U_Q + \delta U_P = -Q\,\delta x_B - P\,\delta y_C \\ &= -2Ql\cos\theta\,\delta\theta + Pl\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta \end{aligned}$$

Estabelecendo $\delta U = 0$, obtemos:

$$2Ql\cos\theta\,\delta\theta = Pl\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta \tag{10.5}$$

$$Q = \tfrac{1}{2}P\operatorname{tg}\theta \tag{10.6}$$

A superioridade do método dos trabalhos virtuais sobre as equações convencionais de equilíbrio, no problema aqui considerado, é clara: utilizando o método dos trabalhos virtuais, fomos capazes de eliminar todas as reações desconhecidas, enquanto a equação $\Sigma M_A = 0$ teria eliminado apenas duas dessas reações desconhecidas. Essa propriedade do método dos trabalhos virtuais pode ser usada na resolução de muitos problemas que envolvam máquinas e mecanismos. *Se o deslocamento virtual considerado é constante com as restrições impostas pelos apoios e conexões, todas as reações e forças internas são eliminadas, e somente o trabalho das cargas, das forças aplicadas e das forças de atrito precisa ser considerado.*

Pode-se também usar o método dos trabalhos virtuais para resolver problemas que envolvem estruturas rígidas, embora os deslocamentos virtuais considerados nunca venham de fato a ocorrer. Considere, por exemplo, a estrutura *ACB* mostrada na Fig. 10.8*a*. Se o ponto *A* é mantido fixo, enquanto *B* sofre um deslocamento virtual horizontal (Fig. 10.8*b*),

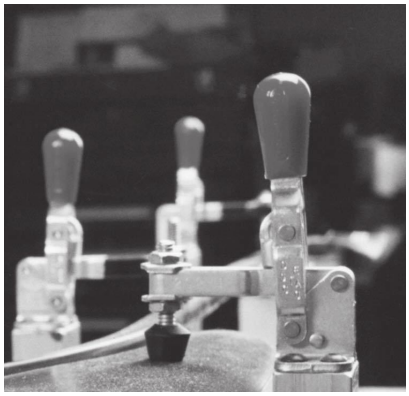


Foto 10.2 A força de aperto do torno articulado aqui mostrado pode ser expressa como função da força aplicada ao seu cabo, primeiro estabelecendo-se as relações geométricas entre os elementos do torno e, em seguida, aplicando-se o método do trabalho virtual.

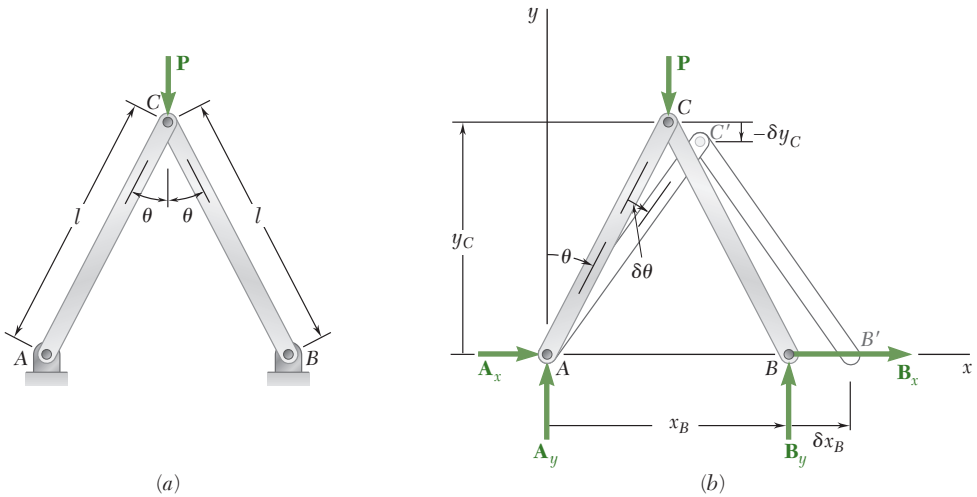


Figura 10.8

precisamos considerar somente o trabalho de **P** e $\mathbf{B}_x$. Podemos portanto, determinar o componente da reação $\mathbf{B}_x$ do mesmo modo que determinamos a força **Q** no exemplo anterior (Fig. 10.7*b*); temos

$$B_x = -1/2\, P\, tg\, \theta$$

Mantendo *B* fixo e dando a *A* um deslocamento virtual horizontal podemos, de forma análoga, determinar o componente $\mathbf{A}_x$ da reação. Os componentes $\boldsymbol{A}_y$ e $\boldsymbol{B}_y$ podem ser determinados girando-se a estrutura *ACB* como um corpo rígido, em torno de *B* e de *A* respectivamente.

O método dos trabalhos virtuais pode também ser usado para se determinar a configuração de um sistema em equilíbrio submetido a forças dadas. Por exemplo, o valor do ângulo θ para o qual a articulação da Fig. 10.7 está em equilíbrio, sob a ação de duas forças dadas **P** e **Q**, pode ser obtido resolvendo-se a Eq. (10.6) para tg θ.

Deve-se observar, entretanto, que o atrativo do método dos trabalhos virtuais depende, em grande parte, da existência de relações geométricas simples entre os vários deslocamentos virtuais envolvidos na solução de um dado problema. Quando tais relações simples não existirem, em geral é aconselhável voltar ao método convencional do Capítulo 6.

*10.5 Máquinas reais e eficiência mecânica

Analisando a alavanca articulada na seção anterior, consideramos que não havia forças de atrito envolvidas. Assim, o trabalho virtual consistiu somente no trabalho da força aplicada **P** e na reação **Q**. Mas o trabalho da reação **Q** é igual em intensidade e oposto em sinal ao trabalho da força exercida pela alavanca sobre o bloco. A Eq. (10.5), portanto, expressa que o *trabalho produzido* (*output*), $2Ql \cos \theta\, \delta\theta$ *é igual ao trabalho recebido* (*input*) $Pl \operatorname{sen} \theta\, \delta\theta$. Uma máquina na qual os trabalhos recebido e produzido são iguais é chamada de máquina "ideal". Em uma máquina "real", as forças de atrito sempre realizarão algum trabalho e o trabalho produzido será menor que o trabalho recebido.

Considere, por exemplo, a alavanca articulada da Fig. 10.7*a* e admita agora que uma força de atrito **F** se desenvolva entre o bloco deslizante *B* e o plano horizontal (Fig. 10.9). Usando os métodos convencionais da es-

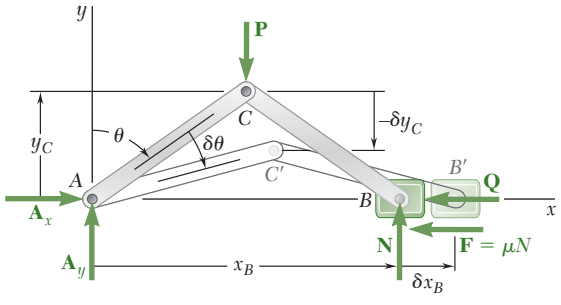


Figura 10.9

tática e somando os momentos em relação a A, obtemos $N = P/2$. Representado por μ o coeficiente de atrito entre o bloco B e plano horizontal, temos $F = \mu N = \mu P/2$. Relembrando as fórmulas (10.4), encontramos que o trabalho virtual total das forças **Q**, **P** e **F** durante o deslocamento virtual mostrado na Fig. 10.9 é:

$$\begin{aligned}\delta U &= -Q\,\delta x_B - P\,\delta y_C - F\,\delta x_B \\ &= -2Ql\cos\theta\,\delta\theta + Pl\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta - \mu Pl\cos\theta\,\delta\theta\end{aligned}$$

Estabelecendo $\delta U = 0$, obtemos

$$2Ql\cos\theta\,\delta\theta = Pl\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta - \mu Pl\cos\theta\,\delta\theta \qquad (10.7)$$

que mostra que o trabalho produzido é igual ao trabalho recebido menos o trabalho da força de atrito. Resolvendo para Q, temos:

$$Q = \tfrac{1}{2}P(\text{tg}\,\theta - \mu) \qquad (10.8)$$

Notamos que $Q = 0$ quando $\text{tg}\,\theta = \mu$, ou seja, quando θ é igual ao ângulo de atrito ϕ, e que $Q < 0$ quando $\theta < \phi$. A alavanca articulada pode, então, ser usada somente para valores de θ maiores que o ângulo de atrito.

A *eficiência mecânica* de uma máquina é definida pela relação:

$$\eta = \frac{\text{trabalho produzido}}{\text{trabalho recebido}} \qquad (10.9)$$

Fica evidente que, a eficiência mecânica de uma máquina ideal é $\eta = 1$, uma vez que os trabalhos recebido e produzido são iguais, enquanto a eficiência mecânica de uma máquina real será sempre menor que 1.

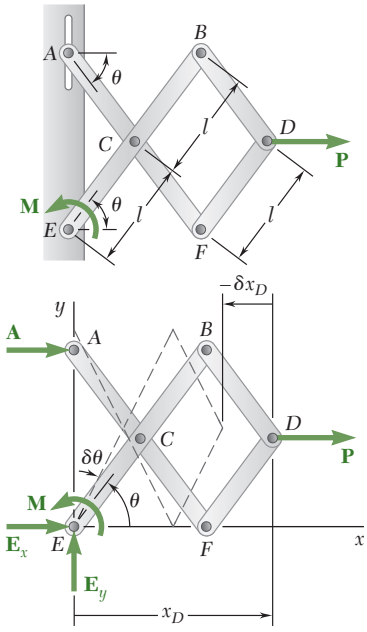
No caso da alavanca articulada que acabamos de analisar, temos:

$$\eta = \frac{\text{trabalho produzido}}{\text{trabalho recebido}} = \frac{2Ql\cos\theta\,\delta\theta}{Pl\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta}$$

Substituindo o valor de Q dado na Eq. (10.8), obtemos:

$$\eta = \frac{P(\text{tg}\,\theta - \mu)l\cos\theta\,\delta\theta}{Pl\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta} = 1 - \mu\,\text{cotg}\,\theta \qquad (10.10)$$

Verificamos que, na ausência de forças de atrito, teremos $\mu = 0$ e $\eta = 1$. No caso geral, quando μ é diferente de zero, a eficiência η torna-se zero para $\mu\,\text{cotg}\,0 = 1$, ou seja, para $\text{tg}\,\theta = \mu$, ou $\theta = \text{tg}^{-1}\mu = \phi$. Observamos, novamente, que a alavanca articulada pode ser usada somente para valores de θ maiores que o ângulo de atrito ϕ.



PROBLEMA RESOLVIDO 10.1

Usando o método dos trabalhos virtuais, determine a intensidade do binário **M** necessária para se manter o equilíbrio do mecanismo mostrado na figura.

SOLUÇÃO

Escolhendo um sistema de eixos coordenados com origem em E, temos:

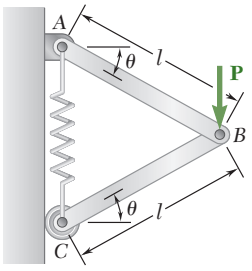
$$x_D = 3l\cos\theta \qquad \delta x_D = -3l\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta$$

Princípio do trabalho virtual. Como as reações **A**, $\mathbf{E}_x$ e $\mathbf{E}_y$ não relizarão trabalho durante o deslocamento virtual, o trabalho virtual total realizado por **M** e **P** deve ser zero. Observando que **P** atua no sentido positivo do eixo dos x que **M** atua no sentido positivo de θ, temos:

$\delta U = 0$: $\quad +M\,\delta\theta + P\,\delta x_D = 0$

$$+M\,\delta\theta + P(-3l\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta) = 0$$

$$M = 3Pl\,\text{sen}\,\theta \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 10.2

Determine as expressões para θ e para a tração na mola que correspondem à posição de equilíbrio do mecanismo. O comprimento informado da mola é h, e a constante de mola é k. Despreze o peso do mecanismo.

SOLUÇÃO

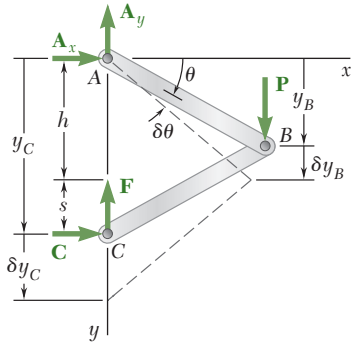
Com o sistema de coordenadas mostrado na figura

$$y_B = l\,\text{sen}\,\theta \qquad y_C = 2l\,\text{sen}\,\theta$$
$$\delta y_B = l\cos\theta\,\delta\theta \qquad \delta y_C = 2l\cos\theta\,\delta\theta$$

O alongamento da mola é $\quad s = y_C - h = 2l\,\text{sen}\,\theta - h$

A intensidade da força exercida em C pela mola é:

$$F = ks = k(2l\,\text{sen}\,\theta - h) \qquad \textbf{(1)}$$



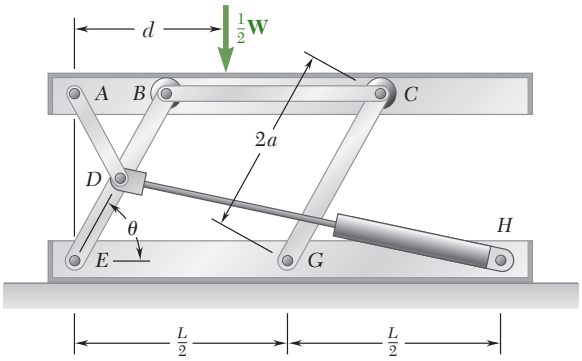
Princípio do trabalho virtual. Como as reações $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ e **C** não realizam trabalho, o trabalho virtual total realizado por **P** e **F** deve ser zero.

$\delta U = 0$: $\quad P\,\delta y_B - F\,\delta y_C = 0$

$$P(l\cos\theta\,\delta\theta) - k(2l\,\text{sen}\,\theta - h)(2l\cos\theta\,\delta\theta) = 0$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{P + 2kh}{4kl} \quad \blacktriangleleft$$

Substituindo esta expressão em (1), obtemos: $\quad F = \tfrac{1}{2}PH$

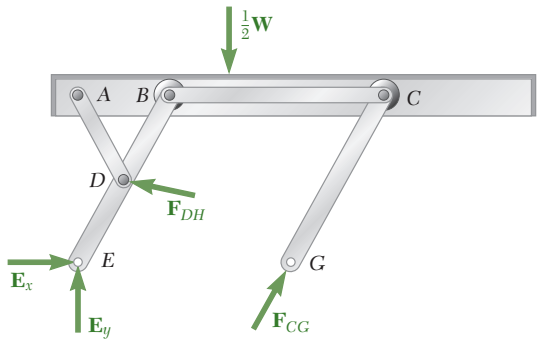


PROBLEMA RESOLVIDO 10.3

Uma mesa de elevação hidráulica é usada para erguer um engradado de 1.000 kg. Ela consiste em uma plataforma e dois sistemas articulados idênticos, nos quais cilindros hidráulicos exercem forças iguais. (Somente um sistema articulado e um cilindro são mostrados na figura.) Os elementos *EDB* e *CG* têm, cada qual, comprimento $2a$, e o elemento *AD* está preso por um pino ao ponto médio de *EDB*. Se o engradado é colocado sobre a mesa de modo tal que metade do seu peso é suportada pelo sistema mostrado na figura, determine a força exercida por cada cilindro na elevação do engradado para $\theta = 60°$, $a = 0{,}70$ m e $L = 3{,}20$ m. Esse mecanismo já foi considerado anteriormente no Problema Resolvido 6.7.

SOLUÇÃO

A máquina considerada consiste na plataforma e no sistema articulado, com uma força aplicada (*input*) $\mathbf{F}_{DH}$ exercida pelo cilindro e uma força de saída (*output*) igual e oposta a $\frac{1}{2}\mathbf{W}$.



Princípio dos trabalhos virtuais. Inicialmente observamos que as reações em *E* e *G* não realizam trabalho. Representado por y a elevação da plataforma acima da base e por s o comprimento *DH* do conjunto cilindro-pistão, temos:

$$\delta U = 0: \qquad -\tfrac{1}{2}W\,\delta y + F_{DH}\,\delta s = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

O deslocamento vertical δy da plataforma é expresso em termos do deslocamento angular $\delta\theta$ de *EDB* como se segue:

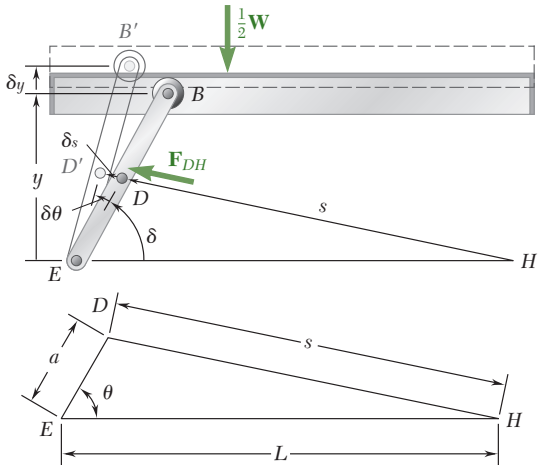
$$y = (EB)\operatorname{sen}\theta = 2a\operatorname{sen}\theta$$
$$\delta y = 2a\cos\theta\,\delta\theta$$

De forma semelhante, para expressar δs em termos de $\delta\theta$, primeiro verificamos que, pela lei dos cossenos

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$$

Diferenciando:

$$2s\,\delta s = -2aL(-\operatorname{sen}\theta)\,\delta\theta$$
$$\delta s = \frac{aL\operatorname{sen}\theta}{s}\,\delta\theta$$



Substituindo para δy e δs em (1), temos:

$$(-\tfrac{1}{2}W)2a\cos\theta\,\delta\theta + F_{DH}\frac{aL\operatorname{sen}\theta}{s}\,\delta\theta = 0$$

$$F_{DH} = W\frac{s}{L}\operatorname{cotg}\theta$$

Com dados numéricos fornecidos, temos:

$$W = mg = (1.000\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2) = 9.810\text{ N} = 9{,}81\text{ kN}$$
$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$$
$$= (0{,}70)^2 + (3{,}20)^2 - 2(0{,}70)(3{,}20)\cos 60° = 8{,}49$$
$$s = 2{,}91\text{ m}$$
$$F_{DH} = W\frac{s}{L}\operatorname{cotg}\theta = (9{,}81\text{ kN})\frac{2{,}91\text{ m}}{3{,}20\text{ m}}\operatorname{cotg}60°$$

$$F_{DH} = 5{,}15\text{ kN} \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, aprendemos a usar o *método do trabalho virtual,* que é uma maneira diferente de resolver problemas que envolvam o equilíbrio de corpos rígidos.

O trabalho realizado por uma força durante um deslocamento do seu ponto de aplicação, ou por um binário durante uma rotação, é obtido por meio das Eqs. (10.1) e (10.2), respectivamente:

$$dU = F\,ds\cos\alpha \tag{10.1}$$
$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

Princípio do trabalho virtual. Em sua forma mais geral e mais útil, esse princípio pode ser escrito como se segue: *se um sistema de corpos rígidos ligados entre si está em equilíbrio, o trabalho virtual total das forças externas aplicadas ao sistema é igual a zero para qualquer deslocamento virtual desse sistema.*

Quando formos aplicar o princípio dos trabalhos virtuais, tenhamos em mente o seguinte:

1. Deslocamento virtual. Uma máquina ou mecanismo não tem tendência a se mover. No entanto, *podemos causar, ou imaginar, um pequeno deslocamento.* Como não ocorre de fato, tal deslocamento é chamado de *deslocamento virtual.*

2. Trabalho virtual. O trabalho realizado por uma força ou um binário durante um deslocamento virtual é chamado de *trabalho virtual.*

3. É preciso só considerar as forças que realizam trabalho durante o deslocamento virtual.

4. Forças que não realizam trabalho durante um deslocamento virtual que sejam consistentes com as restrições impostas no sistema incluem as seguintes:

- **a.** Reações nos apoios.
- **b.** Forças internas nas ligações.
- **c.** Forças exercidas por cordas e cabos inextensíveis.

Nenhuma dessas forças precisa ser considerada quando você usar o método do trabalho virtual.

5. Certifiquemo-nos de expressar os vários deslocamentos virtuais envolvidos nos seus cálculos em termos de um *único deslocamento virtual.* Isso foi feito em cada um dos três problemas resolvidos precedentes, nos quais os deslocamentos virtuais foram todos expressos em termos de $\delta\theta$.

6. Lembremo-nos de que o método dos trabalhos virtuais é efetivo somente nos casos em que a geometria do sistema o torna relativamente fácil para se relacionar com os deslocamentos envolvidos.

PROBLEMAS

10.1 Determine a força vertical **P** que deve ser aplicada em *C* para se manter o equilíbrio do sistema articulado.

10.2 Determine a força vertical **P** que deve ser aplicada em *A* para se manter o equilíbrio do sistema articulado.

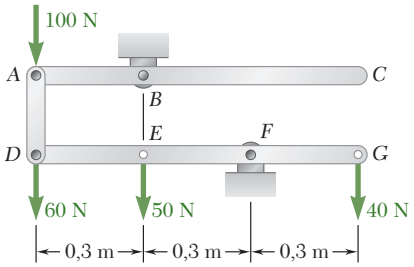


Figura P10.1 e P10.3

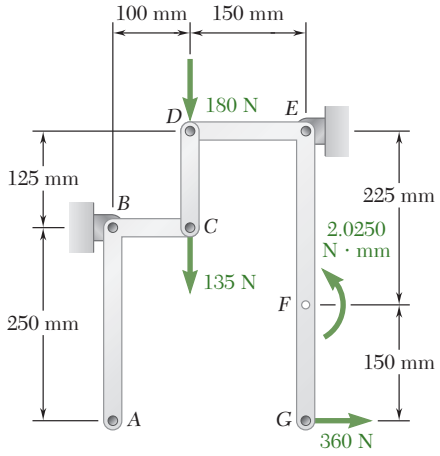


Figura P10.2 e P10.4

10.3 e 10.4 Determine o binário **M** que deve ser aplicado ao elemento *ABC* para se manter o equilíbrio do sistema articulado.

10.5 Sabendo que a força de atrito máxima exercida pela garrafa sobre a rolha é 270 N, determine (*a*) a força **P** que se deve aplicar ao saca-rolhas para abrir a garrafa, (*b*) a força máxima exercida pela base do saca-rolhas sobre a boca da garrafa.

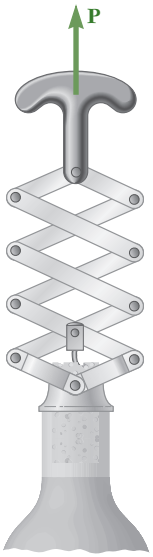


Figura *P10.5*

10.6 O mecanismo articulado de duas barras mostrado na figura é sustentado por um pino e um suporte em *B* e por um colar em *D*, que desliza livremente sobre uma haste vertical. Determine a força **P** necessária para se manter o equilíbrio do mecanismo.

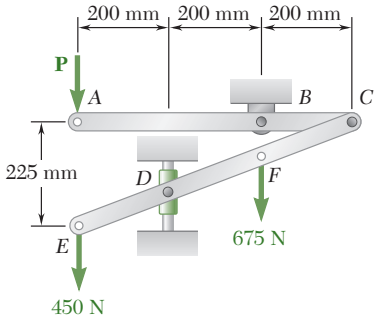


Figura *P10.6*

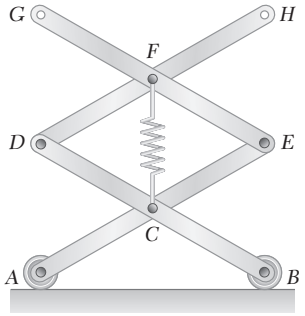


Figura P10.7 e P10.8

10.7 Uma mola de constante 15 N/cm é presa a pinos nos pontos C e F tal como mostra a figura. Desprezando o peso da mola e do mecanismo articulado, determine a força na mola e o deslocamento vertical do ponto G quando uma força vertical de 120 N é aplicada (a) no ponto C, (b) nos pontos C e H.

10.8 Uma mola de constante 15 N/cm é presa nos pontos C e F tal como mostra a figura. Desprezando o peso da mola e do mecanismo articulado, determine a força na mola e o deslocamento vertical do ponto G quando uma força vertical de 120 N é aplicada (a) no ponto E, (b) nos pontos E e F.

10.9 Sabendo que a linha de ação da força **Q** passa pelo ponto C, deduza uma expressão para a intensidade de **Q** necessária para se manter o equilíbrio.

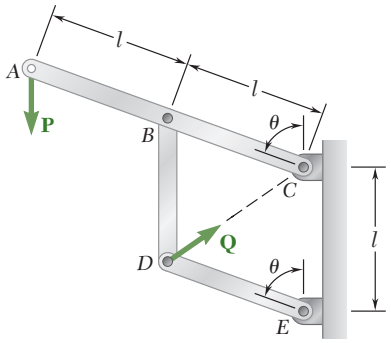


Figura P10.9

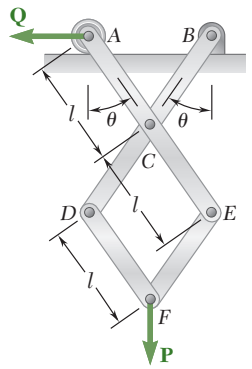


Figura P10.11

10.10 Resolva o Problema 10.9 considerando que a força **P** aplicada no ponto A atua horizontalmente para a esquerda.

10.11 A força **P** atua sobre o mecanismo mostrado na figura. Deduza uma expressão para a intensidade da força **Q** necessária para o equilíbrio.

10.12 e *10.13* A haste fina AB é presa a um colar A e repousa sobre uma pequena roda em C. Desprezando o raio da roda e o efeito do atrito, deduza uma expressão para a intensidade da força **Q** necessária para se manter o equilíbrio da haste.

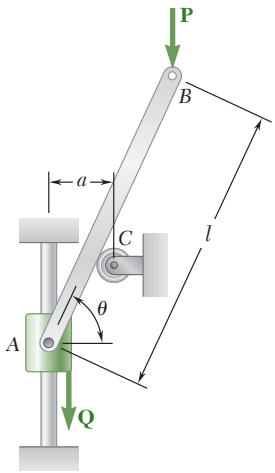


Figura P10.12

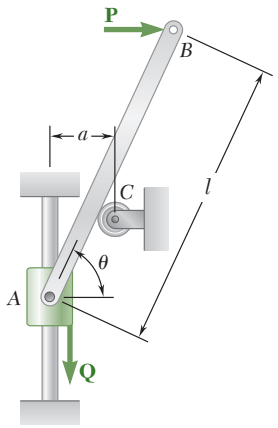


Figura *P10.13*

10.14 Deduza uma expressão para a intensidade da força **Q** necessária para manter o equilíbrio do mecanismo mostrado na figura.

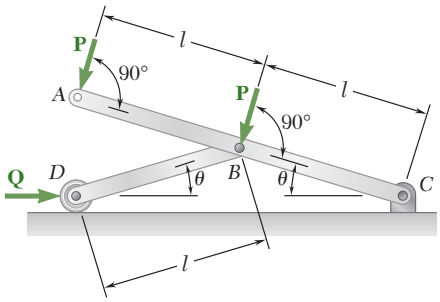


Figura P10.14

10.15 Uma barra uniforme *AB* de comprimento *l* e peso *W* é suspenso por duas cordas *AC* e *BC* de igual comprimento. Deduza uma expressão para a intensidade do binário **M** necessária para manter o equilíbrio da haste na posição mostrada na figura.

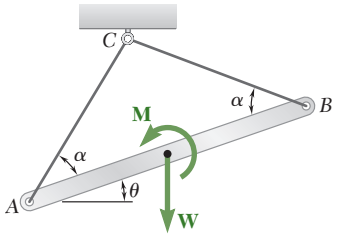


Figura P10.15

10.16 e 10.17 Deduza uma expressão para a intensidade do binário **M** necessária para se manter o equilíbrio do mecanismo articulado mostrado na figura.

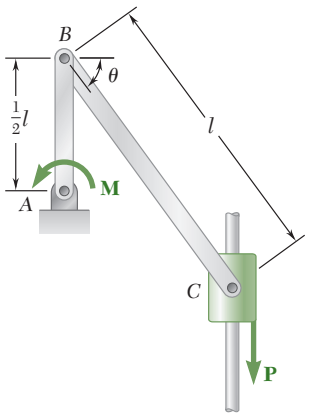


Figura P10.16

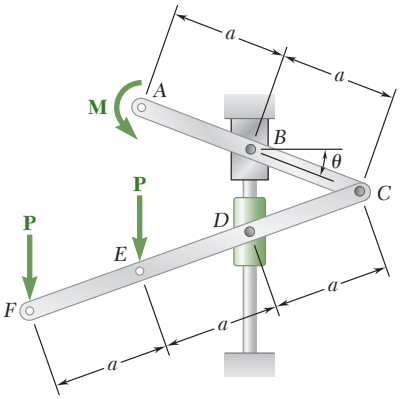


Figura P10.17

10.18 O pino em *C* é preso ao elemento *BCD* e pode deslizar ao longo de uma fenda aberta na placa fixa mostrada na figura. Desprezando o efeito do atrito, deduza uma expressão para a intensidade do binário **M** necessária para se manter o equilíbrio quando a força **P** atuante em *D* está direcionada (*a*) tal como mostra a figura, (*b*) verticalmente para baixo, (*c*) horizontalmente para a direita.

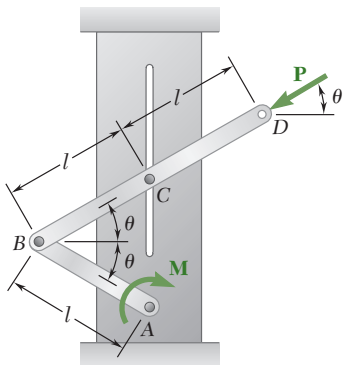


Figura P10.18

10.19 Uma força **P** de 4 kN é aplicada tal como mostra a figura ao pistão de um sistema motor. Sabendo que $AB = 50$ mm e $BC = 200$ mm, determine o binário **M** necessário para se manter o equilíbrio do sistema, quando (*a*) $\theta = 30°$, (*b*) $\theta = 150°$.

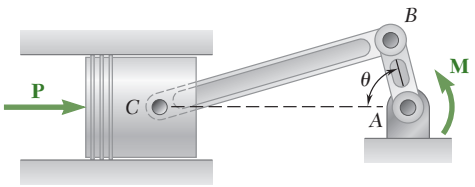


Figura *P10.19 e P10.20*

10.20 Um binário **M** de intensidade 100 N · m é aplicado, tal como mostra a figura, à manivela de um sistema motor. Sabendo que $AB = 50$ mm e $BC = 200$ mm, determine a força **P** necessária para se manter o equilíbrio do sistema, quando (*a*) $\theta = 60°$, (*b*) $\theta = 120°$.

10.21 Para o mecanismo articulado mostrado na figura, determine o binário **M** necessário para o equilíbrio, quando $l = 0{,}55$ m, $Q = 180$ N e $\theta = 65°$.

10.22 Para o mecanismo articulado mostrado na figura, determine a força **Q** necessária para o equilíbrio, quando $l = 450$ mm, $M = 67.500$ N · mm e $\theta = 70°$.

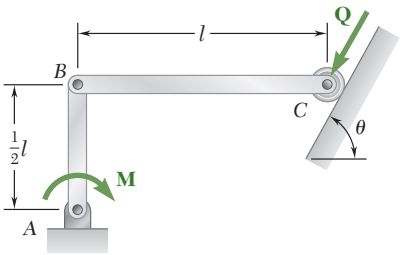


Figura P10.21 e P10.22

10.23 Determine o valor de θ correspondente para a posição de equilíbrio do mecanismo do Problema 10.11, quando $P = 200$ N e $Q = 720$ N.

10.24 Determine o valor de θ correspondente para a posição de equilíbrio do mecanismo do Problema 10.9, quando $P = 80$ N e $Q = 100$ N.

10.25 A barra *AB* é fixada ao bloco *A* que desliza sem atrito na fenda vertical como mostrada na figura. Desprezando o efeito do atrito e o peso das barras, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio.

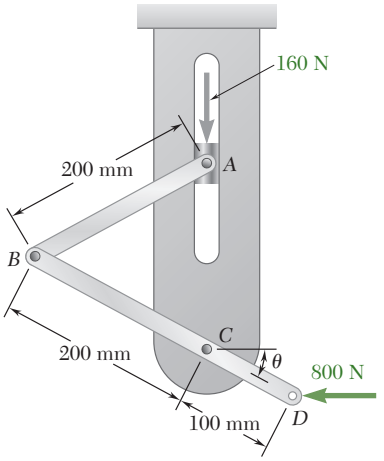


Figura P10.25

10.26 Resolva o Problema 10.25 considerando que a força de 800 N é substituída por um binário de 24 N · m no sentido horário aplicado em *D*.

10.27 Determine o valor de θ correspondente para a posição de equilíbrio da haste do Problema 10.12, quando $l = 750$ mm, $a = 125$ mm, $P = 112$ N e $Q = 180$ N.

10.28 Determine o valor de θ correspondente para a posição de equilíbrio da haste do Problema 10.13, quando $l = 600$ mm, $a = 100$ mm, $P = 50$ N, e $Q = 90$ N.

10.29 Duas hastes *AC* e *CE* são unidas por um pino em *C* e por uma mola *AE*. A constante da mola é *k*, e a mola está indeformada quando $\theta = 30°$. Para o carregamento mostrado na figura, deduza uma equação em *P*, θ, *l* e *k* que deve ser satisfeita quando o sistema está em equilíbrio.

10.30 Duas hastes *AC* e *CE* estão unidas por um pino em *C* e por uma mola *AE*. A constante da mola é 270 N/m, e a mola está indeformada quando $\theta = 30°$. Sabendo que $l = 250$ mm e desprezando os pesos das hastes, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio quando $P = 180$ N.

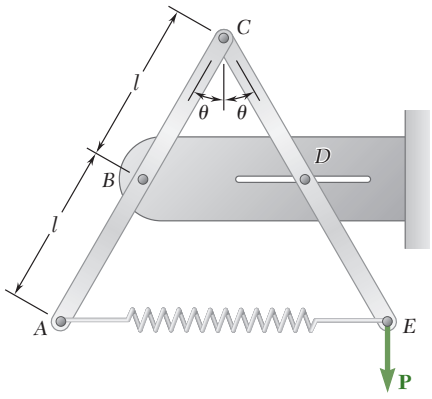


Figura *P10.29* e P10.30

10.31 Resolva o Problema 10.30 considerando que a força **P** é movida para *C* e atua verticalmente para baixo.

10.32 Uma barra *ABC* está ligada aos blocos *A* e *B* que podem se mover livremente nas guias mostradas na figura. A constante da mola fixada em *A* é 3 kN/m, e a mola está indeformada quando a haste é vertical. Para o carregamento mostrado, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio.

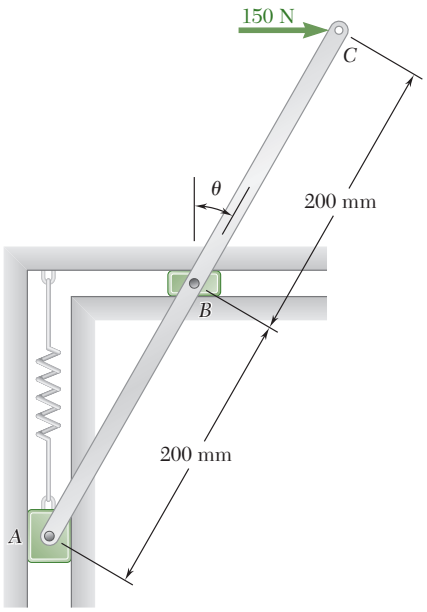


Figura P10.32

10.33 Uma força **W** de intensidade de 600 N é aplicada ao mecanismo articulado em *B*. A constante da mola é $k = 2{,}5$ kN/m, e a mola está indeformada quando *AB* e *BC* são horizontais. Desprezando o peso do mecanismo e sabendo que $l = 300$ mm, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio.

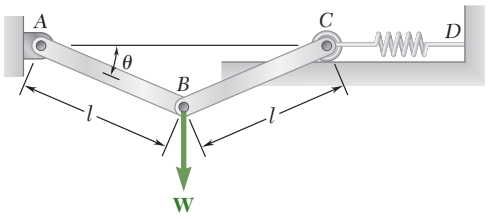


Figura P10.33 e *P10.34*

10.34 Uma força vertical **W** é aplicada ao mecanismo articulado em *B*. A constante da mola é *k*, e a mola está indeformada quando *AB* e *BC* são horizontais. Desprezando o peso do mecanismo, deduza uma equação em θ, *W*, *l* e *k* que deve ser satisfeita quando o mecanismo está em equilíbrio.

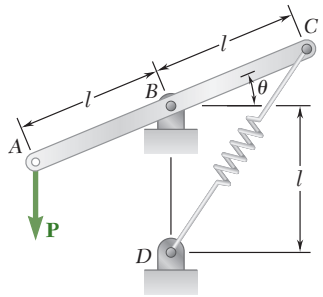


Figura P10.35 e P10.36

10.35 e 10.36 Sabendo que a constante da mola *CD* é *k* e que a mola está indeformada quando a haste *ABC* está horizontal, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio para os dados indicados.

10.35 $P = 300$ N, $l = 400$ mm, $k = 5$ kN/m.

10.36 $P = 338$ N, $l = 375$ mm, $k = 3{,}6$ kN/m

10.37 Uma força horizontal **W** de intensidade de 324 N é aplicada ao mecanismo em *C*. Desprezando o peso do mecanismo, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio. A constante da mola é $k = 3{,}6$ kN/m, e a mola está indeformada quando $\theta = 0°$.

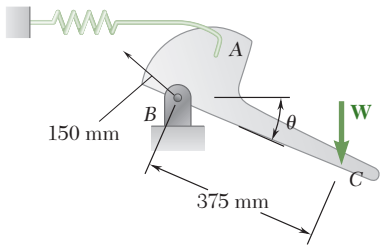


Figura P10.37

10.38 A força **P** de intensidade 240 N é aplicada na ponta *E* do cabo *CDE*, que passa por uma polia *D* e é fixado ao mecanismo em *C*. Desprezando o peso do mecanismo e o raio da polia, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio. A constante da mola é $k = 4$ kN/m e a mola está indeformada quando $\theta = 90°$.

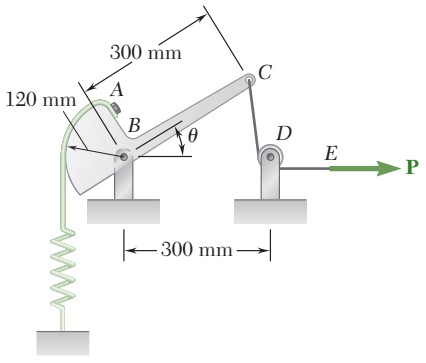


Figura P10.38

10.39 Uma alavanca *AB* é presa ao eixo horizontal *BC* que passa através de um mancal e é soldado a um suporte fixo em *C*. A constante de mola

torcional do eixo *BC* é *K;* ou seja, é necessário um binário de intensidade *K* para girar a extremidade *B* de 1 radiano. Sabendo que o eixo não está torcido quando *AB* é horizontal, determine o valor de θ correspondente à posição de equilíbrio quando $P = 100$ N, $l = 250$ mm e $K = 12{,}5$ N · m/rad.

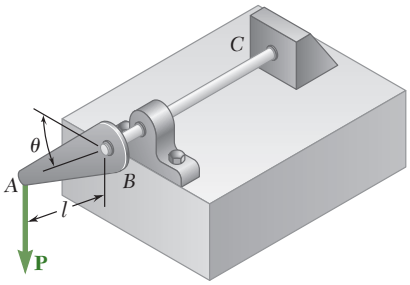


Figura P10.39

10.40 Resolva o Problema 10.39 considerando que $P = 350$ N, $l = 250$ mm e $K = 12{,}5$ N · m/rad. Obtenha respostas em cada um dos seguintes quadrantes: $0 < \theta < 90°$; $270° < \theta < 360°$; $360° < \theta < 450°$.

10.41 A posição da manivela *ABC* é controlada pelo cilindro hidráulico *BD*. Para o carregamento mostrado na figura, determine a força exercida pelo cilindro hidráulico no pino *B* sabendo que $\theta = 65°$.

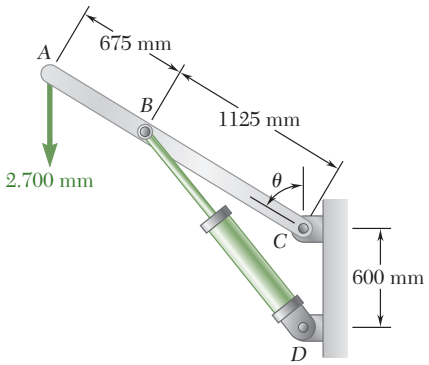


Figura *P10.41* e *P10.42*

10.42 A posição da manivela *ABC* é controlada pelo cilindro hidráulico *BD*. Para o carregamento mostrado na figura, (*a*) expresse a força exercida pelo cilindro hidráulico no pino *B* em função do comprimento *BD*, (*b*) determine o menor valor possível para o ângulo θ se a força máxima que o cilindro hidráulico pode exercer no pino *B* é 11,25 kN.

10.43 A posição da manivela *ABC* é controlada pelo cilindro hidráulico *CD*. Para o carregamento mostrado na figura, determine a força exercida pelo cilindro hidráulico no pino *C* quando $\theta = 55°$.

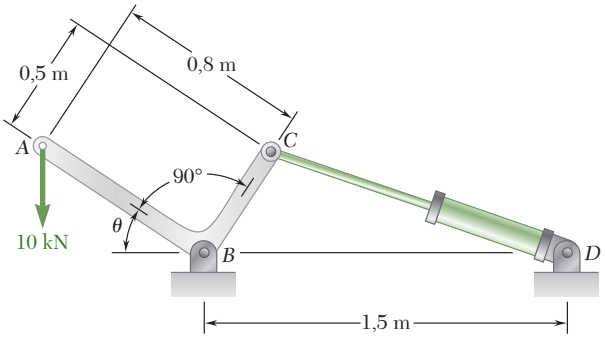


Figura P10.43 e P10.44

10.44 A posição da manivela *ABC* é controlada pelo cilindro hidráulico *CD*. Determine o ângulo θ sabendo que o cilindro hidráulico exerce uma força 15 kN no pino *C*.

10.45 O braço telescópico *ABC* é usado para prover uma plataforma elevada para operários de construção. Juntos, operários e a plataforma têm um peso de 2.250 N, e seu centro de gravidade combinado está localizado diretamente acima de *C*. Para a posição em que $\theta = 20°$, determine a força exercida sobre o pino *B* pelo único cilindro hidráulico *BD*.

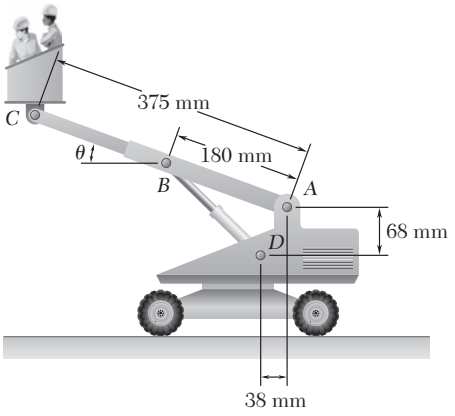


Figura P10.45

10.46 Resolva o Problema 10.45 considerando que os operários desceram para um ponto próximo ao solo de modo que $\theta = -20°$.

10.47 Um bloco de peso *W* é levado ao repouso em um plano formando um ângulo α com a horizontal por meio de uma força **P** direcionada ao longo do plano. Se μ é o coeficiente de atrito entre o bloco e o plano deduza uma expressão para a eficiência mecânica do sistema. Mostre que a eficiência mecânica não pode exceder $\frac{1}{2}$ se o bloco permanecer no lugar quando a força **P** for removida.

10.48 Representado por μ_s o coeficiente de atrito estático entre o bloco preso à barra *ACE* e a superfície horizontal, deduza as expressões em termos de *P*, μ_s e θ para a maior e a menor intensidade da força **Q** para as quais o equilíbrio é mantido.

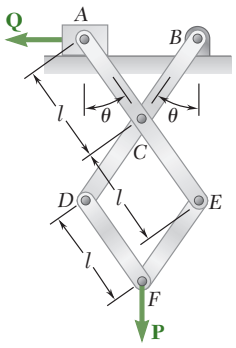


Figura *P10.48* e P10.49

10.49 Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco preso à barra *ACE* e a superfície horizontal é igual a 0,15, determine as intensidades da maior e da menor força **Q** para as quais o equilíbrio é mantido quando $\theta = 30°$, $l = 0{,}2$ m e $P = 40$ N.

10.50 Representado por μ_s o coeficiente de atrito estático entre o colar C e a haste vertical, deduza uma expressão para a intensidade do maior binário **M** para o qual o equilíbrio é mantido na posição mostrada na figura. Explique o que acontece se $\mu_s > \text{tg}\,\theta$.

10.51 Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o colar C e a haste vertical é 0,40, determine a intensidade do maior e do menor binário **M** para o qual equilíbrio é mantido na posição mostrada quando $\theta = 35°$, $l = 600$ mm e $P = 300$ N.

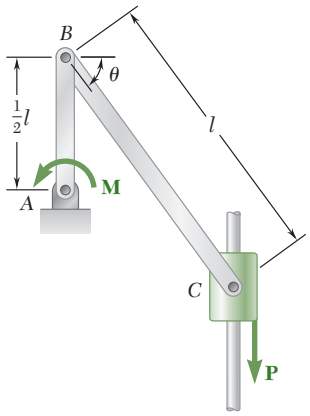


Figura P10.50 e P10.51

10.52 Deduza uma expressão para a eficiência mecânica do macaco discutido na Seção 8.6. Mostre que, se o macaco tem que ser autotravante, a eficiência mecânica não pode exceder $\frac{1}{2}$.

10.53 Usando o método do trabalho virtual, determine a reação em E.

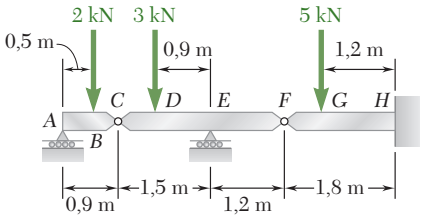


Figura P10.53 e P10.54

10.54 Usando o método do trabalho virtual, determine separadamente a força e o binário que representa a reação em H.

10.55 Voltando ao Problema 10.43 e usando o valor encontrado para a força exercida pelo cilindro hidráulico CD, determine a mudança no comprimento de CD necessária para se elevar a carga de 10 kN em 15 mm.

10.56 Voltando ao Problema 10.45 e usando o valor encontrado para a força exercida pelo cilindro hidráulico BD, determine a mudança no comprimento de BD necessária para se elevar a plataforma presa em C em 63 mm.

10.57 Determine o movimento vertical do nó D se o comprimento do elemento BF é aumentado em 38 mm. (*Dica:* aplique uma carga vertical no nó D e, usando os métodos do Capítulo 6, calcule a força exercida pelo elemento BF nos nós B e F. Em seguida, aplique o método do trabalho virtual para um deslocamento virtual que resulta no aumento específico no comprimento do elemento BF. Esse método deve ser usado somente para pequenas mudanças nos comprimentos dos elementos.)

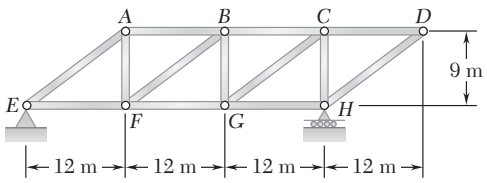


Figura P10.57 e P10.58

10.58 Determine o movimento horizontal do nó D se o comprimento do elemento BF é aumentado em 38 mm. (Ver dica para o Problema 10.57.)

*10.6 Trabalho de uma força durante um deslocamento finito

Considere uma força **F** exercida sobre uma partícula. O trabalho de **F** correspondente a um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r}$ da partícula foi definido na Seção 10.2 como:

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.1}$$

O trabalho de **F** correspondente a um deslocamento finito da partícula de A_1 até A_2 (Fig. 10.10*a*) é representado por $U_{1\to2}$ e é obtido integrando-se (10.1) ao longo da curva descrita pela partícula:

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.11}$$

Usando a expressão alternativa

$$dU = F\,ds\cos\alpha \tag{10.1′}$$

dada na Seção 10.2 para o trabalho elementar dU, podemos também expressar o trabalho $U_{1\to2}$ como

$$U_{1\to2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)\,ds \tag{10.11′}$$

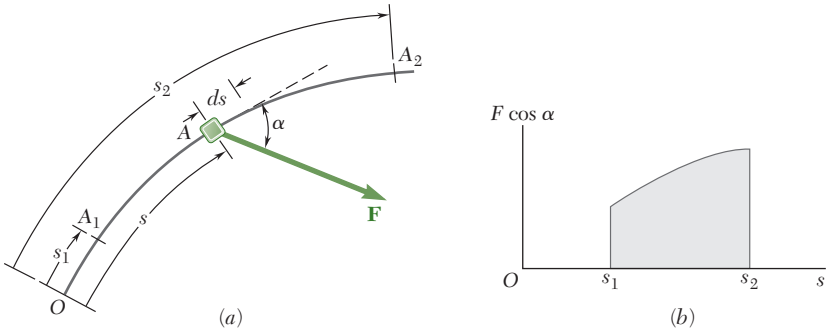


Figura 10.10

onde a variável de integração s mede a distância ao longo do caminho percorrido pela partícula. O trabalho $U_{1\to2}$ é representado pela área sob a curva obtida traçando $F\cos\alpha$ em função de s (Fig. 10.10*b*). No caso de uma força **F** de intensidade constante atuante na direção do movimento, a fórmula (10.11′) fornece $U_{1\to2} = F(s_2 - s_1)$.

Lembrando-se da Seção 10.2, de que o trabalho de um binário de momento **M** durante uma rotação infinitesimal $d\theta$ de um corpo rígido é

$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

expressa-se a seguir o trabalho do binário durante uma rotação finita do corpo:

$$U_{1\to2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta \tag{10.12}$$

No caso de um binário constante, a fórmula (10.12) fornece

$$U_{1\to2} = M(\theta_2 - \theta_1)$$

Trabalho de um peso. Afirmamos na Seção 10.2 que o trabalho do peso **W** de um corpo durante um deslocamento infinitesimal desse corpo é igual ao produto de W pelo deslocamento vertical do centro de gravidade do corpo. Com o eixo dos y apontando para cima, o trabalho de **W** durante um deslocamento finito do corpo (Fig. 10.11) é obtido da seguinte maneira:

$$dU = -W\,dy$$

Integrando de A_1 até A_2, temos

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\,dy = Wy_1 - Wy_2 \tag{10.13}$$

ou

$$U_{1\to 2} = -W(y_2 - y_1) = -W\,\Delta y \tag{10.13'}$$

sendo Δy o deslocamento vertical de A_1 até A_2. O trabalho do peso **W** é, portanto, igual ao *produto de W pelo deslocamento vertical do centro de gravidade do corpo.* O trabalho é *positivo* quando $\Delta y < 0$, ou seja, *quando o corpo está se movendo para baixo.*

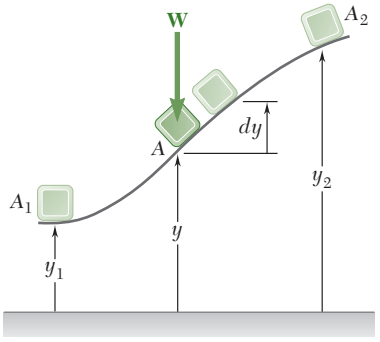


Figura 10.11

Trabalho da força exercida por uma mola. Considere um corpo A unido ao ponto fixo B por uma mola; considera-se que a mola esteja indeformada quando o corpo está em A_0 (Fig. 10.12*a*). A evidência experimental nos mostra que a intensidade da força **F** exercida pela mola no corpo A é proporcional à deflexão x da mola medida a partir da posição A_0. Temos

$$F = Kx \tag{10.14}$$

sendo k a *constante de mola,* expressa em N/m nas unidades do SI. O trabalho da força **F** exercida pela mola durante um deslocamento finito do corpo de A_1 ($x = x_1$) até A_2 ($x = x_2$) é obtido da seguinte maneira:

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \tag{10.15}$$

Observamos que o trabalho da força **F** exercida pela mola sobre o corpo é *positivo* quando $x_2 < x_1$, ou seja, *quando a mola está retornando à sua posição indeformada.*

Como a Eq. (10.14) é a equação de uma linha reta de inclinação k que passa pela origem, pode-se obter o trabalho $U_{1\to 2}$ de **F** durante o deslocamento de A_1 até A_2 avaliando-se a área do trapézio mostrado na Fig. 10.12*b*. Isso é feito calculando-se os valores F_1 e F_2 e multiplicando-se a base Δx do trapézio pela sua altura média $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Como o trabalho da força **F** exercido pela mola é positivo para um valor negativo de Δx, temos:

$$U_{1\to 2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x \tag{10.16}$$

A fórmula (10.16) geralmente é mais conveniente de se usar do que a fórmula (10.15).

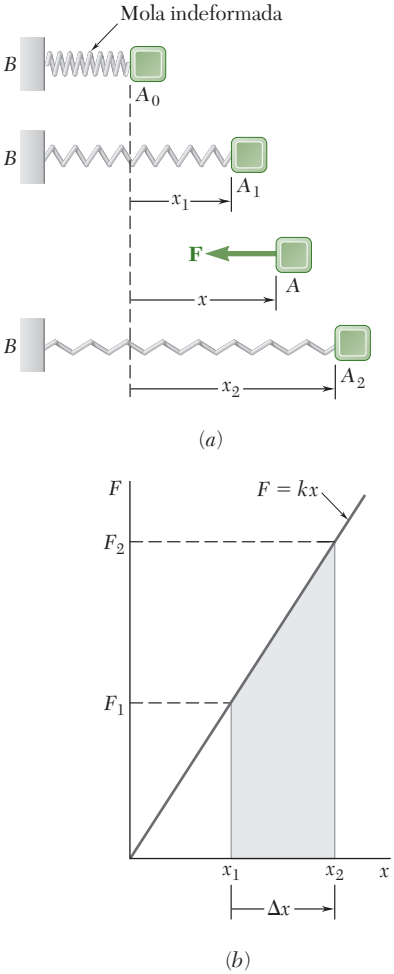


Figura 10.12

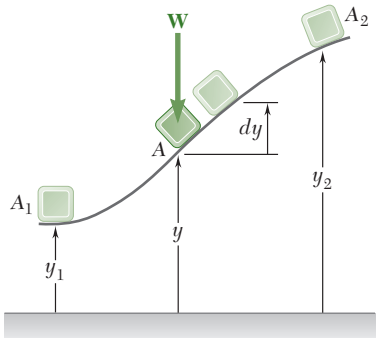


Figura 10.11 (*repetida*)

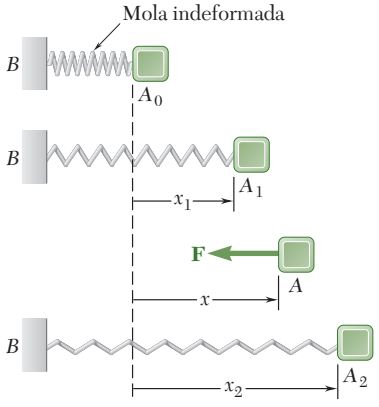


Figura 10.12a (repetida)

*10.7 Energia potencial

Considerando novamente o corpo da Fig. 10.11, verificamos da Eq. (10.13) que o trabalho do peso **W** durante um deslocamento finito é obtido subtraindo-se o valor da função Wy correspondente à segunda posição do corpo de seu valor correspondente à primeira posição. O trabalho de **W** é, então, independente do caminho realmente seguido; ele depende somente dos valores inicial e final da função Wy. Essa função denomina-se *energia potencial* do corpo com respeito à *força da gravidade* **W** e é representada por V_g. Temos:

$$U_{1\to 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \qquad \text{com } V_g = Wy \tag{10.17}$$

Observamos que se $(V_g)_2 > (V_g)_1$, ou seja, *se a energia potencial aumenta* durante o deslocamento (como no caso considerado aqui), *o trabalho* $U_{1\to 2}$ *é negativo.* Se, por outro lado, o trabalho de **W** é positivo, a energia potencial diminui. Portanto, a energia potencial V_g do corpo fornece uma medida do *trabalho que pode ser realizado* por seu peso **W**. Como somente a *mudança* na energia potencial, e não o valor real de V_g, está envolvida na fórmula (10.17), pode-se acrescentar uma constante arbitrária à expressão obtida para V_g. Em outras palavras, o nível a partir do qual a elevação y é medida pode ser escolhido arbitrariamente. Observamos que a energia potencial é expressa nas mesmas unidades que o trabalho, ou seja, em joules (J)*.

Considerando agora o corpo da Fig. 10.12*a*, observamos a partir da Equação (10.15) que o trabalho da força elástica **F** é obtido subtraindo-se o valor da função $\frac{1}{2}kx^2$ correspondente à segunda posição do corpo de seu valor correspondente à primeira posição. Essa função é representada por V_e e denomina-se *energia potencial* do corpo com respeito à *força elástica* **F**. Temos

$$U_{1\to 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \qquad \text{com } V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{10.18}$$

e observamos que, durante o deslocamento considerado, o trabalho da força **F** exercida pela mola sobre o corpo é negativo e a energia potencial V_e aumenta. Devemos observar que a expressão obtida para V_e é válida somente se a deflexão da mola for medida a partir da sua posição indeformada.

O conceito de energia potencial pode ser usado quando estão envolvidas forças diferentes das forças gravitacionais e das forças elásticas. Esse conceito continua válido enquanto o trabalho elementar dU da força considerada for um *diferencial exato.* É, então, possível encontrar uma função V denominada energia potencial, tal que:

$$dU = -dV \tag{10.19}$$

Integrando (10.19) sobre um deslocamento finito, obtemos a fórmula geral

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 \tag{10.20}$$

que expressa que o *trabalho da força é independente do caminho seguido e é igual a menos a mudança na energia potencial.* Diz-se que a força que satisfaz a Eq. (10.20) é uma *força conservativa.***

* Ver nota de rodapé página 561.

** Uma discussão detalhada das forças conservativas é feita na Seção 13.7 no livro de Dinâmica.

*10.8 Energia potencial e equilíbrio

A aplicação do princípio do trabalho virtual é consideravelmente simplificada quando se conhece a energia potencial de um sistema. No caso de um deslocamento virtual, a fórmula (10.19) se torna $dU = -\delta V$. Além disso, se a posição do sistema é definida por uma única variável independente θ, podemos escrever $\delta V = (dV/d\theta)\,\delta\theta$. Como $\delta\theta$ deve ser diferente de zero, a condição $\delta U = 0$ para o equilíbrio do sistema torna-se:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \tag{10.21}$$

Em termos de energia potencial, portanto, o princípio dos trabalhos virtuais afirma que, *se um sistema está em equilíbrio, a derivada de sua energia potencial total é igual a zero.* Se a posição do sistema depende de várias variáveis independentes (diz-se então que o sistema tem *vários graus de liberdade*), as derivadas parciais de V em relação a cada uma das variáveis independentes devem ser iguais a zero.

Considere, por exemplo, uma estrutura feita de dois elementos AC e CB que sustenta uma carga W em C. A estrutura é sustentada por um pino em A e um rolete em B, e uma mola BD que liga B a um ponto fixo D (Fig. 10.13*a*). A constante da mola é k, e supõe-se que o comprimento natural da mola seja igual a AD e, portanto, que a mola está indeformada quando B coincide com A. Desprezando as forças de atrito e o peso dos elementos, encontramos que as únicas forças que realizam trabalho durante um deslocamento da estrutura são o peso **W** e a força **F** exercida pela mola no ponto B (Fig. 10.13*b*). A energia potencial total do sistema será, então, obtida somando-se a energia potencial V_g correspondente à força gravitacional **W** e a energia potencial V_e correspondente à força elástica **F**.

Escolhendo um sistema de coordenadas com origem em A e observando que a deflexão da mola, medida a partir de sua posição indeformada, é $AB = x_B$, temos:

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_B^2 \qquad V_g = Wy_C$$

Expressando as coordenadas x_B e y_C em termos do ângulo θ, temos:

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \operatorname{sen}\theta & y_C &= l\cos\theta \\ V_e &= \tfrac{1}{2}k(2l\operatorname{sen}\theta)^2 & V_g &= W(l\cos\theta) \\ V &= V_e + V_g = 2kl^2\operatorname{sen}^2\theta + Wl\cos\theta \end{aligned} \tag{10.22}$$

As posições de equilíbrio do sistema são obtidas igualando-se a zero a derivada da energia potencial V. Temos

$$\frac{dV}{d\theta} = 4kl^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - Wl\operatorname{sen}\theta = 0$$

ou, fatorando $l\operatorname{sen}\theta$,

$$\frac{dV}{d\theta} = l\operatorname{sen}\theta(4kl\cos\theta - W) = 0$$

Existem, portanto, duas posições de equilíbrio correspondentes aos valores $\theta = 0$ e $\theta = \cos^{-1}(W/4kl)$, respectivamente.*

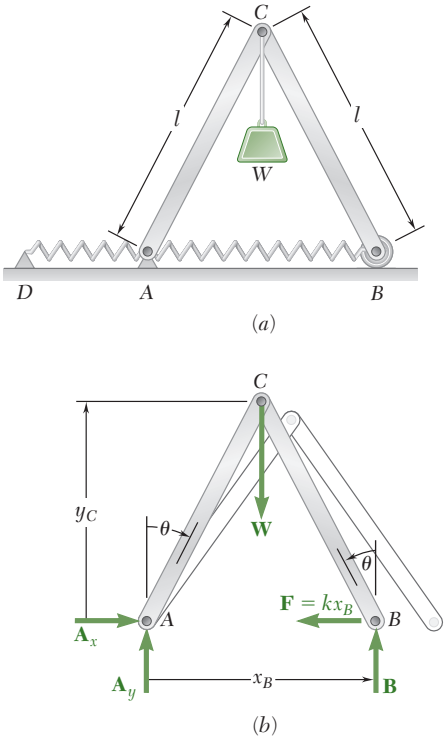
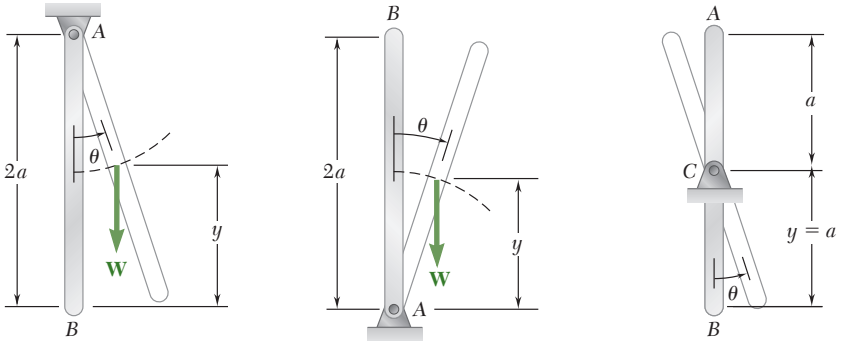


Figura 10.13

* A segunda posição não existe se $W > 4kl$.

*10.9 Estabilidade do equilíbrio

Considere as três barras uniformes de comprimento $2a$ e peso **W** mostradas na Fig. 10.14. Embora cada haste esteja em equilíbrio, existe uma importante diferença entre os três casos considerados. Suponha que cada haste seja levemente deslocada da sua posição de equilíbrio e depois é solta: a haste *a* vai se moverá de volta em direção à sua posição original; a haste *b* continuará o movimento afastando-se da sua posição original; e a haste *c* vai permanecer em sua nova posição. No caso *a*, diz-se que o equilíbrio da haste é *estável;* no caso *b*, diz-se que é *instável;* e, no caso *c*, diz-se que é *neutro*.



(*a*) Equilíbrio estável (*b*) Equilíbrio instável (*c*) Equilíbrio neutro

Figura 10.14

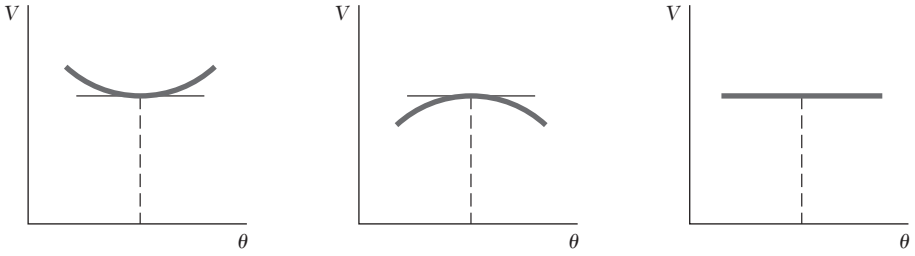
Voltando à Seção 10.7, em que vimos que a energia potencial V_g com respeito à gravidade é igual a W_y, sendo y a elevação do ponto da aplicação, de **W** medida a partir de um nível arbitrário, observamos que a energia potencial da haste *a* é mínima na posição de equilíbrio considerada, que a energia potencial da haste *b* é máxima, e que a energia potencial da haste *c* é constante. O equilíbrio é, portanto, *estável*, *instável* ou *neutro*, se a energia potencial for *mínima, máxima* ou *constante* (Fig. 10.15).

O resultado obtido é bem geral e pode ser visto como se segue: primeiro observamos que a força sempre tende a fazer um trabalho positivo e, portanto, a diminuir a energia potencial do sistema sobre o qual ela é aplicada. Portanto, quando um sistema é perturbado a partir da sua posição de equilíbrio, as forças atuantes no sistema tenderão a trazê-lo de volta à sua posição original se V for mínimo (Fig. 10.15*a*) e a movê-lo para longe se V for máximo (Fig. 10.15*b*). Se V for constante (Fig. 10.15*c*), as forças não tendem a mover o sistema de nenhuma dessas maneiras.

Recordando o cálculo que uma função é mínima ou máxima se sua derivada segunda é positiva ou negativa. Podemos, então, resumir as con-

dições para o equilíbrio de um sistema com um grau de liberdade (ou seja, um sistema cuja posição é definida por uma única variável independente θ) como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= 0 \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} > 0\text{: equilíbrio estável} \\ \frac{dV}{d\theta} &= 0 \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} < 0\text{: equilíbrio instável} \end{aligned} \tag{10.23}$$



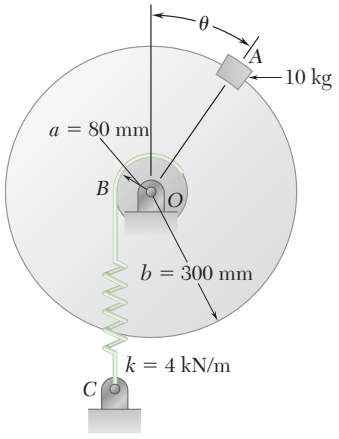
(*a*) Equilíbrio estável (*b*) Equilíbrio instável (*c*) Equilíbrio neutro

Figura 10.15

Se a primeira e a segunda derivadas de V forem iguais a zero, é necessário examinar as derivadas de ordens mais altas para se determinar se o equilíbrio é estável, instável ou neutro. O equilíbrio será neutro se todas as derivadas forem zero, pois nesse caso a energia potencial V é uma constante. O equilíbrio será estável se a primeira derivada que for encontrada diferente de zero for de ordem par e positiva. Em todos os outros casos, o equilíbrio será instável.

Se o sistema considerado tem *vários graus de liberdade*, a energia potencial V depende de inúmeras variáveis, e é, portanto, necessário aplicar a teoria de funções de várias variáveis para determinar se V é mínimo. Pode-se verificar que um sistema com 2 graus de liberdade será estável, e a correspondente energia potencial $V(\theta_1, \theta_2)$ será mínima, se as seguintes relações forem satisfeitas simultaneamente:

$$\begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} < 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} > 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} > 0 \end{gathered} \tag{10.24}$$



PROBLEMA RESOLVIDO 10.4

Um bloco de 10 kg é preso ao aro de um disco de 300 mm de raio, tal como mostra na figura. Sabendo que a mola *BC* está indeformada quando $\theta = 0$, determine a posição ou posições de equilíbrio e determine em cada caso se o equilíbrio é estável ou neutro.

SOLUÇÃO

Energia potencial. Representado por s a deflexão da mola a partir da sua posição indeformada e colocando a origem das coordenadas em O, obtemos:

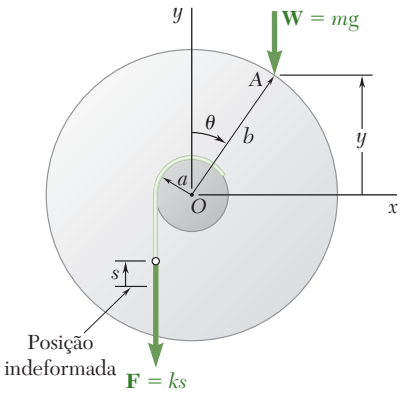
$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \qquad V_g = Wy = mgy$$

Medindo θ em radianos, temos:

$$s = a\theta \qquad y = b\cos\theta$$

Substituindo s e y nas expressões para V_e e V_g, temos:

$$V_e = \tfrac{1}{2}ka^2\theta^2 \qquad V_g = mgb\cos\theta$$
$$V = V_e + V_g = \tfrac{1}{2}ka^2\theta^2 + mgb\cos\theta$$



Posições de equilíbrio. Estabelecendo que $dV/d\theta = 0$, temos:

$$\frac{dV}{d\theta} = ka^2\theta - mgb\,\text{sen}\,\theta = 0$$
$$\text{sen}\,\theta = \frac{ka^2}{mgb}\theta$$

Substituindo $a = 0{,}08$ m, $b = 0{,}3$ m, $k = 4$ kN/m e $m = 10$ kg, obtemos

$$\text{sen}\,\theta = \frac{(4\text{ kN/m})(0{,}08\text{ m})^2}{(10\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)(0{,}3\text{ m})}\theta$$
$$\text{sen}\,\theta = 0{,}8699\,\theta$$

sendo θ expresso em radianos. Resolvendo numericamente para θ, encontramos:

$$\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 0{,}902\text{ rad}$$
$$\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 51{,}7° \quad \blacktriangleleft$$

Estabilidade do equilíbrio. A segunda derivada da energia potencial V com relação a θ é:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = ka^2 - mgb\cos\theta =$$
$$= (4\text{ kN/m})(0{,}08\text{ m})^2 - (10\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)(0{,}3\text{ m})\cos\theta$$
$$= 25{,}6 - 29{,}43\cos\theta$$

Para $\theta = 0$: $\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 25{,}6 - 29{,}43\cos 0° = -3{,}83 < 0$

O equilíbrio é instável para $\theta = 0$. ◀

Para $\theta = 51{,}7°$: $\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 25{,}6 - 29{,}43\cos 51{,}7° = +7{,}36 > 0$

O equilíbrio é estável para $\theta = 51{,}7°$. ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção definimos o *trabalho de uma força durante um deslocamento finito* e a *energia potencial* de um corpo rígido ou de um sistema de corpos rígidos. Aprendemos a usar o conceito de energia potencial para determinar a *posição de equilíbrio* de um corpo rígido ou de um sistema de corpos rígidos.

1. A energia potencial *V* de um sistema é igual à soma das energias potenciais associadas às várias forças atuantes sobre o sistema que *realizam trabalho* à medida que o sistema se move. Nos problemas desta seção, determinaremos o seguinte:

a. Energia potencial de um peso. Essa é a energia potencial devida *a. gravidade*, $V_g = Wy$, sendo y a elevação do peso W medida a partir de um nível de referência arbitrário. Observemos que a energia potencial V_g pode ser usada com qualquer força vertical **P** de intensidade constante direcionada para baixo; escrevemos $V_g = Py$.

b. Energia potencial de uma mola. A energia potencial é $V_e = \frac{1}{2}kx^2$, em virtude da força *elástica* exercida por uma mola, sendo k a constante da mola e x a deformação da mola *medida a partir da sua posição indeformada.*

Reações em apoios fixos, forças internas em conexões, forças exercidas por cordas e cabos inextensíveis e outras forças que não realizam trabalho não contribuem para a energia potencial do sistema.

2. Expressemos todas as distâncias e os ângulos em termos de uma só variável, tal como um ângulo θ, quando calcular a energia potencial V de um sistema. Isso é necessário, pois a determinação da posição de equilíbrio do sistema requer o cálculo da derivada $dV/d\theta$.

3. Quando um sistema está em equilíbrio, a primeira derivada de sua energia potencial é igual a zero. Então:

a. Para determinar a posição de equilíbrio de um sistema, uma vez que sua energia potencial V tiver sido expressa em termos de uma só variável θ, calcule sua derivada e resolva a equação $dV/d\theta = 0$, para θ.

b. Para determinar a força ou o binário necessário para se manter um sistema em uma dada posição em equilíbrio, substitua o valor conhecido de θ na equação $dV/d\theta = 0$ e resolva essa equação para a força ou o binário desejado.

4. Estabilidade do equilíbrio. As seguintes regras geralmente se aplicam:

a. Equilíbrio estável ocorre quando a energia potencial do sistema é *mínima*, ou seja, quando $dV/d\theta = 0$ e $d^2V/d\theta^2 > 0$ (Figs. 10.14*a* e 10.15*a*).

b. Equilíbrio instável ocorre quando a energia potencial do sistema é *máxima*, ou seja, quando $dV/d\theta = 0$ e $d^2V/d\theta^2 < 0$ (Figs. 10.14*b* e 10.15*b*).

c. Equilíbrio neutro ocorre quando a energia potencial do sistema é *constante;* $dV/d\theta$, $dV^2/d\theta^2$, e todas as derivadas sucessivas de V são, então, iguais a zero (Figs. 10.14*c* e 10.15*c*).

Veja a página 585 para uma discussão do caso quando $dV/d\theta$, $dV^2/d\theta^2$, mas *não todas* as derivadas sucessivas de V são iguais a zero.

PROBLEMAS

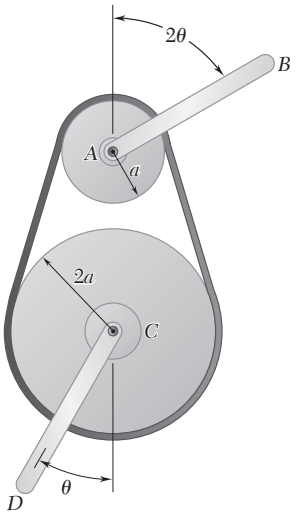


Figura P10.69

10.59 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.29.

10.60 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.30.

10.61 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.33.

10.62 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.34.

10.63 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.35.

10.64 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.36.

10.65 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.31.

10.66 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.38.

10.67 Mostre que o equilíbrio é neutro no Problema 10.1.

10.68 Mostre que o equilíbrio é neutro no Problema 10.6.

10.69 Duas barras uniformes idênticas, cada qual de massa m e comprimento l, estão unidas a roldanas que estão ligadas a uma correia, tal como mostra a figura. Supondo que não há escorregamento entre a correia e as roldanas, determine as posições de equilíbrio do sistema e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

10.70 Duas barras uniformes AB e CD que tem o mesmo comprimento l estão unidas a engrenagens, tal como mostra a figura. Sabendo que a barra AB pesa 13,5 N e a barra CD pesa 9 N, determine as posições de equilíbrio do sistema e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

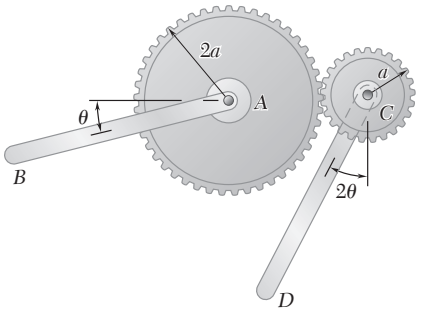


Figura P10.70

10.71 Duas barras uniformes, cada qual de massa m, estão unidas a engrenagens de raios iguais, tal como mostra a figura. Determine as posições de equilíbrio do sistema e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

10.72 Duas barras uniformes, *AB* e *CD*, estão unidas a engrenagens de raios iguais, tal como mostra a figura. Sabendo que $W_{AB} = 36$ N e $W_{CD} = 18$ N, determine as posições de equilíbrio do sistema e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

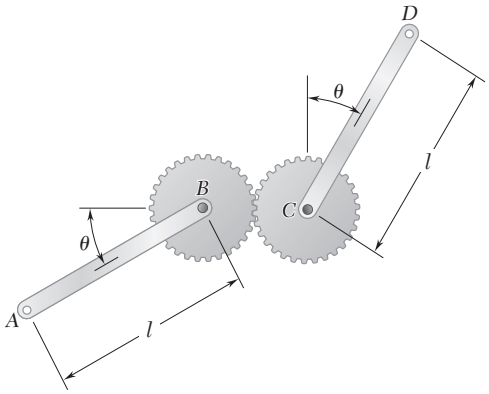


Figura P10.71 e P10.72

10.73 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.39. Determine se o equilíbrio é estável, instável ou neutro. (*Dica:* a energia potencial correspondente ao binário exercida por uma mola torcional é igual a $\frac{1}{2}K\theta^2$, sendo K a constante torcional da mola e θ o ângulo de rotação.)

10.74 No Problema 10.40, determine se cada uma das posições de equilíbrio é estável, instável ou neutra. (Ver dica para o Problema 10.73.)

10.75 Uma carga **W** de intensidade 450 N é aplicada ao mecanismo em *C*. Sabendo que a mola está indeformada quando $\theta = 15°$, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio e verifique se o equilíbrio é estável.

10.76 Uma carga **W** de intensidade 450 N é aplicada ao mecanismo em *C*. Sabendo que a mola está indeformada quando $\theta = 30°$, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio e verifique se o equilíbrio é estável.

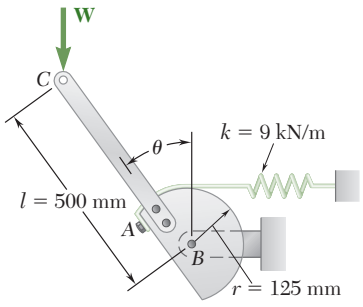


Figura *P10.75 e 10.76*

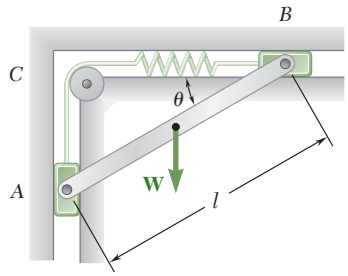


Figura *P10.77* e P10.78

10.77 Uma haste delgada *AB*, de peso *W*, é unida a dois blocos *A* e *B* que podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. A constante da mola é *k*, e a mola está indeformada quando *AB* é horizontal. Desprezando o peso dos blocos, deduza uma equação em θ, *W*, *l* e *k* que deve ser satisfeita quando a haste está em equilíbrio.

10.78 Uma haste delgada *AB*, de peso *W*, é unida a dois blocos *A* e *B* que podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. Sabendo que a mola está indeformada quando *AB* é horizontal, determine três valores de θ correspondentes ao equilíbrio quando $W = 1.350$ N, $l = 400$ mm e $k = 13{,}5$ kN/mm. Determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

10.79 Uma haste delgada *AB*, de peso *W*, é presa a dois blocos *A* e *B* que podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. Sabendo que a mola está indeformada quando $y = 0$, determine o valor de *y* correspondente ao equilíbrio quando $W = 80$ N, $l = 500$ mm e $k = 600$ N/m.

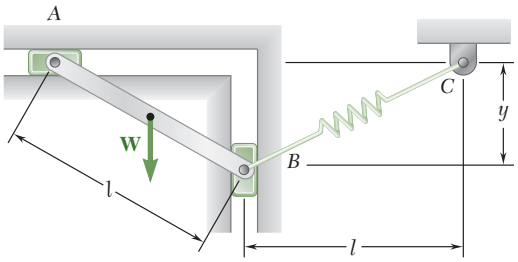


Figura P10.79

10.80 Sabendo que ambas as molas estão indeformadas quando $y = 0$, determine o valor de *y* correspondente ao equilíbrio quando $W = 80$ N, $l = 500$ mm e $k = 600$ N/m.

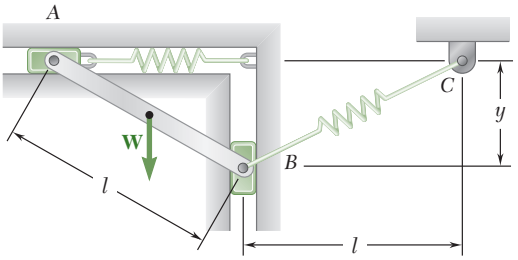


Figura P10.80

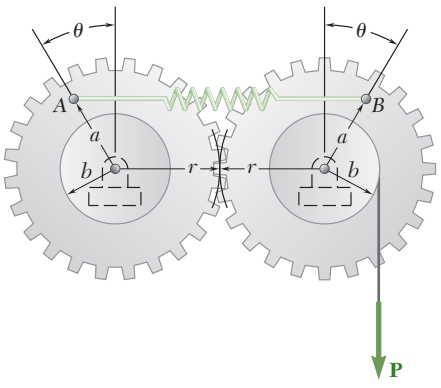


Figura P10.81 e *P10.82*

10.81 A mola *AB*, de constante *k*, está unida a duas engrenagens idênticas tal como mostra a figura. Sabendo que a mola está indeformada quando $\theta = 0$, determine dois valores do ângulo θ correspondente ao equilíbrio quando $P = 135$ N, $a = 100$ mm, $b = 75$ mm, $r = 150$ mm, $k = 0{,}9$ kN/m. Determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

10.82 A mola *AB*, de constante *k*, está unida a duas engrenagens idênticas tal como mostra a figura. Sabendo que a mola está indeformada quando $\theta = 0$ e dado que $a = 60$ mm, $b = 45$ mm, $r = 90$ mm, $k = 6$ kN/m, determine (*a*) o intervalo de valores de *P* para que o equilíbrio seja estável, (*b*) dois valores de θ correspondentes ao equi-

líbrio se o valor de P é igual à metade do limite superior da variação encontrada no item *a*.

10.83 Uma haste delgada AB é unida a dois colares A e B que podem se movimentar livremente ao longo das hastes-guia mostradas na figura. Sabendo que $\beta = 30°$ e $P = Q = 400$ N, determine o valor do ângulo θ correspondente ao equilíbrio.

10.84 Uma haste delgada AB é unida a dois colares A e B que podem se movimentar livremente ao longo das hastes-guia mostradas na figura. Sabendo que $\beta = 30°$, $P = 100$ N e $Q = 25$ N, determine o valor do ângulo θ correspondente ao equilíbrio.

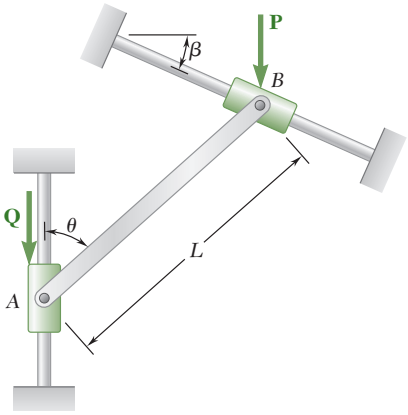


Figura P10.83 e *P10.84*

10.85 e 10.86 O colar A pode deslizar livremente sobre a haste semicircular mostrada na figura. Sabendo que a constante da mola é k e que o comprimento indeformado da mola é igual ao raio r, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio quando $W = 225$ N, $r = 225$ mm e $k = 2{,}7$ kN/m.

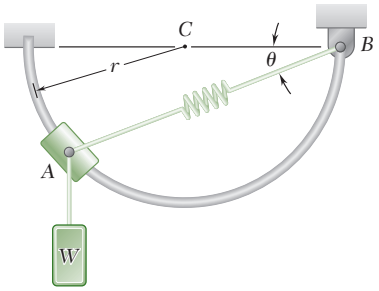


Figura P10.85

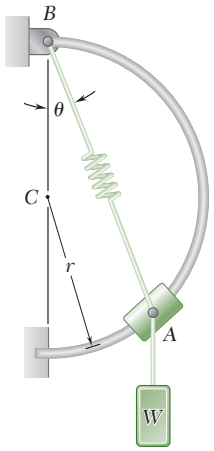


Figura P10.86

***10.87* e 10.88** O carro B, que pesa 75 N, rola ao longo de uma trilha inclinada que forma um ângulo β com a horizontal. A constante da mola é 5 kN/m, e a mola está indeformada quando $x = 0$. Determine a distância x correspondente ao equilíbrio para o ângulo β indicado.

10.87 Ângulo $\beta = 30°$.

10.88 Ângulo $\beta = 60°$.

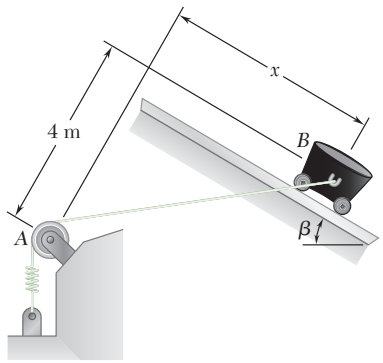


Figura *P10.87* e P10.88

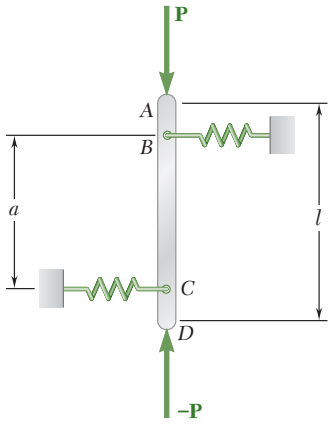


Figura *P10.89*

10.89 A barra vertical *AD* é fixada por duas molas de constante *k* e está em equilíbrio na posição mostrada. Determine o intervalo de valores da intensidade *P* para duas forças verticais iguais e opostas **P** e −**P** para as quais a posição de equilíbrio é estável se (*a*) $AB = CD$, (*b*) $AB = 2CD$.

10.90 A haste *AB* está presa a uma articulação em *A* e a duas molas, cada qual de constante *k*. Se $h = 625$ mm, $d = 300$ mm e $W = 360$ N, determine o intervalo de valores de *k* para os quais o equilíbrio da haste é estável na posição mostrada na figura. Cada mola pode atuar tanto sob tração quanto sob compressão.

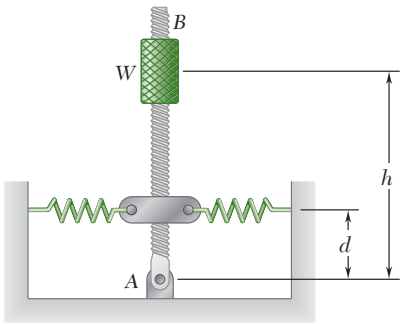


Figura P10.90 e P10.91

10.91 A haste *AB* está presa a uma articulação em *A* e a duas molas, cada qual de constante *k*. Se $h = 1.125$ mm, $k = 1$ kN/m e $W = 270$ N, determine a menor distância *d* para a qual o equilíbrio da haste é estável na posição mostrada na figura. Cada mola pode atuar tanto sob tração quanto sob compressão.

10.92 e 10.93 Duas barras estão presas a uma única mola de constante *k* que está indeformada quando as barras estão na vertical. Determine o intervalo de valores de *P* para os quais o equilíbrio do sistema é estável na posição mostrada na figura.

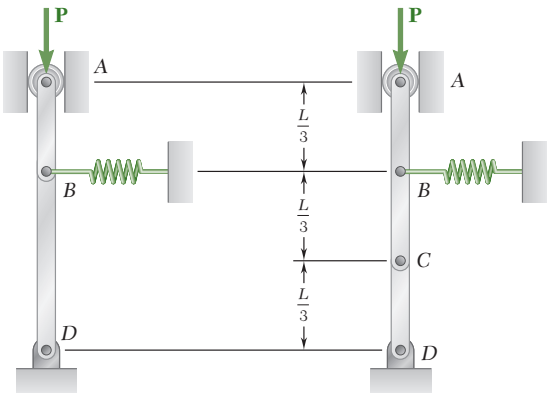


Figura P10.92 e P10.93

10.94 Duas barras *AB* e *BC* estão presas a uma única mola de constante *k* que está indeformada quando as barras estão na vertical. Determine o intervalo de valores de *P* para os quais o equilíbrio do sistema é estável na posição mostrada na figura.

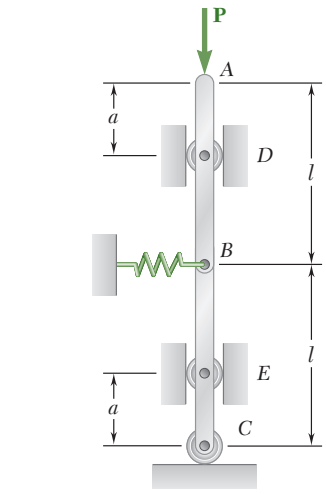


Figura P10.94

10.95 A barra horizontal *BEH* está unida a três barras verticais. O colar em *E* pode se deslizar livremente sobre a barra *DF*. Determine o intervalo de valores de *Q* para os quais o equilíbrio do sistema é estável na posição mostrada na figura quando $a = 600$ mm, $b = 500$ mm e $P = 675$ N.

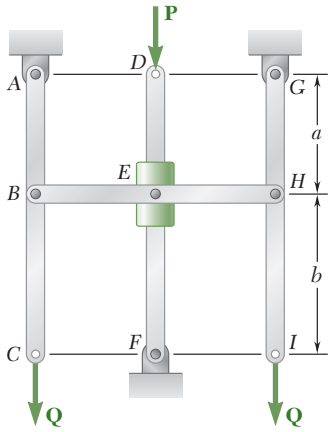


Figura P10.95, P10.96

10.96 A barra horizontal *BEH* está unida a três barras verticais. O colar em *E* pode se deslizar livremente sobre a barra *DF*. Determine o intervalo de valores de *P* para os quais o equilíbrio do sistema é estável na posição mostrada na figura quando $a = 150$ mm, $b = 200$ mm e $Q = 45$ N.

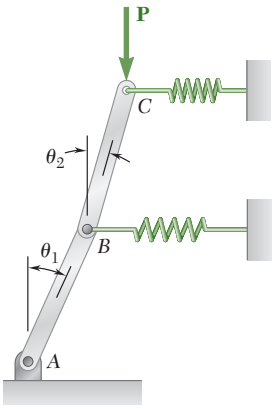


Figura P10.97

***10.97** As barras *AB* e *BC*, cada qual de comprimento *l* e peso desprezível, são unidas a duas molas de constante *k* cada uma. As molas estão indeformadas e o sistema está em equilíbrio quando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Determine o intervalo de valores de *P* para os quais a posição de equilíbrio é estável.

***10.98** Resolva o Problema 10.97 sabendo que $l = 800$ mm e $k = 2{,}5$ kN/m

***10.99** Duas barras de peso desprezível estão articuladas a tambores de raio *r* conectados a uma correia e uma mola de constante *k*. Sabendo que a mola é indeformada quando as barras estão na vertical, determine o intervalo de valores de *P* para que a posição de equilíbrio $\theta_1 = \theta_2 = 0$ seja estável.

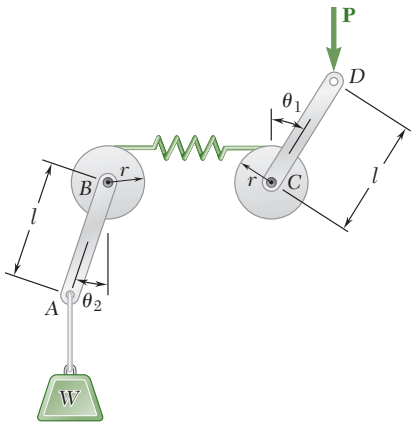


Figura P10.99

***10.100** Resolva o Problema 10.99 sabendo que $k = 3{,}6$ kN/m e $r = 75$ mm, $l = 150$ mm e (*a*) $W = 68$ N, (*b*) $W = 272$ N.

REVISÃO E RESUMO

Trabalho de uma força

A primeira parte deste capítulo foi dedicada ao *princípio do trabalho virtual* e à sua aplicação direta à solução de problemas de equilíbrio. Primeiro definimos o *trabalho de uma força* **F** *correspondente ao pequeno deslocamento d***r** [Seção 10.2] como a quantidade

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.1}$$

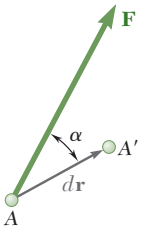


Figura 10.16

obtida formando-se o produto escalar da força **F** e do deslocamento $d\mathbf{r}$ (Fig. 10.16). Representados, respectivamente, por F e ds as intensidades da força e do deslocamento, e por α o ângulo formado entre F e $d\mathbf{r}$, escrevemos

$$dU = F\,ds\cos\alpha \tag{10.1′}$$

O trabalho dU é positivo se $\alpha < 90°$, zero se $\alpha = 90°$ e negativo se $\alpha > 90°$. Também encontramos que o *trabalho de um binário de momento* **M** atuante sobre um corpo rígido é

$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

sendo $d\theta$ o pequeno ângulo, expresso em radianos, que o corpo gira.

Deslocamento virtual

Considerando uma partícula localizada em A e sobre a qual atuam várias forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$ [Seção 10.3], imaginamos que a partícula se moveu para uma nova posição A' (Fig. 10.17). Como não aconteceu de verdade, esse deslocamento foi chamado de *deslocamento virtual* e representado por $\delta\mathbf{r}$, enquanto o trabalho correspondente das forças foi denominado *trabalho virtual* e representado por δU. Tínhamos:

$$\delta U = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r}$$

Princípio do trabalho virtual

O *princípio do trabalho virtual* estabelece que, *se uma partícula está em equilíbrio, o trabalho virtual total* δU *das forças exercidas na partícula é igual a zero para qualquer deslocamento virtual da partícula.*

O princípio do trabalho virtual pode ser estendido ao caso de corpos rígidos e sistemas de corpos rígidos. Como esse princípio envolve *somente forças que realizam trabalho,* sua aplicação fornece uma alternativa útil ao uso de equações de equilíbrio na solução de muitos problemas de engenharia. O princípio é particularmente eficaz no caso de máquinas e mecanismos que consistam em corpos rígidos ligados entre si, já que o trabalho das reações nos apoios é igual a zero, e o trabalho das forças internas nos pinos de conexão se cancela [Seção 10.4; Problemas Resolvidos 10.1, 10.2 e 10.3].

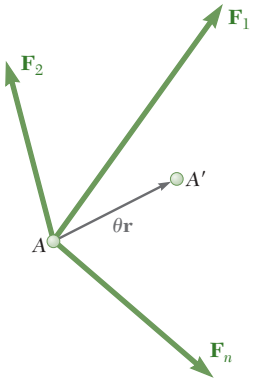


Figura 10.17

Eficiência mecânica

Todavia, no caso de *máquinas reais* [Seção 10.5], o trabalho das forças de atrito deve ser levado em conta, resultando que o *trabalho produzido* (*output*) *será menor que o trabalho recebido* (*input*). Definindo a *eficiência mecânica* de uma máquina como a relação

$$\eta = \frac{\text{trabalho produzido}}{\text{trabalho reduzido}} \tag{10.9}$$

notamos também que para uma máquina ideal (sem atrito) $\eta = 1$, enquanto para uma máquina real $\eta < 1$.

Trabalho de uma força ao longo de um deslocamento finito

Na segunda parte do capítulo consideramos o *trabalho de forças correspondente a deslocamentos finitos* de seus pontos de aplicação. O trabalho $U_{1\to2}$ da força **F** correspondente ao deslocamento da partícula A de A_1 até A_2 (Fig. 10.18) foi obtido integrando-se o lado direito da Eq. (10.1) ou (10.1′) ao longo da curva descrita pela partícula [Seção 10.6]:

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.11}$$

ou

$$U_{1\to2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos\alpha)\, ds \tag{10.11'}$$

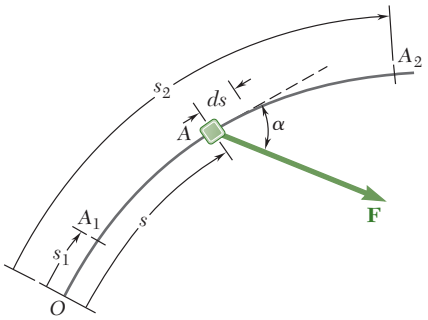


Figura 10.18

De modo semelhante, o trabalho de um binário de momento **M** correspondente a uma rotação finita de θ_1 até θ_2 de um corpo rígido foi expresso como:

$$U_{1\to2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \tag{10.12}$$

Trabalho de um peso

O *trabalho de um peso* **W** *de um corpo* à medida que seu centro de gravidade se move da elevação y_1 até y_2 (Fig. 10.19) pode ser obtido referindo-se a $F = W$ e $\alpha = 180°$ na Eq. (10.11′):

$$U_{1\to2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\, dy = W y_1 - W y_2 \tag{10.13}$$

O trabalho de **W** é, portanto, positivo *quando a elevação y diminui.*

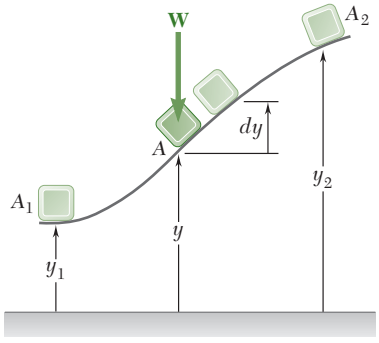


Figura 10.19

Trabalho da força exercida por uma mola

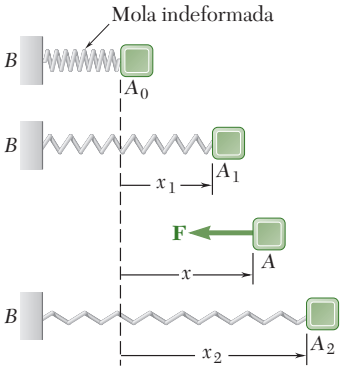


Figura 10.20

O trabalho da força **F** *exercida por uma mola* sobre um corpo *A* à medida que a mola é estendida de x_1 até x_2 (Fig. 10.20) pode ser obtido fazendo-se $F = kx$, sendo k a constante de mola e $\alpha = 180°$ na Eq. (10.11′):

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (10.15)$$

O trabalho de **F** é portanto positivo *quando a mola está retornando à sua posição indeformada.*

Quando o trabalho de uma força **F** é independente do caminho realmente percorrido entre A_1 e A_2, diz-se que a força é uma *força conservativa,* e seu trabalho pode ser expresso como

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 \qquad (10.20)$$

Energia potencial

sendo *V* a *energia potencial* associada a **F**, e V_1 e V_2 representam os valores de *V* em A_1 e A_2, respectivamente [Seção 10.7]. As energias potenciais associadas, respectivamente, com *a força da gravidade* **W** e *a força elástica* **F** exercida por uma mola foram definidas como:

$$V_g = Wy \qquad \text{e} \qquad V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (10.17, 10.18)$$

Expressão alternativa para o princípio do trabalho virtual

Quando a posição de um sistema mecânico depende de uma única variável independente θ, a energia potencial do sistema é uma função $V(\theta)$ dessa variável, e segue-se da Eq. (10.20) que $\delta U = -\delta V = -(dV/d\theta)\,\delta\theta$. A condição $\delta U = 0$ requerida pelo princípio do trabalho virtual para o equilíbrio do sistema pode então ser substituída pela condição:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad (10.21)$$

Quando todas as forças envolvidas são conservativas, pode ser preferível usar a Eq. (10.21) em vez de aplicar o princípio dos trabalhos virtuais diretamente [Seção 10.8; Problema Resolvido 10.4].

Estabilidade do equilíbrio

Essa abordagem apresenta uma outra vantagem, pois é possível determinar, a partir do sinal da segunda derivada de *V*, se o equilíbrio do sistema é *estável, instável* ou *neutro* [Seção 10.9]. Se $d^2V/d\theta^2 > 0$, *V* é *mínimo* e o equilíbrio é *estável;* se $d^2V/d\theta^2 < 0$, *V* é *máximo* e o equilíbrio é *instável;* se $d^2V/d\theta^2 = 0$, é preciso examinar derivadas de ordem mais alta.

PROBLEMAS DE REVISÃO

10.101 Determine a força vertical **P** que deve ser aplicado em *G* para manter o equilíbrio do sistema articulado.

10.102 Determine o binário **M** que deve ser aplicado no membro *DEFG* para manter o equilíbrio do sistema articulado.

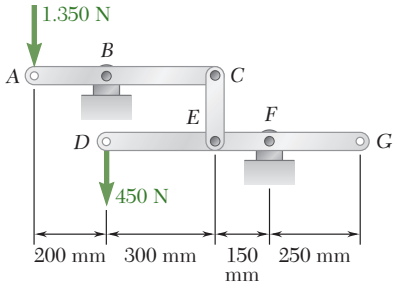


Figura P10.101 e 10.102

10.103 Deduza uma expressão para a intensidade do binário **M** necessário para manter o equilíbrio do sistema articulado mostrado na figura.

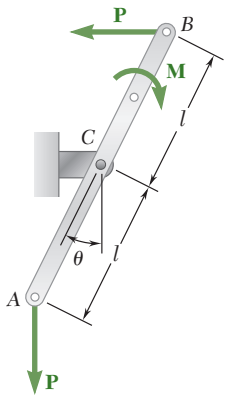


Figura *P10.103*

10.104 Os colares *A* e *B* são conectados por um arame *AB* e podem deslizar livremente nas barras sem atrito como mostra a figura. Sabendo que o comprimento do arame é 440 mm e que o peso *W* do colar *A* é 90 N, determine a intensidade da força **P** necessária para manter o equilíbrio do sistema quando (*a*) $c = 80$ mm, (*b*) $c = 280$ mm.

10.105 O colar *B* pode deslizar ao longo da barra *AC* e é fixado por um pino a um bloco que pode deslizar na fenda vertical como mostrado na figura. Deduza uma expressão da intensidade do binário **M** necessário para manter o equilíbrio.

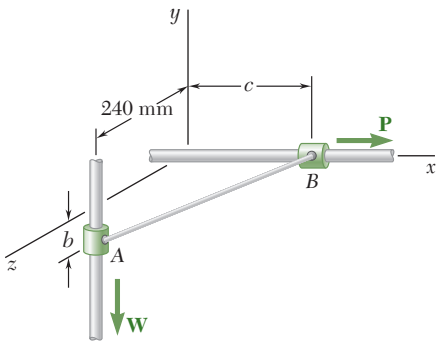


Figura P10.104

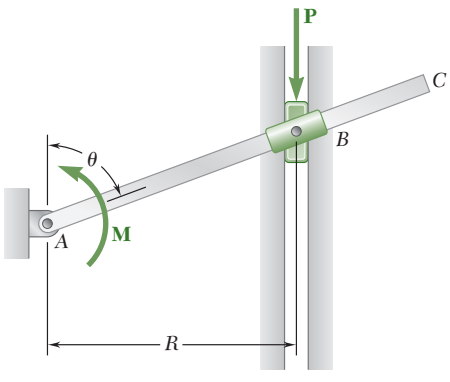


Figura *P10.105*

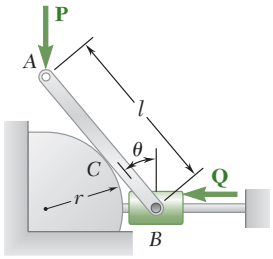


Figura P10.106

10.106 Uma haste delgada de comprimento l é presa a um colar em B e repousa sobre uma parte de um cilindro circular de raio r. Desprezando o efeito do atrito, determine o valor de θ correspondente à posição de equilíbrio do mecanismo quando $l = 200$ mm, $r = 60$ mm, $P = 40$ N e $Q = 80$ N.

10.107 Uma força horizontal **P** de intensidade de 180 N é aplicada ao mecanismo em C. A constante da mola é $k = 1{,}6$ kN/m e a mola está indeformada quando $\theta = 0$. Desprezando o peso do mecanismo, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio.

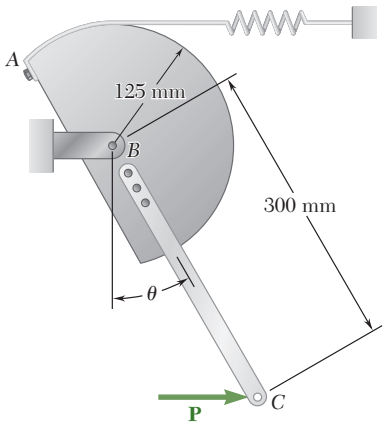


Figura P10.107

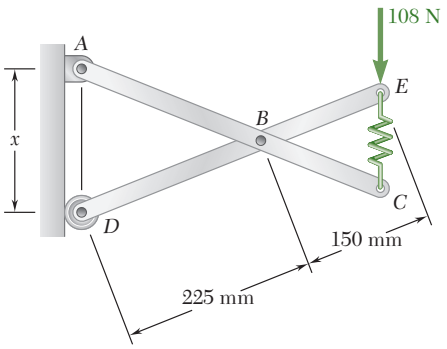


Figura P10.108

10.108 Duas barras idênticas ABC e DBE são conectadas por um pino em B e por uma mola CE. Sabendo que a mola tem comprimento de 100 mm quando indeformada e que a constante da mola é 1,4 kN/m, determine a distância x correspondente ao equilíbrio quando a carga de 108 N é aplicada em E como mostra a figura.

10.109 Resolva o Problema 10.108 considerando que a carga de 108 N é aplicada em C ao invés de E.

10.110 Duas barras uniformes idênticas, cada qual de massa m e comprimento l, estão unidas a engrenagens, tal como mostra a figura. Para o intervalo $0 \leq \theta \leq 180°$, determine as posições de equilíbrio do sistema e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

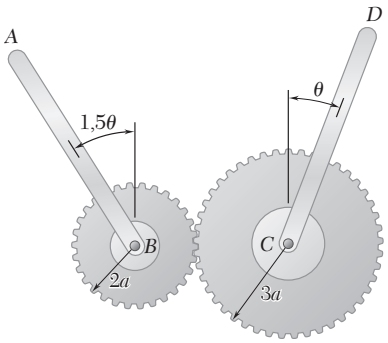


Figura P10.110

10.111 Uma semiesfera homogênea de raio r é posicionada em uma inclinação como mostra a figura. Considerando que o atrito é suficiente para evitar o escorregamento entre a semiesfera e a inclinação, determine o ângulo θ correspondente ao equilíbrio quando $\beta = 10^{\circ}$.

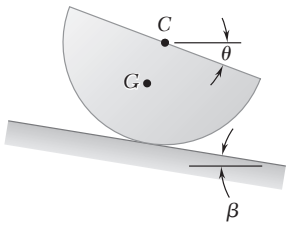


Figura *P10.111* e P10.112

10.112 Uma semiesfera homogênea de raio r é posicionada em uma inclinação como mostra a figura. Considerando que o atrito é suficiente para evitar o escorregamento entre a semiesfera e a inclinação, determine (*a*) o maior ângulo β para que haja uma posição de equilíbrio, (*b*) o ângulo θ correspondente ao equilíbrio quando β é igual à metade do valor encontrado no item *a*.

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

10.C1 Um binário **M** é aplicado à manivela *AB* para se manter o equilíbrio do sistema de motor mostrado na figura quando uma força **P** é aplicada ao pistão. (*a*) Sabendo que $b = 60$ mm e $l = 188$ mm, use um aplicativo computacional para calcular o quociente M/P para valores de θ entre 0 e 180°, com encrementos de 10°. Usando o menor incremento apropriado, determine o valor de θ para o qual o quociente M/P é máximo e do valor correspondente de M/P.

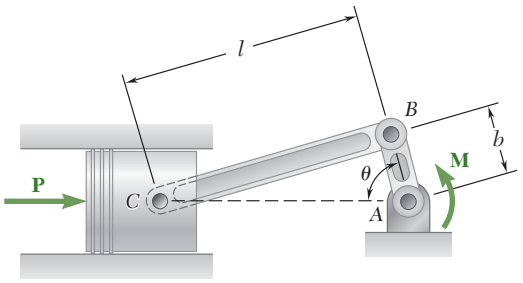


Figura P10.C1

10.C2 Sabendo que $a = 500$ mm, $b = 150$ mm, $L = 500$ mm e $P = 100$ N, use um aplicativo computacional para calcular a força no elemento *BD* para valores de θ entre 30° e 150°, com incrementos de 10°. Usando o menor incremento apropriado, determine o intervalo de valores de θ para os quais o valor absoluto da força no elemento *BD* é menor que 400 N.

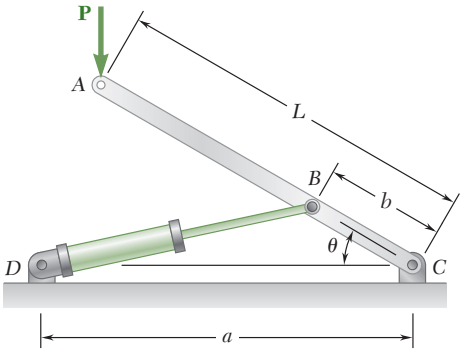


Figura P10.C2

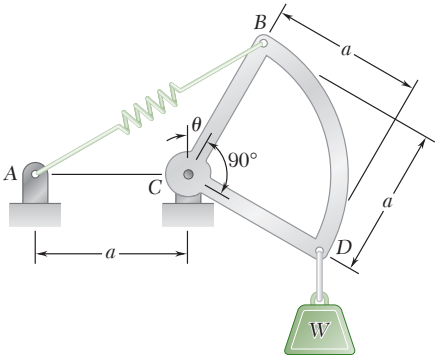


Figura P10.C4

10.C3 Resolva o Problema 10.C2 considerando que a força **P** é aplicada em *A* e horizontalmente dirigida para a direita.

10.C4 A constante da mola *AB* é *k*, e a mola está indeformada quando $\theta = 0$. (*a*) Desprezando o peso do elemento *BCD* e usando um aplicativo computacional, calcule a energia potencial do sistema e sua derivada $dV/d\theta$. (*b*) Para $W = 675$ N, $a = 250$ mm e $k = 13{,}5$ kN/m, calcule e plote o gráfico da energia potencial *versus* θ para valores de θ entre 0 e 165°, com incrementos de 15°. (*c*) Usando o menor incremernto apropriado, determine os valores de θ para os quais o sistema está em equilíbrio e especifique em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

10.C5 Duas barras *AC* e *DE*, cada qual com comprimento *L*, são unidas por um colar que é fixada a barra *AC* no ponto médio *B*. (*a*) Usando um aplicativo computacional calcule a energia potencial *V* do sistema e sua derivada $dV/d\theta$. (*b*) Para $W = 75$ N, $P = 200$ N e $L = 500$ mm, calcule *V* e $dV/d\theta$ para valores de θ entre 0 e 70°, com incrementos de 5°. (*c*) Usando o menor incremento apropriado, determine os valores de θ para os quais o sistema está em equilíbrio e especifique em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

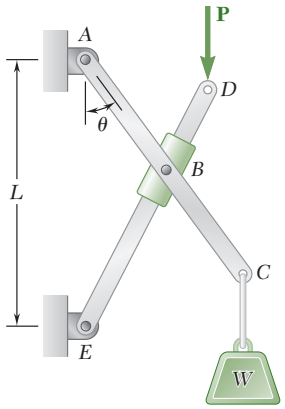


Figura P10.C5

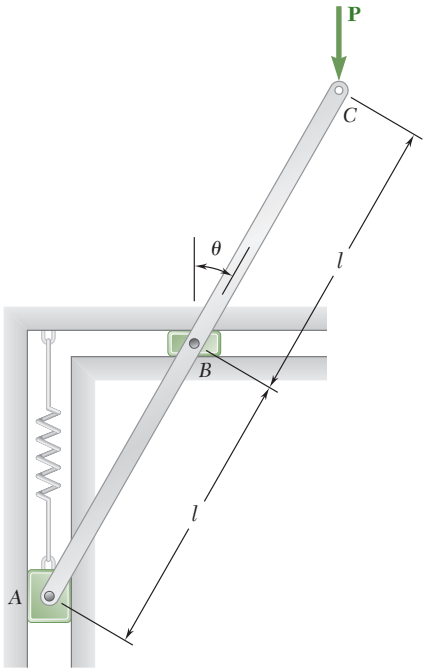


Figura P10.C6

10.C6 Uma barra delgada *ABC* é unida aos blocos *A* e *B* que podem se mover sem atrito nas guias mostradas na figura. A constante da mola é igual a *k*, e a mola está indeformada quando a barra está na vertical. (*a*) Desprezando o peso da barra e dos blocos, desenvolva um aplicativo computacional para calcular a energia potencial *V* do sistema e sua derivada $dV/d\theta$. (*b*) Para $P = 150$ N, $l = 200$ mm e $k = 3$ kN/m calcule e plote o gráfico da energia potencial *versus* θ para valores de θ entre 0 e 75°, com incrementos de 5°. (*c*) Usando o menor incremento apropriado, determine quaisquer posições de equilíbrio no intervalo $0 \leq \theta \leq 75°$ e em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

10.C7 Resolva o Problema 10.C6 considerando que a força **P** aplicada em *C* e horizontalmente dirigida para a direita.

APÊNDICE

Exame de fundamentos de engenharia

Nos Estados Unidos, exige-se que os engenheiros obtenham uma licença quando seu trabalho afeta diretamente a saúde pública, a segurança e o bem-estar. O objetivo é assegurar que eles possuam qualificações mínimas envolvendo competência, habilidade, experiência e caráter. O processo de licenciamento abrange um exame inicial, chamado de *Exame de fundamentos de engenharia*, experiência profissional e um segundo exame denominado *Princípios e prática de engenharia*. Aqueles que completam com sucesso essas etapas obtêm a licença de engenheiro profissional. Os exames são preparados e aplicados pelo *Conselho nacional de examinadores para engenharia e inspeção*.

O primeiro exame pode ser feito um pouco antes ou logo após a graduação em um curso de engenharia de quatro anos. Esse exame enfatiza os temas do programa de um curso de graduação, inclusive estática. Os tópicos incluídos abrangem muitos dos assuntos abordados neste livro. A seguir, apresentamos uma lista dos principais conteúdos da prova com referências às respectivas seções e problemas deste livro.

Sistema de forças concorrentes (2.2–2.9; 2.12–2.14)
Problemas: 2.33, 2.35, 2.36, 2.37, 2.73, 2.83, 2.92, 2.93, 2.97

Forças vetoriais (3.4–3.11)
Problemas: 3.16, 3.18, 3.25, 3.31, 3.38, 3.40

Equilíbrio em duas dimensões (2.11; 4.1–4.7)
Problemas: 4.5, 4.13, 4.14, 4.17, 4.29, 4.38, 4.66, 4.75

Equilíbrio em três dimensões (2.15; 4.8–4.9)
Problemas: 4.101, 4.104, 4.103, 4.106, 4.115, 4.117, 4.127, 4.132, 4.140

Centroide de uma superfície (5.2–5.7)
Problemas: 5.6, 5.18, 5.29, 5.35, 5.40, 5.56, 5.58, 5.99, 5.103, 5.104, 5.125

Análise de treliças (6.2–6.7)
Problemas: 6.3, 6.4, 6.33, 6.43, 6.44, 6.56

Equilíbrio de estruturas bidimensionais (6.9–6.11)
Problemas: 6.76, 6.80, 6.87, 6.91, 6.92

Esforço cortante e momento fletor (7.3–7.6)
Problemas: 7.22, 7.25, 7.31, 7.36, 7.45, 7.49, 7.70, 7.83

Atrito (8.2–8.5; 8.10)
Problemas: 8.11, 8.15, 8.21, 8.30, 8.50, 8.53, 8.101, 8.104, 8.105

Momentos de inércia (9.2–9.10)
Problemas: 9.5, 9.31, 9.32, 9.33, 9.77, 9.78, 9.84, 9.89, 9.101, 9.103

CRÉDITOS DAS FOTOS

CAPÍTULO 1

Abertura: Sr. Isaac Newton, Cortesia de Jeremy Whitaker; **Foto 1.1:** © PhotoLink/Getty Images RF.

CAPÍTULO 2

Abertura: © Tom Paiva/Getty Images; **Foto 2.1:** © H. David Seawell/CORBIS; **Foto 2.2:** © WIN-Initiative/Getty Images.

CAPÍTULO 3

Abertura: © Daniel Sheehan; **Foto 3.1:** © McGraw-Hill/Foto de Lucinda Dowell; **Foto 3.2:** © Steve Hix/Getty Images; **Foto 3.3:** © Jose Luis Pelaez/Getty Images; **Foto 3.4:** © Images-USA/Alamy; **Foto 3.5:** © Dana White/Photo Edit.

CAPÍTULO 4

Abertura: © Alfredo Maiquez/Getty Images; **Foto 4.1, Foto 4.2, Foto 4.3:** © McGraw-Hill/Foto de Lucinda Dowell; **Foto 4.4, Foto 4.5:** Cortesia de National Information Service for Earthquake Engineering da Universidade da Califórnia, Berkeley; **Foto 4.6:** © McGraw-Hill/Foto de Lucinda Dowell; **Foto 4.7:** Cortesia de SKF Limited.

CAPÍTULO 5

Abertura: © Christopher Morris/CORBIS; **Foto 5.1:** © Christies Images/SuperStock; **Foto 5.2:** Value RF/© Kevin Burke/CORBIS; **Foto 5.3:** © Ghislain & Marie David de Lossy/Getty Images; **Foto 5.4:** NASA.

CAPÍTULO 6

Abertura: © Alan Schein Photography/CORBIS; **Foto 6.1:** Cortesia de National Information Service for Earthquake Engineering da Universidade da Califórnia, Berkeley; **Foto 6.2:** Ferdinand Beer; **Foto 6.3:** © McGraw-Hill/Foto de Sabina Dowell; **Foto 6.4:** © EyeWire Collection/Getty Images RF; **Foto 6.5:** Cortesia de Luxo Lamp Corporation.

CAPÍTULO 7

Abertura: © Getty Images RF; **Foto 7.1:** © McGraw-Hill/Foto de Sabina Dowell; **Foto 7.2:** © Alan Thornton/Getty Images; **Foto 7.3:** © Michael S. Yamashita/CORBIS; **Foto 7.4:** © Steve Kahn/Getty Images.

CAPÍTULO 8

Abertura: © Bicot (Marc Caya); **Foto 8.1:** © Chuck Savage/CORBIS; **Foto 8.2:** © Ted Spiegel/CORBIS; **Foto 8.3:** © Adam Woolfitt/CORBIS.

CAPÍTULO 9

Abertura: © Lester Lefkowitz/Getty Images; **Foto 9.1:** © Ed Eckstein/CORBIS; **Foto 9.2:** Cortesia de Caterpillar Engine Division.

CAPÍTULO 10

Abertura: © Tom Brakefield/SuperStock; **Foto 10.1:** Cortesia de Altec Industries; **Foto 10.2:** Cortesia de De-Sta-Co.

RESPOSTAS

As respostas para os problemas com o número sem itálico são dadas a seguir (as faltantes estarão disponíveis no site). As respostas dos problemas em itálico não são listadas.

CAPÍTULO 2

2.1 179 N ◹ 75,1°.
2.7 (*a*) 37,1°. (*b*) 73,2 N.
2.8 (*a*) 44,7 N. (*b*) 107,1 N.
2.9 (*a*) 3.660 N. (*b*) 3.730 N.
2.10 2.600 N ◹ 53,5°.
2.13 (*a*) 21,1 N↓. (*b*) 45,3 N.
2.17 3,30 kN ◹ 66,6°.
2.19 21,8 kN ◹ 86,6°.
2.21 (800 N) 640 N, 480 N; (424 N) −224 N, −360 N; (408 N) 192,0 N, −360 N.
2.26 (*a*) 2.190 N. (*b*) 2.060 N.
2.27 (*a*) 194,9 N. (*b*) 153,6 N.
2.32 251 N ◺ 85,3°.
2.34 654 N ◹ 21,5°.
2.35 309 N ◸ 86,6°.
2.36 226 N ◸ 62,3°.
2.39 (*a*) 21,7°. (*b*) 229 N.
2.40 (*a*) 580 N. (*b*) 300 N.
2.43 (*a*) 2,13 kN. (*b*) 1,735 kN.
2.45 (*a*) 305 N. (*b*) 514 N.
2.51 $F_C = 6{,}40$ kN; $F_D = 4{,}80$ kN.
2.52 $F_B = 15{,}00$ kN; $F_C = 8{,}00$ kN.
2.55 (*a*) 1.213 N. (*b*) 166,3 N.
2.56 (*a*) 863 N. (*b*) 1.216 N.
2.57 (*a*) 784 N. (*b*) 71,0°.
2.60 5,80 m.
2.61 (*a*) 1.081 N. (*b*) 82,5°.
2.62 (*a*) 1.294 N. (*b*) 62,5°.
2.65 (*a*) 602 N ◺ 46,8°. (*b*) 1.365 N ◸ 46,8°.
2.69 (*a*) 1.293 N. (*b*) 2.220 N.
2.71 (*a*) +390 N, +614 N, +181,8 N. (*b*) 58,7°, 35,0°, 76,0°.
2.72 (*a*) −130,1 N, +816 N, +357 N. (*b*) 98,3°, 25,0°, 66,6°.
2.73 (*a*) 288 N. (*b*) 67,5°, 30,0°, 108,7°.
2.74 (*a*) 100,0 N. (*b*) 112,5°, 30,0°, 108,7°.
2.79 $F = 570$ N; $\theta_x = 55{,}8°$, $\theta_y = 45{,}4°$, $\theta_z = 116{,}0°$.
2.84 (*a*) $F_x = 194{,}0$ N, $F_z = 108{,}0$ N. (*b*) $\theta_y = 105{,}1°$, $\theta_z = 62{,}0°$.
2.87 +240 N, −255 N, +160,0 N.
2.89 −1.125 N, +750 N, +450 N.
2.91 515 N; $\theta_x = 70{,}2°$, $\theta_y = 27{,}6°$, $\theta_z = 71{,}5°$.
2.92 515 N; $\theta_x = 79{,}8°$, $\theta_y = 33{,}4°$, $\theta_z = 58{,}6°$.
2.95 748 N; $\theta_x = 120{,}1°$, $\theta_y = 52{,}5°$, $\theta_z = 128{,}0°$.
2.96 3.120 N; $\theta_x = 37{,}4°$, $\theta_y = 122{,}0°$, $\theta_z = 72{,}6°$.
2.99 1.031 N↑.
2.101 926 N↑.
2.107 960 N.
2.108 $0 \le Q < 300$ N.
2.111 845 N.
2.112 768 N.
2.115 $T_{AB} = 510$ N; $T_{AC} = 56{,}2$ N; $T_{AD} = 536$ N.
2.116 $T_{AB} = 1.340$ N; $T_{AC} = 1.025$ N; $T_{AD} = 915$ N.
2.117 $T_{AB} = 1.431$ N; $T_{AC} = 1.560$ N; $T_{AD} = 183{,}0$ N.
2.118 $T_{AB} = 1.249$ N; $T_{AC} = 490$ N; $T_{AD} = 1.647$ N.
2.121 $P = 131{,}2$ N; $Q = 29{,}6$ N.
2.123 378 N.
2.131 (*a*) 312 N. (*b*) 144 N.
2.135 15,13 kN; $\theta_x = 133{,}4°$, $\theta_y = 43{,}6°$, $\theta_z = 86{,}6°$.
2.136 $T_{AB} = 500$ N; $T_{AC} = 459$ N; $T_{AD} = 516$ N.
2.137 (*a*) 1.155 N. (*b*) 1.012 N.
2.C3 (*a*) 1,001 m. (*b*) 4,01 kN. (*c*) 1,426 kN; 1,194 kN.

CAPÍTULO 3

3.1 1,277 N · m ↰.
3.2 1,277 N · m ↰.
3.3 (*a*) 41,7 N · m ↰. (*b*) 147,4 N ◿ 45,0°.
3.4 (*a*) 41,7 N · m ↰. (*b*) 176,8 N ◿ 58,0°.
3.9 (*a*) 760 N · m ↰. (*b*) 760 N · m ↰.
3.10 1.224 N.
3.16 2,21 m.
3.17 (*a*) 41,0. (*b*) 26,9.
3.19 (*a*) $-11\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$. (*b*) 0. (*c*) $-45\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$.
3.21 (7,50 N · m)**i** − (6,00 N · m)**j** − (10,39 N · m)**k**.
3.22 (3.080 N · m)**i** − (2.070 N · m)**k**.
3.27 4,58 m.
3.28 3,70 m.
3.31 1,564 m.
3.32 3,29 m.
3.35 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 1$; $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = -11$; $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = 10$.
3.37 27,4°.
3.39 43,6°.
3.40 38,9°.
3.41 (*a*) 59,0°. (*b*) 648 N.
3.45 (*a*) 67. (*b*) 111.
3.46 7.
3.47 $M_x = -31{,}2$ N · m; $M_y = 13{,}20$ N · m; $M_z = -2{,}42$ N · m.
3.48 $M_x = -25{,}6$ N · m; $M_y = 10{,}80$ N · m; $M_z = 40{,}6$ N · m.
3.49 1.252 m.
3.50 1.256 m.
3.55 −90,0 N · m.
3.56 −111,0 N · m.
3.57 2,28 N · m.
3.58 −9,50 N · m.
3.59 $aP/\sqrt{2}$.
3.65 0.249 m.
3.66 0.1198 m.
3.70 (*a*) 12,39 N · m ↲. (*b*) 12,39 N · m ↲. (*c*) 12,39 N · m ↲.
3.72 (*a*) 75,0 N. (*b*) 71,2 N. (*c*) 45,0 N.
3.76 $M = 9{,}21$ N · m; $\theta_x = 77{,}9°$, $\theta_y = 12{,}05°$, $\theta_z = 90{,}0°$.

3.79 $M = 10{,}92$ N · m; $\theta_x = 97{,}8°$, $\theta_y = 34{,}5°$, $\theta_z = 56{,}7°$.
3.80 $M = 2.860$ N · m; $\theta_x = 113{,}0°$, $\theta_y = 92{,}7°$, $\theta_z = 23{,}2°$.
3.83 (*a*) $\mathbf{F}_B = 80{,}0$ N ←; $\mathbf{M}_B = 4{,}00$ N · m ↰. (*b*) $\mathbf{F}_C = 100{,}0$ N ↓; $\mathbf{F}_D = 100{,}0$ N ↑.
3.85 (*a*) $\mathbf{F}_B = 250$ N ◹ 60,0°; $\mathbf{M}_B = 75{,}0$ N · m ⤸. (*b*) $\mathbf{F}_A = 375$ N ◺ 60,0°; $\mathbf{F}_B = 625$ N ◹ 60,0°.
3.87 (*a*) $\mathbf{F} = -(600\text{ N})\mathbf{k}$; $d = 90{,}0$ mm abaixo de *ED*. (*b*) $\mathbf{F} = -(600\text{ N})\mathbf{k}$; $d = 90{,}0$ mm acima de *ED*.
3.88 $\mathbf{F} = 900$ N↓; $x = 50{,}0$ mm.
3.93 $\mathbf{F} = -(1.220\text{ N})\mathbf{i}$; $\mathbf{M} = (73{,}2\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (122{,}0\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.94 $\mathbf{F}_C = (5{,}00\text{ N})\mathbf{i} + (150{,}0\text{ N})\mathbf{j} - (90{,}0\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_C = (77{,}4\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (61{,}5\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (106{,}8\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.97 $\mathbf{F} = -(122{,}9\text{ N})\mathbf{j} - (86{,}0\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M} = (22{,}6\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (15{,}49\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (22{,}1\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.98 (*a*) 135,0 mm. (*b*) $\mathbf{F}_2 = (42{,}0\text{ N})\mathbf{i} + (42{,}0\text{ N})\mathbf{j} - (49{,}0\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_2 = -(25{,}9\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (21{,}2\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$.
3.101 (*a*) *Carregamento a*: $\mathbf{R} = 600$ N↓; $\mathbf{M} = 1.000$ N · m ↰.
Carregamento b: $\mathbf{R} = 600$ N↓; $\mathbf{M} = 900$ N · m ⤸.
Carregamento c: $\mathbf{R} = 600$ N↓; $\mathbf{M} = 900$ N · m ↰.
Carregamento d: $\mathbf{R} = 400$ N↑; $\mathbf{M} = 900$ N · m ↰.
Carregamento e: $\mathbf{R} = 600$ N↓; $\mathbf{M} = 200$ N · m ⤸.
Carregamento f: $\mathbf{R} = 600$ N↓; $\mathbf{M} = 800$ N · m ↰.
Carregamento g: $\mathbf{R} = 1.000$ N↓; $\mathbf{M} = 1.000$ N · m ↰.
Carregamento h: $\mathbf{R} = 600$ N↓; M = 900 N · m l ↰.
(*b*) Carregamentos *c* e *h*.
3.102 Carregamento *f*.
3.111 (*a*) 1.562 N ◺ 50,2°. (*b*) 250 mm para a direita de *C* e 300 mm acima de *C*.
3.112 (*a*) 1.308 N ◿ 66,6°. (*b*) 412 mm para a direita de *A* e 250 mm para a direita de *C*.
3.115 (*a*) 0,365 m acima de *G*. (*b*) 0,227 m para a direita de *G*.
3.116 (*a*) 0,299 m acima de *G*. (*b*) 0,259 m para a direita de *G*.
3.118 (*a*) $\mathbf{R} = F \measuredangle \text{tg}^{-1}(a^2/2bx)$; $\mathbf{M} = 2Fb^2(x - x^3/a^2)/\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}$ ↰. (*b*) 0,369 m.
3.119 $\mathbf{R} = -(420\text{ N})\mathbf{i} - (50{,}0\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M} = (30{,}8\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (220\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.120 $\mathbf{R} = -(420\text{ N})\mathbf{j} - (339\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M} = (1{,}125\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (163{,}9\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (109{,}9\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.124 (*a*) $\mathbf{R} = -(28{,}4\text{ N})\mathbf{j} - (50{,}0\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M} = (8{,}56\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (24{,}0\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (2{,}13\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. (*b*) Sentido anti-horário.
3.125 (*a*) $\mathbf{R} = -(28{,}4\text{ N})\mathbf{j} - (50{,}0\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M} = (42{,}4\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (24{,}0\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (2{,}13\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. (*b*) Sentido anti-horário.
3.127 1.035 N; 2,57 m a partir de *OG* e 3,05 m a partir de *OE*.
3.128 2,32 m a partir de *OG* e 1,165 m a partir de *OE*.
3.133 (*a*) $P\sqrt{3}$; $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 54{,}7°$. (*b*) $-a$. (*c*) Eixo do torsor é diagonal a *OA*.
3.134 (*a*) *P*; $\theta_x = 90{,}0°$, $\theta_y = 90{,}0°$, $\theta_z = 0$. (*b*) $5a/2$. (*c*) Eixo do torsor é paralelo ao eixo *z* em $x = a$, $y = -a$.
3.137 (*a*) $-(84{,}0\text{ N})\mathbf{j} - (80{,}0\text{ N})\mathbf{k}$. (*b*) 0,477 m. (*c*) $x = 0{,}526$ m, $z = -0{,}1857$ m.
3.140 (*a*) $3P(2\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - \mathbf{k})/25$. (*b*) $-0{,}0988a$. (*c*) $x = 2{,}00a$, $z = -1{,}990a$.
3.141 $\mathbf{R} = (20{,}0\text{ N})\mathbf{i} + (30{,}0\text{ N})\mathbf{j} - (10{,}00\text{ N})\mathbf{k}$; $y = -0{,}540$ m, $z = -0{,}420$ m.
3.143 $\mathbf{F}_A = (M/b)\mathbf{i} + R[1 + (a/b)]\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_B = -(M/b)\mathbf{i} - (aR/b)\mathbf{k}$.
3.147 (*a*) 196,2 N · m ⤸. (*b*) 199,0 N ◺ 59,5°.
3.148 42,0 N · m ↰.
3.155 $\mathbf{F} = -(28{,}5\text{ N})\mathbf{j} + (106{,}3\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M} = (12{,}35\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (19{,}16\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (5{,}13\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.157 (*a*) $\mathbf{F}_B = -(80{,}0\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_C = -(30{,}0\text{ N})\mathbf{i} + (40{,}0\text{ N})\mathbf{k}$. (*b*) $R_y = 0$; $R_z = -40{,}0$ N. (*c*) Quando a fenda é vertical.
3.C3 *4 lados*: $\beta = 10°$, $\alpha = 44{,}1°$; $\beta = 20°$, $\alpha = 41{,}6°$; $\beta = 30°$, $\alpha = 37{,}8°$.
3.C4 $\theta = 0$ *rev*: $M = 97{,}0$ N · m; $\theta = 6$ *rev*: $M = 63{,}3$ N · m; $\theta = 12$ *rev*: $M = 9{,}17$ N · m.

CAPÍTULO 4

4.2 42,0 N ↑
4.3 0,264 m
4.5 (*a*) 6,07 kN ↑. (*b*) 4,23 kN ↑.
4.6 (*a*) 4,89 kN ↑. (*b*) 3,69 kN ↑.
4.9 150,0 mm ≤ *d* ≤ 400 mm.
4.12 3,50 kN ≤ *P* ≤ 86,0 kN.
4.15 (*a*) $F_{DE} = 600$ N. (*b*) $\mathbf{C} = 1.253$ N ◿ 69,8°.
4.19 (*a*) 2,00 kN. (*b*) 2,32 kN ◿ 46.4°.
4.21 (*a*) $\mathbf{A} = 150{,}0$ N ◿ 30,0°; $\mathbf{B} = 150{,}0$ N ◺ 30,0°. (*b*) $\mathbf{A} = 433$ N ◹ 12,55°; $\mathbf{B} = 488$ ◺ 30,0°.
4.26 (*a*) 190,9 N. (*b*) 142,3 N ◿ 18,43°.
4.27 (*a*) 324 N. (*b*) 270 N →.
4.28 (*a*) 400 N. (*b*) $\mathbf{C} = 458$ N ◿ 49,1°.
4.30 $T = 80{,}0$ N; $\mathbf{C} = 89{,}4$ N ◿ 26,6°.
4.33 $T = 2P/3$; $\mathbf{C} = 0{,}577P$ →.
4.34 $T = 0{,}586P$; $\mathbf{C} = 0{,}414P$ →.
4.37 (*a*) 1.432 N. (*b*) 1.100 N↑. (*c*) 1.400 N ←.
4.38 $T_{BE} = 3.230$ N; $T_{CF} = 960$ N; $\mathbf{D} = 3.750$ N ←.
4.41 $T = 80{,}0$ N; $\mathbf{A} = 160{,}0$ N ◹ 30,0°; $\mathbf{C} = 160{,}0$ N ◺ 30,0°.
4.42 $T = 69{,}3$ N; $\mathbf{A} = 140{,}0$ N ◹ 30,0°; $\mathbf{C} = 180{,}0$ N ◺ 30,0°.
4.43 (*a*) $\mathbf{A} = 78{,}5$ N; $\mathbf{M}_A = 125{,}6$ N · m ↰. (*b*) $\mathbf{A} = 111{,}0$ N ◿ 45,0°; $\mathbf{M}_A = 125{,}6$ N · m ↰. (*c*) $\mathbf{A} = 157{,}0$ N↑; $\mathbf{M}_A = 251$ N · m ↰.
4.46 $\mathbf{A} = 1.848$ N ◿ 82,6°; $\mathbf{M}_A = 1.431$ N · m ⤸.
4.49 $\mathbf{C} = 1.951$ N ◺ 88,5°; $\mathbf{M}_C = 75{,}0$ N · m ⤸.
4.50 1,232 kN ≤ *T* ≤ 1,774 kN.
4.51 (*a*) $\theta = 2\,\text{sen}^{-1}(W/2P)$. (*b*) $\theta = 29{,}0°$.
4.52 (*a*) $T = \frac{1}{2}W/(1 - \text{tg}\,\theta)$. (*b*) $\theta = 39{,}8°$.
4.53 (*a*) $\text{sen}\,\theta + \cos\theta = M/Pl$. (*b*) 17,11° e 72,9°.
4.54 (*a*) $\cos^3\theta = a(P + Q)/Pl$. (*b*) 40,6°.
4.57 141,1°.
4.58 (*a*) $(1 - \cos\theta)\,\text{tg}\,\theta = W/2kl$. (*b*) 49,7°.

4.59 (1) completamente vinculada; determinada; $\mathbf{A} = \mathbf{C} = 196{,}2$ N↑.
(2) completamente vinculada; determinada; $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 196{,}2$ N↑.
(3) completamente vinculada; indeterminada; $\mathbf{A}_x = 294$ N →; $\mathbf{D}_x = 294$ N ←.
(4) impropriamente vinculada; indeterminada; não está em equilíbrio.
(5) parcialmente vinculada; determinada; em equilíbrio; $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 196{,}2$ N ↑.
(6) completamente vinculada; determinada; $\mathbf{B} = 294$ N →, $\mathbf{D} = 491$ N ◺ 53,1°.
(7) parcialmente vinculada; não está em equilíbrio.
(8) completamente vinculada; indeterminada; $\mathbf{B} = 196{,}2$ N ↑, $\mathbf{D}_y = 196{,}2$ N ↑.

4.61 $\mathbf{A} = 400$ N ↑; $\mathbf{B} = 500$ N ◹ 53,1°.

4.62 $a \geq 138{,}6$ mm.

4.66 $\mathbf{B} = 888$ ◹ 41,3°; $\mathbf{D} = 943$ N ◺ 45,0°.

4.67 $\mathbf{B} = 1.001$ N ◺ 48,2°; $\mathbf{D} = 943$ N ◹ 45,0°.

4.69 (*a*) 499 N. (*b*) 457 N ◺ 26,6°.

4.70 (*a*) 998 N. (*b*) 822 N ◸ 5,72°.

4.77 $\mathbf{A} = 170{,}0$ N ◺ 33,9°; $\mathbf{C} = 160{,}0$ N ◿ 28,1°.

4.80 (*a*) $F_{AD} = 400$ N. (*b*) $\mathbf{C} = 458$ N ◿ 49,1°.

4.81 (*a*) $2\,P$ ◺ 60,0°. (*b*) $1{,}239\,P$ ◹ 36,2°.

4.82 (*a*) $1{,}155\,P$ ◺ 30,0°. (*b*) $1{,}086\,P$ ◹ 22,9°.

4.83 60,0 mm.

4.84 $\text{tg}\,\theta = 2\,\text{tg}\,\beta$.

4.85 (*a*) 49,1°. (*b*) $\mathbf{A} = 45{,}3$ N ←; $\mathbf{B} = 90{,}6$ N ◿ 60,0°.

4.88 32,5°.

4.92 $\mathbf{A} = (56{,}0\text{ N})\mathbf{j} + (18{,}00\text{ N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{D} = (24{,}0\text{ N})\mathbf{j} + (42{,}0\text{ N})\mathbf{k}$.

4.93 $\mathbf{A} = (56{,}0\text{ N})\mathbf{j} + (14{,}40\text{ N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{D} = (24{,}0\text{ N})\mathbf{j} + (33{,}6\text{ N})\mathbf{k}$.

4.97 (*a*) 121,9 N. (*b*) −46,2 N. (*c*) 100,9 N.

4.98 (*a*) 95,6 N. (*b*) −7,36 N. (*c*) 88,3 N.

4.101 $T_A = 23{,}5$ N; $T_C = 11{,}77$ N; $T_D = 105{,}9$ N.

4.102 (*a*) 0,480 m. (*b*) $T_A = 23{,}5$ N; $T_C = 0$; $T_D = 117{,}7$ N.

4.106 $T_{AD} = 2{,}60$ kN; $T_{AE} = 2{,}80$ kN;
$\mathbf{C} = (1{,}800\text{ kN})\mathbf{j} + (4{,}80\text{ kN})\mathbf{k}$.

4.107 $T_{AD} = 5{,}20$ kN; $T_{AE} = 5{,}60$ kN; $\mathbf{C} = (9{,}60\text{ kN})\mathbf{k}$.

4.109 (*a*) $T_{CD} = T_{CE} = 3{,}96$ kN.
(*b*) $\mathbf{A} = (6{,}67\text{ kN})\mathbf{i} + (1{,}667\text{ kN})\mathbf{j}$.

4.110 (*a*) $T_{CD} = 0{,}954$ kN; $T_{CE} = 5{,}90$ kN.
(*b*) $\mathbf{A} = (5{,}77\text{ kN})\mathbf{i} + (1{,}443\text{ kN})\mathbf{j} - (0{,}833\text{ kN})\mathbf{k}$.

4.113 (*a*) 101,6 N. (*b*) $\mathbf{A} = -(26{,}3\text{ N})\mathbf{i}$; $\mathbf{B} = (98{,}1\text{ N})\mathbf{j}$.

4.114 (*a*) 462 N. (*b*) $\mathbf{C} = -(336\text{ N})\mathbf{j} + (467\text{ N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{D} = (505\text{ N})\mathbf{j} - (66{,}7\text{ N})\mathbf{k}$.

4.119 (*a*) 462 N. (*b*) $\mathbf{C} = (169{,}1\text{ N})\mathbf{j} + (400\text{ N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{M}_C = (20{,}0\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (151{,}5\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$.

4.122 $T_{CF} = 200$ N; $T_{DE} = 450$ N;
$\mathbf{A} = (160{,}0\text{ N})\mathbf{i} + (270\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_A = -(16{,}20\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i}$.

4.125 $T_{BE} = 975$ N; $T_{CF} = 600$ N; $T_{DG} = 625$ N;
$\mathbf{A} = (2.100\text{ N})\mathbf{i} + (175{,}0\text{ N})\mathbf{j} - (375\text{ N})\mathbf{k}$.

4.126 $T_{BE} = 1.950$ N; $T_{CF} = 0$; $T_{DG} = 1.250$ N;
$\mathbf{A} = (3.000\text{ N})\mathbf{i} - (750\text{ N})\mathbf{k}$.

4.129 $\mathbf{B} = (60{,}0\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = (30{,}0\text{ N})\mathbf{j} - (16{,}00\text{ N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{D} = -(30{,}0\text{ N})\mathbf{j} + (4{,}00\text{ N})\mathbf{k}$.

4.130 $\mathbf{B} = (60{,}0\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = -(16{,}00\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (4{,}00\text{ N})\mathbf{k}$.

4.135 373 N.

4.136 301 N.

4.142 (*a*) 37,9 N ↑. (*b*) 373 N ↑.

4.143 (*a*) $\mathbf{A} = 225$ N ↑; $\mathbf{C} = 641$ N ◸ 20,6°.
(*b*) $\mathbf{A} = 365$ N ◿ 60,0°; $\mathbf{B} = 844$ N ◸ 22,0°.

4.145 (*a*) 130,0 N, (*b*) 224 N ◸ 2,05°.

4.150 $T_{BD} = 780$ N; $T_{BE} = 390$ N;
$\mathbf{A} = -(195{,}0\text{ N})\mathbf{i} + (1.170\text{ N})\mathbf{j} + (130{,}0\text{ N})\mathbf{k}$.

4.153 (*a*) $\mathbf{A} = 0{,}745\,P$ ◿ 63,4°; $\mathbf{C} = 0{,}471\,P$ ◺ 45,0°.
(*b*) $\mathbf{A} = 0{,}812\,P$ ◿ 60,0°; $\mathbf{C} = 0{,}503\,P$ ◸ 36,2°.
(*c*) $\mathbf{A} = 0{,}448\,P$ ◺ 60,0°; $\mathbf{C} = 0{,}652\,P$ ◿ 69,9°.
(*d*) impropriamente vinculada; não está em equilíbrio.

4.C2 $x = 600$ mm: $P = 31{,}4$ N; $x = 150$ mm: $P = 37{,}7$ N;
$P_{\text{máx}} = 47{,}2$ N em $x = 283$ mm.

4.C5 $\theta = 30°$: $m = 7{,}09$ kg; $\theta = 60°$: $m = 11{,}02$ kg.
Quando $m = 10$ kg, $\theta = 51{,}0°$.

4.C6 $\theta = 15°$: $T_{BD} = 10{,}30$ kN, $T_{BE} = 21{,}7$ kN;
$\theta = 30°$: $T_{BD} = 5{,}69$ kN, $T_{BE} = 24{,}4$ kN;
$T_{\text{máx}} = 26{,}5$ kN em $\theta = 36{,}9°$.

CAPÍTULO 5

5.1 $\overline{X} = 175{,}6$ mm, $\overline{Y} = 94{,}4$ mm.

5.2 $\overline{X} = 16{,}21$ mm, $\overline{Y} = 31{,}9$ mm.

5.4 $\overline{X} = 5.67$, $\overline{Y} = 5.17$ in.

5.5 $\overline{X} = 7.22$ in., $\overline{Y} = 9.56$ in.

5.6 $\overline{X} = 92{,}0$ mm, $\overline{Y} = 23{,}3$ mm.

5.9 $\overline{X} = -10{,}00$ mm, $\overline{Y} = 87{,}5$ mm.

5.10 $\overline{X} = -9{,}89$ mm, $\overline{Y} = -10{,}67$ mm.

5.12 $\overline{X} = 50{,}5$ mm, $\overline{Y} = 19{,}34$ mm.

5.16 $\overline{Y} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}\right)\left(\dfrac{2\cos\alpha}{\pi - 2\alpha}\right)$

5.17 $\overline{Y} = \dfrac{r_1 + r_2}{\pi - 2\alpha}\cos\alpha$.

5.18 $a/b = 4/5$.

5.20 459 N.

5.24 $\overline{X} = 172{,}5$ mm, $\overline{Y} = 97{,}5$ mm.

5.29 0,739 m.

5.30 $L = 0{,}204$ m ou 0,943 m.

5.32 (*a*) $h = 0{,}513a$. (*b*) $h = 0{,}691a$.

5.34 $\overline{x} = 2/3a$, $\overline{y} = \frac{1}{3}h$.

5.35 $\overline{x} = a/2$, $\overline{y} = 2h/5$.

5.37 $\overline{x} = 2a/3(4 - \pi)$, $\overline{y} = 2b/3(4 - \pi)$

5.39 $\overline{x} = a(3 - 4\,\text{sen}\,\alpha)/6(1 - \alpha)$, $\overline{y} = 0$.

5.40 $\overline{x} = a/4$, $\overline{y} = 3b/10$.

5.41 $\overline{x} = 5a/8$, $\overline{y} = b/3$.

5.42 $\overline{x} = 5L/4$, $\overline{y} = 33a/40$.

5.44 $\overline{x} = a$, $\overline{y} = 17b/35$.

5.45 $2/5a$.

5.46 $-2\sqrt{2}r/3\pi$.

5.48 $\overline{x} = 0{,}236L$, $\overline{y} = 0{,}454a$.

5.49 $\overline{x} = -9{,}27a$, $\overline{y} = 3{,}09a$.

5.52 (*a*) $V = 6{,}19 \cdot 10^6$ mm^3; $A = 458 \cdot 10^3$ mm^2.
(*b*) $V = 16{,}88 \cdot 10^6$ mm^3; $A = 1{,}171 \cdot 10^6$ mm^2.

5.53 (*a*) $V = 308 \cdot 10^3$ mm^3; $A = 38{,}2 \cdot 10^3$ mm^2.
(*b*) $V = 177{,}2 \cdot 10^3$ mm^3; $A = 22{,}4 \cdot 10^3$ mm^2.

5.56 $V = 3.470\ \text{mm}^3$; $A = 2.320\ \text{mm}^2$.
5.59 $V = 31,9$ litros.
5.61 $m = 0,0305$ kg.
5.67 (*a*) $\mathbf{R} = 2.400$ N ↓, 2,33 m para a direita de *A*.
(*b*) $\mathbf{A} = 1.000$ N ↑; $\mathbf{B} = 1.400$ N ↑.
5.68 $\mathbf{A} = 32,0$ kN; $\mathbf{M}_A = 124,0$ kN · m ↰.
5.71 $\mathbf{A} = 480$ N ↑; $\mathbf{B} = 840$ N ↓.
5.73 $\mathbf{A} = 3.000$ N ↑; $\mathbf{M}_A = 12,60$ kN · m ↰.
5.74 (*a*) $a = 0,536$ m. (*b*) $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 761$ N ↑.
5.78 $w_A = 10,00$ kN/m; $w_B = 50,0$ kN/m.
5.80 (*a*) $\mathbf{H} = 254$ kN →; $\mathbf{V} = 831$ kN ↑.
(*b*) $x = 3,25$ m para a direita de *A*.
(*c*) $\mathbf{R} = 268$ kN ⬐ 18,4°.
5.82 $d = 2,64$ m.
5.83 $\mathbf{T} = 67,2$ kN ←; $\mathbf{A} = 141,2$ kN ←.
5.88 $\mathbf{A} = 1.197$ N ⬑ 53,1°; $\mathbf{B} = 1.511$ N ⬑ 53,1°.
5.89 $T = 3.570$ N.
5.93 $d = 0,683$ m
5.94 $h = 0,0711$ m
5.96 (*a*) $b/10$ para a esquerda da base do cone.
(*b*) $0,01136b$ para a direita da base do cone.
5.97 $\overline{Y} = -(2h^2 - 3b^2)/2(4h - 3b)$.
5.98 $\overline{Z} = -a(4h - 2b)/\pi(4h - 3b)$.
5.99 (*a*) $\overline{Y} = -0,402a$. (*b*) $h/a = 2/5$ ou $2/3$.
5.100 $\overline{X} = 46,8$ mm.
5.101 $\overline{Z} = 26,2$ mm.
5.106 $\overline{X} = 0,295$ m, $\overline{Y} = 0,423$ m, $\overline{Z} = 1,703$ m.
5.107 $\overline{X} = 125,0$ mm, $\overline{Y} = 167,0$ mm, $\overline{Z} = 33,5$ mm.
5.110 $\overline{X} = 46,5$ mm, $\overline{Y} = 27,2$ mm, $\overline{Z} = 30,0$ mm
5.112 $\overline{X} = 180,2$ mm, $\overline{Y} = 38,0$ mm, $\overline{Z} = 193,5$ mm.
5.114 $\overline{X} = 0,1452$ m, $\overline{Y} = 0,396$ m, $\overline{Z} = 0,370$ m.
5.115 $\overline{X} = 0,410$ m, $\overline{Y} = 0,510$ m, $\overline{Z} = 0,1500$ m.
5.118 $\overline{X} = 61,6$ mm a partir da extremidade do punho.
5.121 $\overline{Y} = 421$ mm acima do chão.
5.122 $(\overline{x})_1 = 21a/88$; $(\overline{x})_2 = 27a/40$.
5.123 $(\overline{x})_1 = 21h/88$; $(\overline{x})_2 = 27h/40$.
5.124 $(\overline{x})_1 = 2h/9$; $(\overline{x})_2 = 2h/3$.
5.125 $\overline{x} = h/6$; $\overline{y} = \overline{z} = 0$.
5.128 $\overline{x} = 1,297a$, $\overline{y} = \overline{z} = 0$.
5.129 $\overline{x} = \overline{z} = 0$, $\overline{y} = 0,374h$.
5.132 (*a*) $\overline{x} = \overline{z} = 0$, $\overline{y} = -121,9$ mm.
(*b*) $\overline{x} = \overline{z} = 0$, $\overline{y} = -90,2$ mm.
5.134 $\overline{x} = a/2$, $\overline{y} = 8h/25$, $\overline{z} = b/2$.
5.136 $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 5h/16$, $\overline{z} = -b/4$.
5.137 $\overline{X} = 19,27$ mm, $\overline{Y} = 26,6$ mm.
5.140 $\overline{x} = a/2$, $\overline{y} = 3h/5$.
5.141 $\overline{x} = 3a/8$, $\overline{y} = b$.
5.143 $\mathbf{A} = 1.300$ N ↑; $\mathbf{B} = 1.850$ N ↑.
5.146 (*a*) $\overline{x} = 0,548L$. (*b*) $h/L = 2\sqrt{3}$.
5.147 $\overline{X} = 0,1402$ m, $\overline{Y} = 0,0944$ m, $\overline{Z} = 0,0959$ m.
5.148 $\overline{x} = 2,34$ m, $\overline{y} = \overline{z} = 0$.
5.C2 (*a*) $\overline{X} = 0$, $\overline{Y} = 0,278$ m, $\overline{Z} = 0,0878$ m.
(*b*) $\overline{X} = 0,0487$ mm, $\overline{Y} = 0,1265$ mm, $\overline{Z} = 0.0997$ mm.
(*c*) $\overline{X} = -0,0372$ m, $\overline{Y} = 0,1659$ m, $\overline{Z} = 0,1043$ m.
5.C3 $d = 1,00$ m: $\mathbf{F} = 5,66$ kN ⬑ 30°;
$d = 3,00$ m: $\mathbf{F} = 49,9$ kN ⬑ 27,7°.
5.C5 *Com* $n = 40$: (*a*) $\overline{X} = 60,2$ mm, $\overline{Y} = 23,4$ mm.
(*b*) $\overline{X} = 60,2$ mm, $\overline{Y} = 146,2$ mm.
(*c*) $\overline{X} = 68,7$ mm. $\overline{Y} = 20,4$ mm.
(*d*) $\overline{X} = 68,7$ mm, $\overline{Y} = 127,8$ mm.
5.C6 *Com* $n = 40$: (*a*) $\overline{X} = 60,0$ mm, $\overline{Y} = 24,0$ mm.
(*b*) $\overline{X} = 60,0$ mm, $\overline{Y} = 150,0$ mm.
(*c*) $\overline{X} = 68,6$ mm, $\overline{Y} = 21,8$ mm.
(*d*) $\overline{X} = 68,6$ mm, $\overline{Y} = 136,1$ mm.

CAPÍTULO 6

6.1 $F_{AB} = 52,0$ kN *T*; $F_{AC} = 64,0$ kN *T*; $F_{BC} = 80,0$ kN *C*.
6.3 $F_{AB} = 4,00$ kN *C*; $F_{AC} = 2,72$ kN *T*; $F_{BC} = 2,40$ kN *C*.
6.6 $F_{AB} = F_{BD} = 0$; $F_{AC} = 675$ N *T*; $F_{AD} = 1.125$ N *C*;
$F_{CD} = 900$ N *T*; $F_{CE} = 2.025$ N *T*; $F_{CF} = 2.250$ N *C*;
$F_{DF} = 675$ N *C*; $F_{EF} = 1.800$ N *T*.
6.7 $F_{AB} = 15,90$ kN *C*; $F_{AC} = 13,50$ kN *T*;
$F_{BC} = 16,80$ kN *C*; $F_{BD} = 13,50$ kN *C*;
$F_{CD} = 15,90$ kN *T*.
6.9 $F_{AB} = 47,2$ kN *C*; $F_{AC} = 44,6$ kN *T*;
$F_{BC} = 10,50$ kN *C*; $F_{BD} = 47,2$ kN *C*;
$F_{CD} = 17,50$ kN *T*; $F_{CE} = 30,6$ kN *T*; $F_{DE} = 0$.
6.10 $F_{AB} = F_{HI} = 12,31$ kN *C*; $F_{AC} = F_{GI} = 11,25$ kN *T*;
$F_{BC} = F_{GH} = 2,46$ kN *C*; $F_{BD} = F_{DE} = F_{EF} = F_{FH} =$
$9,85$ kN *C*; $F_{CD} = F_{FG} = 2,00$ kN *C*; $F_{CE} = F_{EG} =$
$3,75$ kN *T*; $F_{CG} = 6,75$ kN *T*.
6.19 $F_{AB} = 9,90$ kN *C*; $F_{AC} = 7,83$ kN *T*;
$F_{BC} = 0$; $F_{BD} = 7,07$ kN *C*; $F_{BE} = 2,00$ kN *C*;
$F_{CE} = 7,83$ kN *T*; $F_{DE} = 1.000$ kN *T*; $F_{DF} = 5,03$ kN *C*;
$F_{DG} = 0,559$ kN *C*; $F_{EG} = 5,59$ kN *T*.
6.20 $F_{FG} = 3,50$ kN *T*; $F_{FH} = 5,03$ kN *C*; $F_{GH} = 1,677$ kN *T*;
$F_{GI} = F_{IK} = F_{KL} = 3,35$ kN *T*; $F_{HI} = F_{IJ} = F_{JK} = 0$;
$F_{HJ} = F_{JL} = 4,42$ kN *C*.
6.23 $F_{AB} = 9,39$ kN *C*; $F_{AC} = 8,40$ kN *T*; $F_{BC} = 2,26$ kN *C*;
$F_{BD} = 7,60$ kN *C*; $F_{CD} = 0,128$ kN *C*; $F_{CE} = 7,07$ kN
T; $F_{DE} = 2,14$ kN *C*; $F_{DF} = 6,10$ kN *C*;
$F_{EF} = 2,23$ kN *T*.
6.24 $F_{AB} = F_{DF} = 2,29$ kN *T*; $F_{AC} = F_{EF} = 2,29$ kN *C*;
$F_{BC} = F_{DE} = 0,600$ kN *C* ; $F_{BD} = 2,21$ kN *T*;
$F_{BE} = F_{EH} = 0$; $F_{CE} = 2,21$ kN *C*;
$F_{CH} = F_{EJ} = 1.200$ kN *C*.
6.28 $F_{AB} = 128,0$ kN *T*; $F_{AC} = 136,7$ kN *C*;
$F_{BD} = F_{DF} = F_{FH} = 128,0$ kN *T*;
$F_{CE} = F_{EG} = 136,7$ kN *C*; $F_{GH} = 192,7$ kN *C*.
6.29 A treliça do Problema 6.33*a* é treliça simples.
6.30 A treliça do Problema 6.32*b* é treliça simples.
6.31 (*a*) *BC*, *CD*, *IJ*, *IL*, *LM*, *MN*. (*b*) *BC*, *BE*, *DE*, *EF*, *FG*, *IJ*, *KN*, *MN*.
6.32 (*a*) *AI*, *BJ*, *CK*, *DI*, *EI*, *FK*, *GK*. (*b*) *FK*, *IO*.
6.36 $F_{AB} = F_{AD} = 861$ N *C*; $F_{AC} = 676$ N *C*;
$F_{BC} = F_{CD} = 162,5$ N *T*; $F_{BD} = 244$ N *T*.
6.37 $F_{AB} = F_{AD} = 2.810$ N *T*; $F_{AC} = 5.510$ N *C*; $F_{BC} = F_{CD}$
$= 1.325$ N *T*; $F_{BD} = 1.908$ N *C*.
6.39 $F_{AB} = 840$ N *C*; $F_{AC} = 110,6$ N *C*; $F_{AD} = 394$ N *C*;
$F_{AE} = 0$; $F_{BC} = 160,0$ N *T*; $F_{BE} = 200$ N *T*;
$F_{CD} = 225$ N *T*; $F_{CE} = 233$ N *C*; $F_{DE} = 120,0$ N *T*.

6.40 $F_{AB} = 0$; $F_{AC} = 995$ N T; $F_{AD} = 1.181$ N C; $F_{AE} = F_{BC} = 0$; $F_{BE} = 600$ N T; $F_{CD} = 375$ N T; $F_{CE} = 700$ N C; $F_{DE} = 360$ N T.
6.45 $F_{BD} = 216$ kN T; $F_{DE} = 270$ kN T.
6.46 $F_{DG} = 459$ kN C; $F_{EG} = 216$ kN C.
6.49 $F_{CE} = 7{,}20$ kN T; $F_{DE} = 1.047$ kN C; $F_{DF} = 6{,}39$ kN C.
6.50 $F_{EG} = 3{,}46$ kN T; $F_{GH} = 3{,}78$ kN C; $F_{HJ} = 3{,}55$ kN C.
6.53 $F_{CE} = 8{,}00$ kN T; $F_{DE} = 4{,}50$ kN C; $F_{DF} = 10{,}00$ kN C.
6.54 $F_{FH} = 10{,}00$ kN C; $F_{FI} = 4{,}92$ kN T; $F_{GI} = 6{,}00$ kN T.
6.55 $F_{AD} = 13{,}5$ kN C; $F_{CD} = 0$; $F_{CE} = 56{,}1$ kN T.
6.56 $F_{DG} = 75{,}0$ kN C; $F_{FG} = 56{,}1$ kN T; $F_{FH} = 69{,}7$ kN T.
6.61 $F_{AF} = 1.500$ kN T; $F_{EJ} = 0{,}900$ kN T.
6.62 $F_{AF} = 0{,}900$ kN T; $F_{EJ} = 0{,}300$ kN T.
6.65 (*a*) *CJ*. (*b*) 1.026 kN T.
6.66 (*a*) *IO*. (*b*) 2,05 kN T.
6.69 (*a*) impropriamente vinculada. (*b*) completamente vinculada, determinada. (*c*) completamente vinculada, indeterminada.
6.70 (*a*) completamente vinculada, determinada. (*b*) parcialmente vinculada. (*c*) impropriamente vinculada.
6.71 (*a*) completamente vinculada, determinada. (*b*) completamente vinculada, indeterminada (*c*) impropriamente vinculada.
6.72 (*a*) parcialmente vinculada. (*b*) completamente vinculada, determinada. (*c*) completamente vinculada, indeterminada.
6.75 (*a*) 125 N ⦤ 36,9°. (*b*) 125 N ⦥ 36,9°.
6.76 $F_{BD} = 255$ N C; $\mathbf{C}_x = 120{,}0$ N →; $\mathbf{C}_y = 625$ N ↑.
6.81 $\mathbf{A}_x = 18{,}00$ kN ←; $\mathbf{A}_y = 20{,}0$ kN ↓; $\mathbf{B} = 9{,}00$ kN →; $\mathbf{C}_x = 9{,}00$ kN →, $\mathbf{C}_y = 20{,}0$ kN ↑.
6.82 $\mathbf{A} = 20{,}0$ kN ↓; $\mathbf{B} = 18{,}00$ kN ←; $\mathbf{C}_x = 18{,}00$ kN →, $\mathbf{C}_y = 20{,}0$ kN ↑.
6.83 (*a*) $\mathbf{A}_x = 450$ N ←, $\mathbf{A}_y = 525$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 450$ N →, $\mathbf{E}_y = 225$ N ↑; (*b*) $\mathbf{A}_x = 450$ N ←, $\mathbf{A}_y = 150{,}0$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 450$ N →, $\mathbf{E}_y = 600$ N ↑.
6.84 (*a*) $\mathbf{A}_x = 300$ N ←, $\mathbf{A}_y = 660$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 300$ N →, $\mathbf{E}_y = 90{,}0$ N ↑. (*b*) $\mathbf{A}_x = 300$ N ←, $\mathbf{A}_y = 150{,}0$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 300$ N →, $\mathbf{E}_y = 600$ N ↑.
6.91 $\mathbf{B}_x = 700$ N ←, $\mathbf{B}_y = 200$ N ↓; $\mathbf{E}_x = 700$ N →, $\mathbf{E}_y = 500$ N ↑.
6.92 $\mathbf{D}_x = 13{,}60$ kN →, $\mathbf{D}_y = 7{,}50$ kN ↑; $\mathbf{E}_x = 13{,}60$ kN ←, $\mathbf{E}_y = 2{,}70$ kN ↓.
6.101 $\mathbf{A}_x = 13{,}00$ kN ←, $\mathbf{A}_y = 4{,}00$ kN ↓; $\mathbf{B}_x = 36{,}0$ kN →, $\mathbf{B}_y = 6{,}00$ kN ↑; $\mathbf{E}_x = 23{,}0$ kN ←, $\mathbf{E}_y = 2{,}00$ kN ↓.
6.102 $\mathbf{A}_x = 2.025$ N ←, $\mathbf{A}_y = 1.800$ N ↓; $\mathbf{B}_x = 4.050$ N →, $\mathbf{B}_y = 1.200$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 2.025$ N ←, $\mathbf{E}_y = 600$ N ↑.
6.107 (*a*) $\mathbf{A}_x = 200$ kN →, $\mathbf{A}_y = 122$ kN ↑. (*b*) $\mathbf{B}_x = 200$ kN ←, $\mathbf{B}_y = 10{,}00$ kN ↓.
6.108 (*a*) $\mathbf{A}_x = 205$ kN →, $\mathbf{A}_y = 134{,}5$ kN ↑. (*b*) $\mathbf{B}_x = 205$ kN ←, $\mathbf{B}_y = 5{,}50$ kN ↑.
6.111 $F_{AG} = \sqrt{2}\,P/6$ C; $F_{BF} = 2\sqrt{2}\,P/3$ C; $F_{DI} = \sqrt{2}\,P/3$ C; $F_{EH} = \sqrt{2}\,P/6$ T.
6.113 $F_{AF} = P/4$ C ; $F_{BG} = F_{DG} = P/\sqrt{2}$ C ; $F_{EH} = P/4$ T.
6.115 $F_{AF} = M_0/4a$ C; $F_{BG} = F_{DG} = M_0/\sqrt{2}a$ T; $F_{EH} = 3M_0/4a$ C.
6.116 $F_{AF} = \sqrt{2}\,M_0/3a$ C; $F_{BG} = M_0/a$ T; $F_{DG} = M_0/a$ C; $F_{EH} = 2\sqrt{2}\,M_0/3a$ T.
6.117 $\mathbf{E} = P/5$ ↓; $\mathbf{F} = 8P/5$ ↑; $\mathbf{G} = 4P/5$ ↓; $\mathbf{H} = 2P/5$ ↑.
6.118 $\mathbf{A} = P/15$ ↑; $\mathbf{D} = 2P/15$ ↑; $\mathbf{E} = 8P/15$ ↑; $\mathbf{H} = 4P/15$ ↑.
6.119 (*a*) $\mathbf{A} = 2{,}06P$ ◿ 14,0°; $\mathbf{B} = 2{,}06P$ ⦤ 14,0°; estrutura é rígida. (*b*) estrutura não é rígida. (*c*) $\mathbf{A} = 1{,}25P$ ⦤ 36,9°; $\mathbf{B} = 1{,}031P$ ◿ 14,0°; estrutura é rígida.
6.126 (*a*) 746 N ↓. (*b*) 565 N ⦦ 61,3°.
6.127 (*a*) 302 N ↓. (*b*) 682 N ⦦ 61,3°.
6.128 $T_{DE} = 81{,}0$ N; $\mathbf{B} = 216$ N ↓.
6.129 (*a*) 21,0 kN ←. (*b*) 52,5 kN ←.
6.130 (*a*) 1.143 N · m ⤓. (*b*) 457 N · m ⤓.
6.133 195,0 kN · m ⤓.
6.134 40,5 kN · m ↰.
6.137 208 N · m ⤓.
6.138 18,43 N · m ⤓.
6.139 $F_{AE} = 800$ N T; $F_{DG} = 100{,}0$ N C.
6.140 $\mathbf{P} = 120{,}0$ N ↓; $\mathbf{Q} = 110{,}0$ N ←.
6.143 $\mathbf{D} = 30{,}0$ kN ←; $\mathbf{F} = 37{,}5$ kN ⦦ 36,9°.
6.144 $\mathbf{D} = 150{,}0$ kN ←; $\mathbf{F} = 96{,}4$ kN ⦦ 13,50°.
6.146 44,8 kN.
6.148 8,45 kN.
6.151 240 N.
6.154 (*a*) 14,11 kN ⦦ 19,10°. (*b*) 19,79 kN ⦤ 47,6°.
6.159 (*a*) $M_0 = (90{,}0\text{ N} \cdot \text{m})\,\mathbf{i}$. (*b*) $\mathbf{A} = 0$; $\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{M}_B = -(72{,}0\text{ N} \cdot \text{m})\,\mathbf{i}$
6.160 (*a*) 27,0 mm. (*b*) 40,0 N · m ⤓.
6.163 $\mathbf{E}_x = 100{,}0$ kN →, $\mathbf{E}_y = 154{,}9$ kN ↑; $\mathbf{F}_x = 26{,}5$ kN →, $\mathbf{F}_y = 118{,}1$ kN ↓; $\mathbf{H}_x = 126{,}5$ kN ←, $\mathbf{H}_y = 36{,}8$ kN ↓.
6.166 $F_{FG} = 5{,}23$ kN C; $F_{EG} = 0{,}1476$ kN C; $F_{EH} = 5{,}08$ kN T.
6.167 $F_{KM} = 5{,}02$ kN T; $F_{LM} = 1.963$ kN C; $F_{LN} = 3{,}95$ kN C.
6.170 $\mathbf{A}_x = 150{,}0$ N ←, $\mathbf{A}_y = 250$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 150{,}0$ N →, $\mathbf{E}_y = 450$ N ↑.
6.172 (*a*) $\mathbf{P} = 109{,}8$ N →. (*b*) 126,8 N T, (*c*) 139,8 N ⦤ 38,3°.
6.C2 (*a*) Para $x = 9{,}75$ m, $F_{BH} = 3{,}19$ kN T. (*b*) Para $x = 3{,}75$ m, $F_{BH} = 1{,}313$ kN C. (*c*) Para $x = 6$ m, $F_{GH} = 3{,}04$ kN T.
6.C4 $\theta = 30°$: $\mathbf{M}_A = 1{,}669$ N · m ↰, $F = 11{,}79$ N. $\theta = 80°$: $\mathbf{M}_A = 3{,}21$ N · m ↰, $F = 11{,}98$ N.
6.C6 $\theta = 20°$: $M = 31{,}8$ N · m; $\theta = 75°$: $M = 12{,}75$ N · m; $\theta = 60{,}0°$: $M_{\text{mín}} = 12{,}00$ N · m.

CAPÍTULO 7

7.3 $\mathbf{F} = 4{,}80$ kN $\leftarrow$; $\mathbf{V} = 1{,}400$ kN $\downarrow$; $\mathbf{M} = 1{,}380$ kN · m $\curvearrowright$.
7.4 $\mathbf{F} = 3{,}00$ kN $\leftarrow$; $\mathbf{V} = 0$; $\mathbf{M} = 0{,}600$ kN · m $\curvearrowright$.
7.7 (Em AJ) $\mathbf{F} = 103{,}9$ N $\nwarrow$; $\mathbf{V} = 60{,}0$ N $\nearrow$; $\mathbf{M} = 18{,}71$ N · m $\curvearrowright$.
7.8 (Em BK) $\mathbf{F} = 60{,}0$ N $\swarrow$; $\mathbf{V} = 103{,}9$ N $\searrow$; $\mathbf{M} = 10{,}80$ N · m $\curvearrowleft$.
7.13 (Em AJ) $\mathbf{F} = 194{,}6$ N $\measuredangle 60°$; $\mathbf{V} = 257$ N $\measuredangle 30°$; $\mathbf{M} = 24{,}7$ N · m $\curvearrowright$.
7.14 45,2 N · m para $\theta = 82{,}9°$.
7.15 (*a*) $\mathbf{F} = 500$ N $\leftarrow$; $\mathbf{V} = 500$ N $\uparrow$; $\mathbf{M} = 300$ N · m $\curvearrowright$. (*b*) $\mathbf{F} = 970$ N $\uparrow$; $\mathbf{V} = 171{,}0$ N $\leftarrow$; $\mathbf{M} = 446$ N · m $\curvearrowright$.
7.16 (*a*) $\mathbf{F} = 500$ N $\leftarrow$; $\mathbf{V} = 500$ N $\uparrow$; $\mathbf{M} = 300$ N · m $\curvearrowright$. (*b*) $\mathbf{F} = 933$ N $\uparrow$; $\mathbf{V} = 250$ N $\leftarrow$; $\mathbf{M} = 375$ N · m $\curvearrowright$.
7.17 (Em BJ) $\mathbf{F} = 200$ N $\searrow$; $\mathbf{V} = 120{,}0$ N $\nearrow$; $\mathbf{M} = 120{,}0$ N · m $\curvearrowleft$.
7.18 (Em AK) $\mathbf{F} = 520$ N $\leftarrow$; $\mathbf{V} = 120{,}0$ N $\downarrow$; $\mathbf{M} = 96{,}0$ N · m $\curvearrowright$.
7.23 (On BJ) 0,289 Wr $\curvearrowleft$.
7.24 (On BJ) 0,417 Wr $\curvearrowleft$.
7.27 0,1009 Wr para $\theta = 57{,}3°$.
7.28 0,357 Wr para $\theta = 49{,}3°$.
7.29 (*b*) $|V|_{máx} = 2P$; $|M|_{máx} = 3Pa$.
7.30 (*b*) $|V|_{máx} = 2P/3$; $|M|_{máx} = 2PL/9$.
7.31 (*b*) $wL/4$; $3\,wL^2/32$.
7.32 (*b*) $wL/2$; $3\,wL^2/8$.
7.35 (*b*) $|V|_{máx} = 35{,}0$ kN; $|M|_{máx} = 12{,}50$ kN · m.
7.36 (*b*) $|V|_{máx} = 50{,}5$ kN; $|M|_{máx} = 39{,}8$ kN · m.
7.39 (*b*) $|V|_{máx} = 64{,}0$ kN; $|M|_{máx} = 92{,}0$ kN · m.
7.40 (*b*) $|V|_{máx} = 60{,}0$ kN; $|M|_{máx} = 72{,}0$ kN · m.
7.43 (*b*) $|V|_{máx} = 1{,}800$ kN; $|M|_{máx} = 0{,}225$ kN · m.
7.44 (*b*) $|V|_{máx} = 2{,}00$ kN; $|M|_{máx} = 0{,}500$ kN · m.
7.49 (*a*) +400 N; +160,0 N · m. (*b*) −200N; +40,0 N · m.
7.54 $|V|_{máx} = 800$ N; $|M|_{máx} = 180{,}0$ N · m.
7.55 (*a*) 54,5°. (*b*) 675 N · m.
7.56 (*a*) 0,311 m. (*b*) 193,0 N · m.
7.57 (*a*) 1,236. (*b*) $0{,}1180\,wa^2$.
7.58 $a = 0{,}207\,L$.
7.62 (*a*) $0{,}414\,wL$; $0{,}0858\,wL^2$. (*b*) $0{,}250\,wL$; $0{,}250\,wL^2$.
7.63 $|V|_{máx} = 2P$; $|M|_{máx} = 3Pa$.
7.69 $|V|_{máx} = 7{,}20$ kN; $|M|_{máx} = 5{,}76$ kN · m.
7.70 $|V|_{máx} = 720$ N; $|M|_{máx} = 164{,}0$ N · m.
7.72 $|V|_{máx} = 60{,}0$ kN; $|M|_{máx} = 72{,}0$ kN · m.
7.77 (*b*) 9,00 kN · m, 1,700 m de A.
7.78 (*b*) 26,4 kN · m, 2,05 m de A.
7.83 (*b*) 40,5 kN · m, 1,800 m de A.
7.84 (*b*) 60,5 kN · m, 2,20 m de A.
7.85 (*a*) $V = (w_0/6L)(3x^2 - 6Lx + 2L^2)$; $\mathbf{M} = (w_0/6L)(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$. (*b*) $0{,}0642w_0\,L^2$, em $x = 0{,}423L$.
7.86 (*a*) $V = (w_0/3L)(2x^2 - 3Lx + L^2)$; $M = (w_0/18L)(4x^3 - 9Lx^2 + 6L^2x - L^3)$. (*b*) $w_0L^2/72$, em $x = L/2$.
7.89 (*a*) $\mathbf{P} = 4{,}00$ kN $\downarrow$; $\mathbf{Q} = 6{,}00$ kN $\downarrow$. (*b*) $M_C = -900$ N · m.
7.90 (*a*) $\mathbf{P} = 2{,}50$ kN $\downarrow$; $\mathbf{Q} = 7{,}50$ kN $\downarrow$. (*b*) $M_C = -900$ N · m.
7.93 (*a*) 2,28 m. (*b*) $\mathbf{D}_x = 13{,}67$ kN $\rightarrow$; $\mathbf{D}_y = 7{,}80$ kN $\uparrow$. (c) 15,94 kN.
7.94 (*a*) 1,959 m. (*b*) 2,48 m.
7.97 (*a*) $d_B = 1{,}733$ m; $d_D = 4{,}20$ m. (*b*) 21,5 kN $\measuredangle 3{,}8°$.
7.98 (*a*) 2,8 m. (*b*) $\mathbf{A} = 32{,}0$ kN $\measuredangle 38{,}7°$; $\mathbf{E} = 25{,}0$ kN $\rightarrow$.
7.103 196,2 N.
7.104 157,0 N.
7.107 (*a*) 138,1 m. (*b*) 602 N.
7.108 (*a*) 6,75 m. (*b*) $T_{AB} = 615$ N; $T_{BC} = 600$ N.
7.117 (*a*) 5.880 N. (*b*) 0,873 m.
7.118 (*a*) 6.860 N. (*b*) 31,0°.
7.125 $y = h[1 - \cos(\pi x/L)]$; $T_0 = w_0L^2/h\pi^2$; $T_{máx} = (w_0L/\pi)\sqrt{(L^2/h^2\pi^2) + 1}$.
7.127 (*a*) 26,7 m. (*b*) 70,3 kg.
7.129 (*a*) 164,8 m. (*b*) 4.290 N.
7.133 (*a*) 5,89 m. (*b*) 10,89 N $\rightarrow$.
7.135 (*a*) 30,2 m. (b) 56,6 kg.
7.139 31,8 N.
7.140 29,8 N.
7.143 119,1 N $\rightarrow$.
7.144 177,6 N $\rightarrow$.
7.151 0,394 m e 10,97 m.
7.152 0,1408.
7.153 (*a*) 0,338. (*b*) 56,5°; $0{,}755\,wL$.
7.154 (*a*) 1.500 N. (*b*) (Em ABJ) $\mathbf{F} = 1.324$ N $\uparrow$; $\mathbf{V} = 706$ N $\leftarrow$; $\mathbf{M} = 229$ N · m $\curvearrowleft$.
7.155 (Em BJ) $\mathbf{F} = 250$ N $\searrow$; $\mathbf{V} = 120{,}0$ N $\nearrow$; $\mathbf{M} = 120{,}0$ N · m $\curvearrowleft$.
7.159 (*b*) 41,4 kN; 35,3 kN · m.
7.164 (*a*) 2.770 N. (*b*) 75,14 m.
7.C3 $a = 1{,}923$ m; $M_{máx} = 37{,}0$ kN · m em 4,64 m de A.
7.C8 $c/L = 0{,}300$: $h/L = 0{,}5225$; $s_{AB}/L = 1{,}532$; $T_0/wL = 0{,}300$; $T_{máx}/wL = 0{,}823$.

CAPÍTULO 8

8.3 Em equilíbrio; $\mathbf{F} = 48{,}3$ N $\nwarrow$.
8.4 Bloco em movimento; $\mathbf{F} = 103{,}5$ N $\nwarrow$.
8.5 225 N $\leq P \leq$ 479 N.
8.6 143,0 N $\leq P \leq$ 483 N.
8.7 (*a*) 105,8 N. (*b*) 46,0°.
8.9 (*a*) 403 N. (*b*) 229 N.
8.11 (*a*) 353 N $\leftarrow$. (*b*) 196,2 N $\leftarrow$.
8.12 (*a*) 275 N $\leftarrow$. (*b*) 196,2 N $\leftarrow$.
8.17 $M = Wr\mu_s\,(1 + \mu_s)/(1 + \mu_s^2)$.
8.18 (*a*) 0,300 Wr. (*b*) 0,349 Wr.
8.19 151,5 N · m.
8.20 1,473 kN.
8.21 0,208.
8.23 (*a*) 136,4°. (*b*) 0,928 W.
8.26 0,860.
8.28 (*a*) 112,5 N. (*b*) 8,81 mm.

8.29 $3{,}46 \le \dfrac{L}{a} \le 13{,}63$.
8.36 168,4 N $\le P \le$ 308 N.
8.37 9,38 N · m $\le M \le$ 15,01 N · m.
8.38 −46,8 N $\le P \le$ 34,3 N.
8.42 (*a*) Sistema desliza; $P = 62{,}8$ N.
(*b*) Sistema de roda sobre *B*; $P = 73{,}2$ N.
8.43 35,8°.
8.44 20,5°.
8.45 1,225 W.
8.48 $\mathbf{P} = 2.080$ N ↓.
8.49 $\mathbf{P} = 1.966$ N ↓.
8.53 9,86 kN ←.
8.54 913 N ←.
8.55 (*a*) 28,1°. (*b*) 728 N ◿ 14,0°.
8.57 67,4 N.
8.60 (*b*) 283 N ←.
8.61 0,442.
8.64 0,1103.
8.65 0,1013.
8.69 1.068 N · m.
8.70 4,18 N · m.
8.76 450 N.
8.77 412 N.
8.78 344 N.
8.79 376 N.
8.80 0,226.
8.88 (*a*) 4,80 kN. (*b*) 1,375°.
8.91 0,1670.
8.96 154,4 N.
8.99 (*a*) 1,288 kN. (*b*) 1,058 kN.
8.100 300 mm.
8.102 (*a*) 22,8 kg. (*b*) 291 N.
8.103 (*a*) 109,7 kg. (*b*) 828 N.
8.107 35,1 N · m
8.108 (*a*) 27,0 N · m. (*b*) 675 N.
8.109 (*a*) 39,0 N · m. (*b*) 844 N.
8.112 44,9 N · m ↰.
8.116 (*a*) 11,66 kg. (*b*) 38,6 kg. (*c*) 34,4 kg.
8.117 (*a*) 9,46 kg. (*b*) 167,2 kg. (*c*) 121,0 kg.
8.122 5,97 N.
8.123 9,56 N.
8.126 0,350.
8.131 (*a*) 51,0 N · m. (*b*) 875 N.
8.132 (*a*) 170,5 N. (*b*) 14,04°.
8.135 $6{,}35 \le L/a \le 10{,}81$.
8.138 0,225.
8.139 (*a*) 620 N ←. (*b*) $\mathbf{B}_x = 1.390$ N ←; $\mathbf{B}_y = 1.050$ N ↓.
8.142 (*a*) 0,238. (*b*) 218 N ↓.
8.C1 $x = 500$ mm: 63,3 N; $P_{\text{máx}} = 67{,}8$ N em $x = 355$ mm.
8.C3 $\mu_A = 0{,}25$: $M = 0{,}0603$ N · m.
8.C4 $\theta = 30°$: 1,336 N · m $\le M_A \le$ 2,23 N · m.
8.C6 $\theta = 20°$: 10,39 N · m.
8.C8 (*a*) $x_0 = 0{,}600\,L$; $x_m = 0{,}604L$; $\theta_1 = 5{,}06°$.
(*b*) $\theta_2 = 55{,}4°$.

CAPÍTULO 9

9.1 $b^3h/12$.
9.2 $3a^4/2$.
9.3 $2a^3b/15$.
9.4 $ha^3/5$
9.6 $a^4/8$.
9.7 $2ab^3/7$.
9.9 $ab^3/15$.
9.10 $0{,}1056\,ab^3$.
9.11 $ab^3/15$.
9.12 $2a^3b/21$.
9.15 $ab^3/10$; $b/\sqrt{5}$.
9.16 $3ab^3/35$; $b\sqrt{9/35}$.
9.17 $a^3b/6$; $a/\sqrt{3}$.
9.18 $3a^3b/35$; $b\sqrt{9/35}$.
9.21 $20a^4$; $1{,}826a$.
9.22 $43a^4/48$; $0{,}773a$
9.23 $(\pi/2)(R_2^4 - R_1^4)$; $(\pi/4)(R_2^4 - R_1^4)$
9.24 (*b*) Para $t/R_m = 1$, −10,56%; para $t/R_m = \frac{1}{2}$, −2,99%, para $t/R_m = \frac{1}{10}$, −0,1250%.
9.25 $64a^4/15$; $1{,}265a$.
9.28 $bh(12h^2 + b^2)/48$; $\sqrt{(12h^2 + b^2)/24}$
9.31 390×10^3 mm^4; 21,9 mm.
9.33 $64{,}3 \times 10^3$ mm^4; 8,87 mm.
9.37 $I = 9{,}50 \cdot 10^6$ mm^4; $d_2 = 60{,}0$ mm.
9.38 $A = 6.600$ mm^2; $\bar{I} = 3{,}72 \cdot 10^6$ mm^4.
9.41 $\bar{I}_x = 1{,}874 \cdot 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 5{,}82 \cdot 10^6$ mm^4.
9.42 $\bar{I}_x = 48{,}9 \cdot 10^3$ mm^4; $\bar{I}_y = 8{,}35 \cdot 10^3$ mm^4.
9.45 (*a*) $80{,}9 \cdot 10^6$ mm^4. (*b*) $57{,}4 \cdot 10^6$ mm^4.
9.46 (*a*) $12{,}16 \cdot 10^6$ mm^4. (*b*) $9{,}73 \cdot 10^6$ mm^4.
9.49 $\bar{I}_x = 260 \cdot 10^6$ mm^4; $\bar{k}_x = 144{,}6$ mm;
$\bar{I}_y = 17{,}53 \cdot 10^6$ mm^4; $\bar{k}_y = 37{,}6$ mm.
9.51 $\bar{I}_x = 255 \cdot 10^6$ mm^4; $\bar{k}_x = 134{,}1$ mm;
$\bar{I}_y = 100{,}0 \cdot 10^6$ mm^4; $\bar{k}_y = 83{,}9$ mm.
9.53 $\bar{I}_x = 3{,}55 \cdot 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 49{,}8 \cdot 10^6$ mm^4.
9.55 $\bar{I}_x = 745 \cdot 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 91{,}3 \cdot 10^6$ mm^4.
9.57 $3\pi r/16$.
9.58 $3\pi b/16$.
9.59 $15h/14$.
9.60 $4h/7$.
9.63 $5a/8$.
9.64 80,0 mm.
9.67 $a^4/2$.
9.68 $a^2b^2/12$.
9.69 $-b^2h^2/8$.
9.71 $-1{,}760 \cdot 10^6$ mm^4.
9.72 $-21{,}6 \cdot 10^6$ mm^4.
9.75 $471 \cdot 10^3$ mm^4.
9.78 $1{,}165 \cdot 10^6$ mm^4.
9.79 (*a*) $\bar{I}_{x'} = 0{,}482a^4$; $\bar{I}_{y'} = 1{,}482a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -0{,}589a^4$.
(*b*) $\bar{I}_{x'} = 1{,}120a^4$; $\bar{I}_{y'} = 0{,}843a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0{,}760a^4$.
9.80 $\bar{I}_{x'} = 103{,}5 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_{y'} = 97{,}9 \cdot 10^6$ mm^4;
$\bar{I}_{x'y'} = -38{,}3 \cdot 10^6$ mm^4.
9.85 20,2°; $1{,}754a^4$, $0{,}209a^4$.
9.86 −17,11°; $139{,}1 \times 10^6$ mm^4 , $62{,}3 \cdot 10^6$ mm^4.

9.91 (*a*) $\bar{I}_{x'} = 0{,}482a^4$; $\bar{I}_{y'} = 1{,}482a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -0{,}589a^4$. (*b*) $\bar{I}_{x'} = 1{,}120a^4$; $\bar{I}_{y'} = 0{,}843a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0{,}760a^4$.
9.92 $\bar{I}_{x'} = 103{,}5 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_{y'} = 97{,}9 \cdot 10^6$ mm^4; $\bar{I}_{x'y'} = -38{,}3 \times 10^6$ mm^4.
9.97 20,2°; $1{,}754a^4$, $0{,}209a^4$.
9.98 −17,11°; $139{,}1 \times 10^6$ mm^4, $62{,}3 \times 10^6$ mm^4.
9.104 23,8° sentido horário; $0{,}524 \times 10^6$ mm^4, $0{,}0917 \times 10^6$ mm^4.
9.105 19,54° sentido anti-horário; $4{,}34 \times 10^6$ mm^4, $0{,}647 \times 10^6$ mm^4.
9.107 (*a*) $88{,}0 \times 10^6$ mm^4. (*b*) $96{,}3 \times 10^6$ mm^4, $39{,}7 \times 10^6$ mm^4.
9.111 (*a*) $m(r_1^2 + r_2^2)/4$. (*b*) $m\,(r_1^2 + r_2^2)/2$.
9.112 (*a*) $0{,}0699\,ma^2$. (*b*) $0{,}320\,ma^2$.
9.113 (*a*) $25\,mr_2^2/64$. (*b*) $0{,}1522\,mr_2^2$.
9.114 (*a*) $mb^2/7$. (*b*) $m(7a^2 + 10b^2)/70$.
9.115 (*a*) $ma^2/3$. (*b*) $3ma^2/2$.
9.116 (*a*) $7ma^2/6$. (*b*) $ma^2/2$.
9.119 $1{,}329\,mh^2$.
9.120 $m(3a^2 + L^2)/12$.
9.121 (*a*) $0{,}241\,mh^2$. (*b*) $m(3a^2 + 0{,}1204\,h^2)$.
9.122 $m(b^2 + h^2)/10$.
9.124 $m(a^2 + b^2)/5$.
9.125 $I_x = I_y = ma^2/4$; $I_z = ma^2/2$.
9.127 837×10^{-9} kg · m^2; 6,92 mm.
9.129 $m(3a^2 + 2h^2)/6$.
9.131 (*a*) 27,5 mm para a direita de *A*. (*b*) 32,0 mm.
9.134 (*a*) $\pi\rho l^2\left[6a^2t\left(\dfrac{5a^2}{3l^2} + \dfrac{2a}{l} + 1\right) + \dfrac{d^2l}{4}\right]$. (b) 0,1851.
9.135 $I_x = 26 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_y = 38{,}2 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_z = 17{,}55 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.136 $I_x = 175{,}5 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_y = 309 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_z = 154{,}4 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.141 (*a*) $13{,}99 \times 10^{-3}$ kg · m^2. (*b*) $20{,}6 \times 10^{-3}$ kg · m^2. (*c*) $14{,}30 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.144 $I_x = 38{,}1 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $k_x = 110{,}7$ mm.
9.145 (*a*) $26{,}4 \times 10^{-3}$ kg · m^2. (*b*) $31{,}2 \times 10^{-3}$ kg · m^2. (*c*) $8{,}58 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.148 $I_x = 0{,}323$ kg · m^2; $I_y = I_z = 0{,}419$ kg · m^2.
9.149 $I_{xy} = 2{,}50 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{yz} = 4{,}06 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{zx} = 8{,}81 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.150 $I_{xy} = 2{,}44 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{yz} = 1{,}415 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{zx} = 4{,}59 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.155 $I_{xy} = -8{,}04 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{yz} = 12{,}90 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{zx} = 94{,}0 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.156 $I_{xy} = 0$; $I_{yz} = 48{,}3 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{zx} = -4{,}43 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.157 $I_{xy} = wa^3\,(1 - 5\pi)/g$; $I_{yz} = -11\pi wa^3/g$; $I_{zx} = 4\,wa^3\,(1 + 2\pi)g$.
9.158 $I_{xy} = -11wa^3/g$; $I_{yz} = wa^3\,(\pi + 6)/2g$; $I_{zx} = -wa^3/4g$.
9.159 $I_{xy} = 47{,}9 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{yz} = 102{,}1 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{zx} = 64{,}1 \times 10^{-6}$ kg · m^2.
9.160 $I_{xy} = -m'R_1^3/2$; $I_{yz} = m'R_1^3/2$; $I_{zx} = -m'R_2^3/2$.
9.162 (*a*) $mac/20$. (*b*) $I_{xy} = mab/20$; $I_{yz} = mbc/20$.
9.165 $18{,}17 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.166 $11{,}81 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.167 $5\,Wa^2/18g$.
9.168 $4{,}41\,\gamma ta^4/g$.
9.169 281×10^{-3} kg · m^2.
9.170 0,354 kg · m^2.
9.173 (*a*) $b/a = 2$; $c/a = 2$. (*b*) $b/a = 1$; $c/a = 0{,}5$.
9.174 (*a*) 2. (*b*) $\sqrt{2/3}$.
9.175 (*a*) $1/\sqrt{3}$. (*b*) $\sqrt{7/12}$.
9.179 (*a*) $K_1 = 0{,}363\,ma^2$; $K_2 = 1{,}583\,ma^2$; $K_3 = 1{,}720\,ma^2$.
(*b*) $(\theta_x)_1 = (\theta_z)_1 = 49{,}7°$, $(\theta_y)_1 = 113{,}7°$;
$(\theta_x)_2 = 45°$, $(\theta_y)_2 = 90°$, $(\theta_z)_2 = 135°$;
$(\theta_x)_3 = (\theta_z)_3 = 73{,}5°$, $(\theta_y)_3 = 23{,}7°$.
9.180 (*a*) $K_1 = 14{,}30 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $K_2 = 13{,}96 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $K_3 = 20{,}6 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
(*b*) $(\theta_x)_1 = (\theta_y)_1 = 90{,}0°$, $(\theta_z)_1 = 0$;
$(\theta_x)_2 = 3{,}42°$, $(\theta_y)_2 = 86{,}6°$, $(\theta_z)_2 = 90{,}0°$.
$(\theta_x)_3 = 93{,}4°$, $(\theta_y)_3 = 3{,}4°$, $(\theta_z)_3 = 90{,}0°$.
9.182 (*a*) $K_1 = 0{,}1639Wa^2/g$; $K_2 = 1{,}054Wa^2/g$; $K_3 = 1{,}115Wa^2/g$.
(*b*) $(\theta_x)_1 = 36{,}7°$, $(\theta_y)_1 = 71{,}6°$, $(\theta_z)_1 = 59{,}5°$;
$(\theta_x)_2 = 74{,}9°$, $(\theta_y)_2 = 54{,}5°$, $(\theta_z)_2 = 140{,}5°$;
$(\theta_x)_3 = 57{,}5°$, $(\theta_y)_3 = 138{,}8°$, $(\theta_z)_3 = 112{,}4°$.
9.183 (*a*) $K_1 = 2{,}26\gamma ta^4/g$; $K_2 = 17{,}27\gamma ta^4/g$; $K_3 = 19{,}08\gamma ta^4/g$.
(*b*) $(\theta_x)_1 = 85{,}0°$, $(\theta_y)_1 = 36{,}8°$, $(\theta_z)_1 = 53{,}7°$;
$(\theta_x)_2 = 81{,}7°$, $(\theta_y)_2 = 54{,}7°$, $(\theta_z)_2 = 143{,}4°$;
$(\theta_x)_3 = 9{,}70°$, $(\theta_y)_3 = 99{,}0°$, $(\theta_z)_3 = 86{,}3°$.
9.185 $I_x = ab^3/28$; $I_y = a^3b/20$.
9.187 $4a^3b/15$; $a/\sqrt{5}$.
9.188 $I_x = 4a^4$; $I_y = 16\,a^4/3$.
9.189 (*a*) $3{,}13 \times 10^6$ mm^4. (*b*) $2{,}41 \times 10^6$ mm^4.
9.190 $I_x = 634 \times 10^6$ mm^4; $I_y = 38{,}0 \times 10^6$ mm^4.
9.193 (*a*) $7\,ma^2/18$. (*b*) $0{,}819\,ma^2$.
9.195 $I_x = 0{,}877$ kg · m^2; $I_y = 1{,}982$ kg · m^2; $I_z = 1{,}652$ kg · m^2.
9.C5 (*a*) $5{,}99 \times 10^{-3}$ kg · m^2. (*b*) $77{,}4 \times 10^{-3}$ kg · m^2.

CAPÍTULO 10

10.1 82,5 N ↓.
10.3 49,5 N · m ↓.
10.7 (*a*) 60,0 N *C*, 8,00 mm ↓. (*b*) 300 N *C*, 40,0 mm ↓.
10.8 (*a*) 120,0 N *C*, 16,00 mm ↓. (*b*) 300 N *C*, 40,0 mm ↓.
10.9 $Q = 2P$ sen θ/cos $\theta/2$.
10.10 $Q = 2P$ cos θ/cos $\theta/2$.
10.11 $Q = (3P/2)$ tg θ
10.12 $Q = P[(l/a)\cos^3\theta - 1]$.
10.15 $M = \frac{1}{2}Wl$ tg α sen θ.
10.16 $M = Pl/2$ tg θ.
10.17 $M = 7Pa$ cos θ
10.18 (*a*) $M = Pl$ sen 2θ. (*b*) $M = 3Pl$ cos θ. (*c*) $M = Pl$ sen θ.
10.24 36,4°.
10.25 38,7°.
10.26 68,0°.
10.28 19,81° e 51,9°.
10.30 25,0°.
10.31 39,7° e 69,0°.
10.32 52,2°.
10.33 40,2°.

10.35 22,6°.
10.36 51,1°.
10.37 52,4°.
10.38 19,40°.
10.39 59,0°.
10.40 78,7°, 324°, 379°.
10.43 12,03 kN ↘.
10.44 20,4°.
10.47 $\eta = 1/(1 + \mu \operatorname{cotg} \alpha)$
10.49 37,6 N, 31,6 N.
10.51 300 N · m, 81,8 N · m.
10.52 $\eta = \operatorname{tg} \theta / \operatorname{tg} (\theta + \phi_s)$.
10.53 7,75 kN ↑.
10.54 $H = 1{,}361$ kN ↑; $M_H = 550$ N · m ↰.
10.66 19,40°.
10.67 Equilíbrio é neutro.
10.69 $\theta = 0$ e $\theta = 180{,}0°$, instável;
$\theta = 75{,}5°$ e $\theta = 284°$, estável.
10.70 $\theta = 90{,}0°$ e $\theta = 270°$ instável;
$\theta = 22{,}0°$ e $\theta = 158{,}0°$, estável.
10.71 $\theta = -45{,}0°$, instável; $\theta = 135{,}0°$, estável.
10.73 59,0°, estável.
10.74 78,7°, estável; 324°, instável; 379°, estável.
10.79 357 mm.
10.80 252 mm.
10.83 49,1°.
10.88 16,88 m.
10.92 $P < 2kL/9$.
10.93 $P < kL/18$.
10.94 $P < k(l - a)^2/2l$.
10.96 $P < 160{,}0$ N.
10.98 $P < 764$ N.
10.104 (*a*) 20,0 N. (*b*) 105,0 N.
10.106 39,2°.
10.110 (*a*) 0, instável. (*b*) 137,8°, estável.
10.112 (*a*) 22,0°. (*b*) 30,6°.
10.C2 $\theta = 60°$: 171,1 N *C*. Para $32{,}5° \leq \theta \leq 134{,}3°$,
$|F| \leq 400$ N.
10.C3 $\theta = 60°$: 296 N *T*. Para $\theta \leq 125{,}7°$, $|F| \leq 400$ N.
10.C5 (*b*) $\theta = 50°$, dado em *E*: $V = 100{,}5$ J.
$dV/d\theta = 22{,}9$ J. (*c*) $\theta = 0$, instável; 30,4°.
10.C6 (*b*) $\theta = 60°$, dado em *B*: 30,0 J. (*c*) $\theta = 0$, instável;
41,4°, estável.
10.C7 (*b*) $\theta = 60°$, dado em $\theta = 0$: −37,0 J. (*c*) 52,2°, estável.

ÍNDICE

A

Adição
  associativa, 22
  de binários, 113
  de vetores, 20-22
Adição de forças
  no espaço, concorrente, 51-59, 68
  pela lei do paralelogramo, 5
  pela soma dos componentes *X* e *Y*, 32-37
Análise de estruturas, 286-353
  estruturas e máquinas, 318-346, 349
  introdução, 288-289
  problemas para computador, 352-353
  problemas para revisão, 350-351
  resumo, 347-349
Análise de treliças, 289-317, 347-348
  pelo método das seções, 306-307, 348
  pelo método dos nós, 292-294, 347-348
Análise de uma estrutura, 318-319, 349
Ângulos
  de atrito 417-418, 462
  de avanço, 433, 436, 463
  de repouso, 417
Aplicação do princípio do trabalho virtual, 564-566
Aproximação por métodos numéricos, 401
Área, unidades de (unidades SI), 7-10
Áreas e linhas, 222-259. *Ver também* momento de inércia de áreas
  centro de gravidade de um corpo bidimensional, 222-223, 276
  centroide de, 224-225, 276
  determinação do centroide por integração, 238-240, 277
  distribuição de cargas em vigas, 250, 278
  forças em superfícies submersas, 251-259
  placas e fios compostos, 228-238
  primeiros momentos de, 225-228, 276
  teorema de Pappus-Guldinus, 240-249, 278
Áreas simétricas e assimétricas, 226
Aristóteles, 4
Arquimedes, 4
Atrito, 412-471
  ângulo de, 417-418, 462
  atrito em roda, resistência ao rolamento, 444-451
  atrito seco
    as leis de, 414-416, 423
    problemas que envolvem, 418-431, 462-463
  círculo de, 447
  coeficiente de, 414-416, 424, 454-456
  correia, 451-461
  cunhas, 431-432
  disco, 443-444, 447
  do eixo, 441-443, 447
  estático e cinético, 462
  fluido, 414
  introdução, 414
  mancais de deslizamento, 441-443
  mancais de escora, 443-444
  parafusos de rosca quadrada, 432-441
  problema para revisão, 465-468
  problemas para computador, 469-471
  resumo, 462-464
  valores máximos e mínimos de, 420
Atrito de Coulomb. *Ver* Atrito seco
Atrito em roda, resistência ao rolamento, 444-451

B

Barragem Grand Coulee, 220-221
Barragens, 220-221
Binários
  adição de, 113
  aplicados a uma viga, 371
  equivalentes, 111-113, 118,151
  momento de, 110, 151
  representado por vetores, 113-114
  resultantes, 128

C

Cabos
  catenária, 397-404, 407
  com cargas concentradas, 385-386
  com cargas distribuídas, 386-387, 407
  flexibilidade, 385, 406
  forças, 385-404
  parabólico, 387-397, 407
Cálculos, antecipando erros em, 15
Cargas aplicadas, 325
Cargas concentradas, 250, 364
  equivalente, 252
Cargas distribuídas, 364
  em cabos, 384-385, 405
  em vigas, 250, 254, 278
Cargas triangulares, 254
Centro de pressão, 251
Centroides, 222
  de áreas e linhas, 224-225, 227-228, 276
  de um sólido, 260-262, 267, 277-278
  determinação, 230, 233
    por integração, 238-240, 263-275, 277, 279
Centroides e centros de gravidade, 222-285
  áreas e linhas, 222-259
  introdução, 222
  problemas para computador, 283-285
  problemas para revisão, 280-282
  resumo, 276-279
  sólidos, 260-275
Centros de gravidade, 233-238
  de corpos bidimensionais, 222-223, 276
  de corpos tridimensionais, 77, 260-262, 277-278
Ciência, 4
  abstrata, 4
  aplicada, 4
  pura, 4
Círculo de atrito, 447
Círculo de Mohr, para momentos e produtos de inércia, 507-512, 550-551
Coeficientes de atrito, 414-416
Completamente vinculada, 308
Componente retangular, 29, 34, 55, 148-149
  de uma força, vetores unitários, 29-31, 66
  de uma força no espaço, 47-50
  do momento de uma força, 85-95, 149
Componentes. *Ver* Componentes oblíquos; Componentes retangulares; Componentes escalares; Componentes vetoriais
Componentes do vetor, 30
Componentes escalares, 30, 32, 47, 66
Componentes oblíquos, 29
Compressão, 347-348, 356-357
Comprimento, 7
  unidades de, 12
Conceitos e princípios fundamentais, 4-7, 15
  lei de Newton da gravitação, 6
  lei do paralelogramo para a adição de forças, 5

princípio da transmissibilidade, 5
três leis fundamentais de Newton, 5-6
Condições de carregamento, 198, 364-365. *Ver também* Cargas aplicadas, Cargas concentradas, nós em condições especiais de carregamento, 294-296, 348
Condições necessárias e suficientes, 321
Constante de mola, 581
Constante gravitacional, 6
Conversão de um sistema de unidades para o outro, 12-13
unidades de comprimento, 12
unidades de força, 12-13
unidades de massa, 13
Coordenadas, 4
Corpo sujeito à ação de duas forças, 186, 347
Corpos
momento de inércia de, 474, 513-547, 551-553
produtos de inércia de, 540-541
Corpos bidimensionais, 160, 172
centro de gravidade de, 222-223, 276
Corpos compostos, 263, 279
momento de inércia de, 517-533
Corpos rígidos em sistema de forças equivalentes, 74-157
adição de binários, 113
binários equivalentes, 111-113, 151
casos particulares de redução de um sistema de forças, 128-130, 152
componente retangular do momento de uma força, 85-95, 149
forças externas e internas, 76-77
introdução, 76
mecânica de, 4-5
momento de um binário, 110, 151
momento de uma força em relação a um dado eixo, 99-109,150
momento de uma força em relação a um dado ponto, 83-84, 149
princípio da transmissibilidade, forças equivalentes, 77-79, 148
problemas para computador, 156-157
problemas para revisão, 153-155
produto escalar de dois vetores, 96-98, 149-150
produto triplo misto de três vetores, 98-99,150
produto vetorial de dois vetores, 79-81, 148
produto vetorial expresso em termos de componentes retangulares, 81-82, 148-149
projeção de um vetor em um eixo, 150
redução de um sistema de forças a um sistema força-binário, 151-152
redução de um sistema de forças a um torsor, 130-147
redução de um sistema de forças a uma força e um binário, 125-126, 151-152
representando binários por vetores, 113-114
resumo, 148-152
sistemas equipolentes de vetores, 127
substituição de uma dada força por uma força e um binário, 114-125
teorema de Varignon, 85
Corpos sujeitos à ação de três forças, 185-186
Corpos tridimensionais, centros de gravidade de, 260-262, 277-278
Cossenos diretores, 67-68
Cunhas, 431-432, 436

D

d'Alembert, 4
Decomposição
de um sistema de forças a uma força e um binário, 125-126,151-152
de uma dada força por uma força e um binário, 114-125
dos componentes de uma força, 23-29, 66
Deformação, 79
Desconhecidos, 39, 161-164, 192, 213, 326, 424
Deslocamento, 560
finito, 580-581, 595
virtual, 563-565, 594
Diagrama espacial, 38
Diagramas, esforço cortante e momento fletor, 367-375
Diagramas de corpo livre, 14, 39-42, 59-61, 68, 160-161, 168-172, 185, 194-198, 212, 232, 299, 311, 337, 359, 370, 381, 391, 421-422, 424, 447
Distância perpendicular, 29, 90, 102, 104, 523
Dois vetores,
produto escalar de, 96-98, 149-150
produto vetorial de, 79-81, 148

E

Eficiência
mecânica, de máquinas reais, 566-579, 595
na resolução de problemas, 326
Eixos
centroidal, 485, 491, 499, 515
paralelos, 491, 523
de inércia, principal, 499-507, 534-535, 550, 553
do torsor, 136, 138
projeção de um vetor, 97, 150
Elemento sujeito à ação de múltiplas forças
estruturas que contém, 318, 325-326, 337,349
forças internas em, 356, 405
Elementos retos sujeitos à ação de duas forças, forças internas em, 405
Elementos sem força aplicada, 295-296
Elevações, 391-392
Elipsoide de inércia, 534-535, 553
Embreagens a disco, 443, 447
Empirismo, 4
Energia potencial, 560, 582, 596
e equilíbrio, 583
Equilíbrio, 18
corpo sujeito à ação de duas forças, 183-184, 213
corpo sujeito à ação de três forças, 184-190, 213
de corpos rígidos, 158-219
diagramas de corpo livre, 161, 212
equações, 39, 212, 311, 370, 418-419
estabilidade, 584-593, 596
introdução, 160
problemas para computador, 218-219
problemas para revisão, 215-217
resumo, 212-214
Equilíbrio de uma partícula, 37-38
no espaço, 59-65, 68
problemas que envolvem, 38-47
Equilíbrio em duas dimensões, 162-190, 212-213
de corpo sujeito à ação de duas forças, 183-184, 213
de corpo sujeito à ação de três forças, 184-190, 213
de um corpo rígido bidimensional, 164-165

reações em apoios e conexões para estruturas bidimensionais, 162-163
reações estaticamente indeterminadas, vinculações parciais, 166-183, 213
vinculações impróprias, 213
Equilíbrio em três dimensões, 191-211, 213-214
de um corpo rígido tridimensional, 191
reações em apoios e conexões para uma estrutura tridimensional, 191-211
Erros em cálculos, antecipando, 15
Escorregamento, 453, 455-456
Espaço, 4
Estabilidade do equilíbrio, 584-593, 596
Estática de partículas, 16-72
forças em um plano, 18-47, 66-67
forças no espaço, 47-65, 67-68
introdução, 18
problemas para computador, 71-72
problemas para revisão, 69-70
resumo, 66-68
Estruturas,
análise de, 286-353
elementos sujeitos à ação de várias força, 318, 325-326
Estruturas e máquinas, 289, 318-346, 349
análise de uma estrutura, 318-319, 349
estruturas que contêm vários elementos sujeitos a várias forças, 318
estruturas que deixam de ser rígidas quando separadas de seus apoios, 319-333
máquinas, 333-346, 349

F

Fios
compostos, 228-238
homogêneos, 276
múltiplos, 267
Flecha, 399, 401
Flexão, 356-357
pura, 475
Flexibilidade, de cabos, 385, 406
Fluidos
compressibilidade de, 4
mecanismos de, 4
Força, 4-5, 7
de gravidade, 8, 582, 596
definida por sua intensidade e por dois pontos em sua linha de ação, 50-51
elástica, 596
sobre uma partícula, resultante de duas forças, 18-19, 66
unidades de, 12-13
Força axial, 356-357, 359, 405
Força de atrito cinético, 414, 447, 462
ângulo da, 417, 462
coeficiente da, 415, 423, 456, 462
Força de atrito estática, 414, 447, 462
ângulo de, 417, 462
coeficiente de, 415, 423, 456, 462
Força de cisalhamento, 356-357
diagramas, 367-375, 381-382
em uma viga, 365-367, 405-406
Forças
axiais, 356-357, 359
concorrentes, 22-23, 67, 184, 213
coplanares, 67
de cisalhamento, 356-357, 365-375, 406
de entrada, 333, 349, 566
de gravidade, 582
de saída, 333, 349, 566
elásticas, 596
em superfícies submersas, 251-259
em uma mola, 581-582, 596
externas e internas, 76-77
hidrostáticas, 492
paralelas, 129-130, 184, 213
vinculares, 161
Forças concorrentes, 128
no espaço, adição de, 51-59, 68
resultante de várias, 22-23, 67
Forças coplanares, 128-129
resultante de várias, 67
Forças distribuídas
centroides e centros de gravidade, 222-285
áreas e linhas, 222-259
introdução, 222
problemas para computador, 283-285
problemas para revisão, 280-282
resumo, 276-279
sólidos, 260-275
momentos de inércia, 472-557
introdução, 472-475
momentos de inércia de áreas, 475-512
momentos de inércia de corpos, 513-547, 551-553
problemas para computador, 556-557
problemas para revisão, 554-555
resumo, 548-553
Forças em um plano, 18-47, 66-67
adição de vetores, 20-22
componentes retangulares de uma força, vetores unitários, 29-31, 66
decomposição dos componentes de uma força, 23-29, 66
equilíbrio de partículas, 37-38
força em uma partícula, resultante de duas forças, 18-19, 66
pela soma dos componentes X e Y, 32-37
primeira lei de Newton do movimento, 38
problemas envolvendo o equilíbrio de partículas, diagrama de corpo livre, 38-47
resultante de várias forças concorrentes, 22-23, 67
resultante de várias forças coplanares, 67
vetores, 19-20
Forças em vigas e cabos, 354-411
cabos, 385-404
forças internas em membros, 356-363
introdução, 356
problemas para computador, 410-411
problemas para revisão, 408-409
resumo, 405-407
vigas, 364-385
Forças equivalentes, princípio da transmissibilidade em, 77-79, 148
Forças externas, 76-77, 148, 366
Forças internas, 76-77, 79, 148, 288, 347, 358-359
em elementos, 356-363
em elementos retos sujeitos à ação de duas forças, 405
em elementos sujeitos à ação de múltiplas forças, 325-326, 349, 356, 405
Forças no espaço, 47-65, 67-68
adição de forças concorrentes, 51-59, 68
componentes retangulares, 47-50
cossenos diretores, 67-68
diagramas de corpo livre, 68

equilíbrio de uma particular, 59-65, 68
força definida por sua intensidade e por dois pontos em sua linha de ação, 50-51
Forças no espaço tridimensional, 67
partículas em, 61
Formas arbitrárias, determinação dos eixos principais e dos momentos principais de inércia de um corpo, 536-547

G

Giração, raio de, 478-484, 514-551
Grand Viaduc de Millau, 354-355
Grandezas escalares, 560
Grandezas vetoriais, 66
Graus de liberdade, 583, 585
Gravitação
constante de, 6
força de, 8, 582, 596
lei de, 6

H

Hamilton, 4
Hidráulica, 4
Hidráulicas, forças, 492
Horizontal, elemento diferencial, 242

I

Inércia. *Ver também* Momento de inércia, Produtos de inércia
elipsoide de, 534-535, 553
produtos de massa, 540-541
Instituto Nacional de Padrões e Tecnologia, 11
Integração
dupla, 238, 263
tripla, 263

L

Lagrange, 4
Lei do paralelogramo, para adição de forças, 5, 19, 26-29, 66
Linhas. *Ver* Áreas e linhas
Linhas de ação, 18, 23, 77, 84, 311
Locomotiva, 412-413

M

Mancal
de cursor, 443
de deslizamento, 441-443, 447
de escora, 443-444, 447
de extremidade, 443
Máquinas, 333-346, 349
eficiência mecânica real de, 566-579, 595
Massa, 4-5, 7
unidades de, 13
Mecânica
conceitos e princípios fundamentais, 4-7
conversão de um sistema de unidades em outro, 12-13
de corpos deformáveis, 4
de corpos rígidos, 4
de fluidos, 4
definição, 4
método de resolução de problemas, 13-15
newtoniana, 4
precisão numérica, 15
relativístico, 5
sistemas de unidades, 7-12
Mecanismos lubrificados, 414
Método das seções, análise de treliças pelo, 306-307, 348
Método do trabalho virtual, 558-601
aplicações do princípio do trabalho virtual, 564-566
deslocamento virtual, 594
durante um deslocamento finito, 580-581, 595
energia potencial, 582-583, 596
equilíbrio e energia potencial, 583
estabilidade do equilíbrio, 584-593, 596
introdução, 559
máquinas reais, eficiência mecânica, 566-579, 595
princípio do trabalho virtual, 563-564, 594
problemas para computador, 600-601
problemas para revisão, 597-599
resumo, 594-596
trabalho de um peso, 595
trabalho de uma força, 559-563, 580-581, 595
Métodos dos nós, análise de treliças pelo, 292-294, 347-348
Mohr, Otto, 507
Molas
forças em, 581-582, 596
trabalho feito por, 581
Momento de um binário, 110, 151
Momento de uma força
em relação a um dado eixo, 99-109, 150
em relação a um ponto, 83-84,149
Momento fletor, 357, 359
diagramas, 367-375, 381
em uma viga, 365-367, 405-406
Momento polar de inércia, 474, 477-479, 481, 492
Momentos de inércia, 472-557
círculo de Mohr para, 507-512, 550-551
de superfícies compostas, 486-498, 549
de um corpo em relação a um eixo arbitrário, produtos de inércia de corpos, 533-534, 552-553
de um corpo tridimensional, determinação por integração, 517
introdução, 472-475
polar, 474, 477-479, 481, 492
principal, 499-507, 550
problemas para computador, 556-557
problemas para revisão, 554-555
resumo, 548-553
Momentos de inércia de corpos, 513-547, 551-553
de corpos compostos, 517-533
de corpos tridimensionais por integração, 517
de placas delgadas, 516-517, 552
de um corpo de forma arbitrária, 536-547
de um corpo em relação a um eixo arbitrário, produtos de inércia de corpos, 533-534, 552-553
eixos principais de inércia, 534-535, 553
elipsoide de inércia, 534-535, 553
teorema dos eixos paralelos, 515, 552
Momentos de inércia de superfícies, 475-512
círculo de Mohr para momentos e produtos de inércia, 507-512, 550-551
determinação do momento de inércia de uma superfície por integração, 476-477
eixos principais e momentos principais de inércia, 499-507, 550
momento de segunda ordem, ou momento de inércia de uma superfície, 475-476
momento polar de inércia, 477-478
momentos de inércia de superficies compostas, 486-498, 549
produtos de inércia, 498-499, 549-550

raio de giração de uma superfície, 478-484
teorema dos eixos paralelos, 485-486, 549
Momentos de primeira ordem, 222, 276, 475, 478
de áreas e linhas, 225-228, 230, 233, 276
Momentos principais de inércia, 499-507, 550
Momentos resultantes, 126
Movimento
iminente, 416, 419, 424, 463
primeira lei do, 38
relativo, 419

N

Newton, Sir Isaac, 4
Nós. *Ver* Método dos nós em condições especiais de carregamento, 294-296

O

Origem, 4

P

Pappus, 240
Parafusos
autotravantes, 433
de rosca quadrada, 432-441, 463
Partículas, 5
equilíbrio de, 16-17
estática de, 16-72
no espaço tridimensional, 61
Passando-se uma seção, 306
Passo, 130-131, 436
de um torsor, 136, 138
Permutação cíclica, 99
Peso, 8
trabalho do, 595
Pinos em atrito, 562
Placas
compostas, 228-238
delgadas, momento de inércia de, 516-517, 552
homogêneas, 276
múltiplas, 267
Planos
de simetria, 261, 263, 278-279
forças em, 18-47, 66-67
Ponte Astoria, 286-287
Princípio da transmissibilidade, 5, 76-79, 148
forças equivalentes, 77-79, 148
Princípio do trabalho virtual, 563-564, 594
Problemas
eficiência na resolução, 326
enunciado, 14
método de solução, 13-15
Problemas para computador
análise de estruturas, 352-353
atrito, 469-471
corpos rígidos, em sistemas equivalentes de forças, 156-157
equilíbrio de corpos rígidos, 218-219
estática de párticulas, 71-72
forças distribuídas
centroides e centros de gravidade, 283-285
momentos de inércia, 556-557
forças em vigas e cabos, 410-411
método do trabalho virtual, 600-601
Produto
escalar, de dois vetores, 96-98, 103, 149-150
triplo misto, de três vetores, 98-99, 150
Produto vetorial, 80, 90
de dois vetores, 79-81, 148
expresso em termos de componentes retangulares, 81-82, 148-149
Produtos de inércia, 498-499, 549-550, 553
Círculo de Mohr para, 507-512, 550-551
massa, 540-541
Projeção, de um vetor em um eixo, 97,150
Propriedade
associativa, 96
comutativa, 80
em adição, 20
distributiva, 80

Q

Queen Elizabeth 2 (transatlântico), 74-75
Questões de validade, 376

R

Raio de giração
de um corpo, 514, 551
de uma área, 478-484
Reações em apoios e conexões
equivalentes a uma força e um binário, 162
equivalentes a uma força com linha de ação conhecida, 162
equivalentes a uma força de direção, sentido e intensidade desconhecidos, 162
para uma estrutura bidimensional, 162-163
para uma estrutura tridimensional, 191-211
Reações estaticamente indeterminadas, 166-183, 198, 213-214
Redução de um sistema de forças, 128-130, 137-138, 152
para um sistema força binário, 151-152
para um torsor, 130-147
Regra
da mão direita, 79
do polígono, para a adição de vetores, 22
do triângulo, 21, 26
Repouso, ângulo de, 417
Resistência ao rolamento, 443-451
coeficiente de, 443, 447
Respostas, verificando cuidadosamente, 15
Resultantes, 18-19, 34, 37, 53, 76, 132, 136-137
de várias forças coplanares, 67
momentos, 126, 137
Resumo
análise de estruturas, 347-349
atrito, 462-464
corpos rígidos, em sistemas de forças equivalentes, 148-152
equilíbrio de corpos rígidos, 212-214
estática de partículas, 66-68
forças distribuídas,
centroides e centros de gravidade, 276-279
momentos de inércia, 548-553
forças em vigas e cabos, 405-407
método do trabalho virtual, 594-596
Revolução
de um corpo, 240-241
superfície de, 240-241
Rio
Columbia, 220-221, 286-287
Tarn Gorge, 354-355
Rotação, 77

S

Segundo momento de inércia, de uma área, 474-476, 478
Simetria, 540
  de uma elipse, 492
  planos de, 261, 263, 278-279
Sistema
  de forças, equivalente, 127, 148, 152
  força-binário, 76, 115, 132-133, 359
Sistema de unidades, 7-12
Sistema Internacional de Unidades (unidades SI), 7-10
  unidades de área e volume, 7-10
  usado em mecânica, 10
Sistemas equipolentes de vetores, 127
Sólidos, 260-275
  centro de gravidade de corpos tridimensionais, 260-262, 277-278
  centroide de, 260-262, 277-278
  corpos compostos, 263, 279
  de revolução, 240-241
  determinação do centroide de, por integração, 263-275, 279
Soluções
  analíticas, 32, 42
  definidas previamente, 299
  gráficas, 25, 32, 38
  trigonométricas, 24-25, 32
Superfícies
  de revolução, 240-241
  não lubrificadas, 414, 462
  quadráticas, 534
  submersas, forças em, 251-259
Suposições, 365-366

T

Tempo, 4-5, 7
Teoremas
  de Pappus-Guldinus, 222, 240-249, 278
  de Varignon, 85, 112-113
  eixos paralelos, 485-486, 491, 515, 523, 549, 552
Tirantes, 316
Torsor, 152
  passo do, 136
Trabalho, 560-561. *Ver também* Método do trabalho virtual
  de um peso, 595
  de uma força, 559-563
  durante um deslocamento finito, 580-581, 595
Trabalho virtual. *Ver* Método do trabalho virtual
Tração, 348, 356-357, 385-387, 392
  valores máximos e minímos de, 400
Transatlântico, 74-75
Translação, 77
Transmissibilidade, princípio da, 5, 76-79, 148
Treliças, 289-317, 347-348
  análise de, 289-317, 347-348
  definição de uma treliça, 289-290
  espacial, 296-306, 348
  nós em condições especiais de carregamento, 294-296
  rígidas, 291, 308, 321
  treliças compostas, 307-308
  treliças espaciais, 296-306, 348
  treliças feitas de várias treliças simples, 307-317, 348
  treliças Fink, 307
  treliças simples, 291, 347
Treliças estaticamente determinada 308, 312, 321, 348
Treliças estaticamente indeterminadas, 308, 312
Três leis fundamentais de Newton, 5-6, 14, 77-78
  lei da gravidade, 6
  primeira lei do movimento, 38
  terceira lei, 292, 318
Três vetores, produto triplo misto de, 98-99, 150
Tríade orientada diretamente, 79
Triângulo de forças, 39, 185

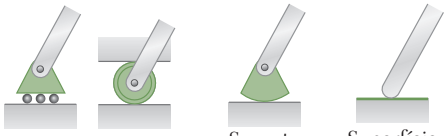
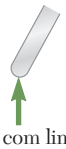
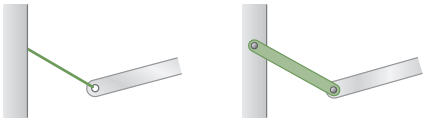
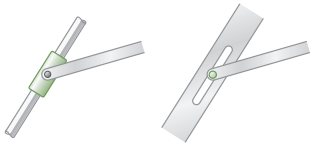
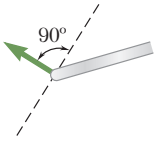
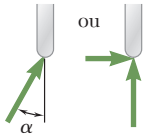
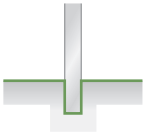
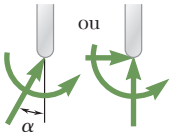
U

Unidades
  cinéticas, 7
  de área e volume (unidades SI), 7-10
  de comprimento, 12
  de força, 12-13
  de massa, 13
  derivadas, 7
  gravitacionais, 11
  sistema consistente de, 7
  usuais (U.S.), 11-12, 14
Unidades SI. *Ver* Sistema Internacional de Unidades

V

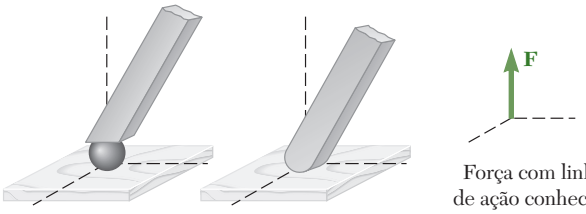
Vão, 364, 399
Veleiro, 158-159
Vetor fixo, 19
Vetores, 5, 19-20, 54
  adição de, 20-22
  binários, 151
  coplanares, 22
  deslizantes, 20, 78
  fixos e livres, 19-20, 110, 118
  negativos, 20
  posição, 83, 86,149
  produto triplo misto de três, 98-99, 150
  representando binários por, 113-114
  sistema equipolentes de, 127
  subtração de, 21
  unitário, 30
Vigas
  balanço, 406
  com extremidade em balanço, 406
  diagramas de esforço cortante e momento fletor, 367-375
  esforço cortante momento fletor em, 365-367, 406
  forças, 364-385
  relações entre carregamento, esforço cortante e momento fletor, 375-385, 406
  simplesmente suportada, 406
  vários tipos de carregamento e apoio, 364-365
Vínculos, 161
  completos, 308, 312, 348
  impróprios, 167, 192, 198, 213-214, 312
  parciais, 166-183, 192, 198, 213-214, 312
Volume, unidades de (SI), 7-10

Reações em apoios e conexões para uma estrutura bidimensional

Apoio ou Conexão	Reação	Número de incógnitas
 Roletes; Suporte basculante; Superfície sem atrito	 Força com linha de ação conhecida	1
 Cabo curto; Haste curta	Força com linha de ação conhecida	1
 Cursor sobre haste sem atrito; Pino deslizante sem atrito	 Força com linha de ação conhecida	1
Pino sem atrito ou articulação; Superfície rugosa	 Força com direção desconhecida	2
 Engaste	 Força e binário	3

O primeiro passo na solução de qualquer problema que envolva o equilíbrio de um corpo rígido é construir um diagrama de corpo livre apropriado deste corpo. Como parte desse processo, é necessário mostrar nesse diagrama as reações através das quais o solo e outros corpos se opõem a um possível movimento do corpo. As figuras das capas internas resumem as possíveis reações exercidas sobre corpos bi e tridimensionais.

Reações em apoios e conexões para uma estrutura tridimensional



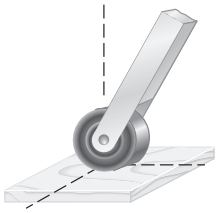
Esfera

Superfície sem atrito

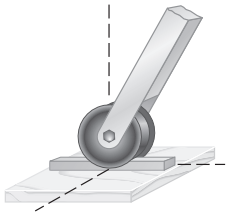
Força com linha de ação conhecida (uma incógnita)

Cabo

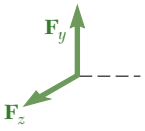
Força com linha de ação conhecida (uma incógnita)



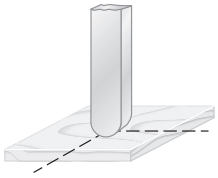
Rolete sobre superfície rugosa



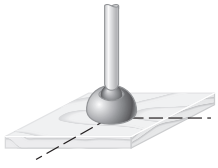
Roda sobre trilho



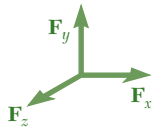
Dois componentes de força



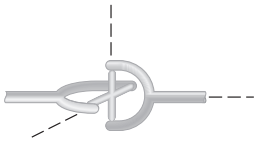
Superfície rugosa



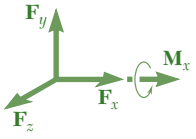
Rótulo



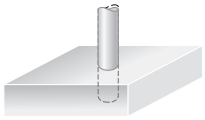
Três componentes de força



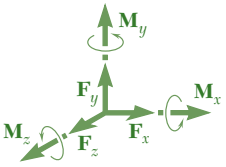
Junta universal



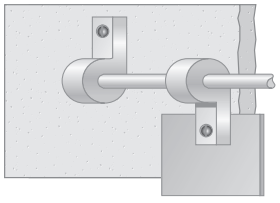
Três componentes de força e um binário

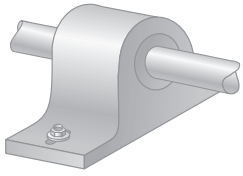


Engaste

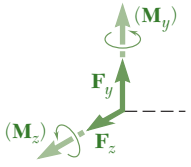


Três componentes de força e três binários

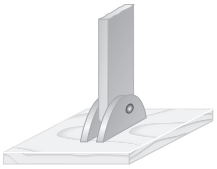




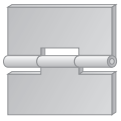
Dobradiça e mancal suportando apenas carregamento radial

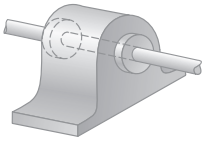


Dois componentes de força e dois binários (ver a página 194)

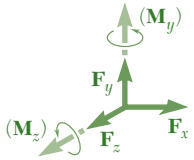


Pino e suporte



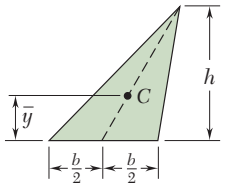
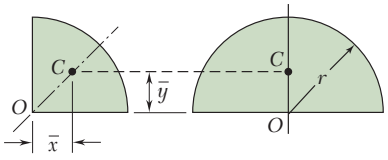
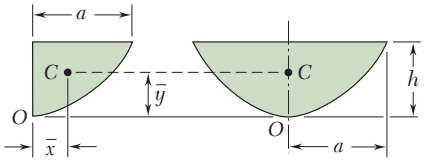
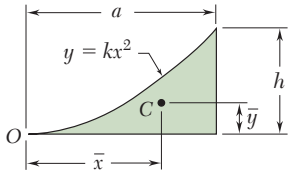
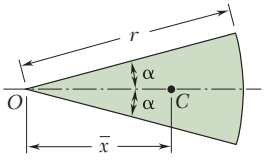
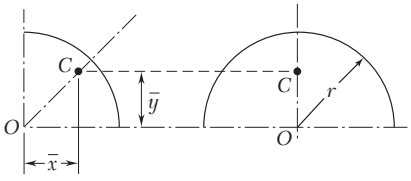
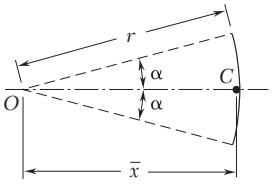


Dobradiça e mancal suportando empuxo axial e esforço radial



Três componentes de força e dois binários (ver a página 194)

Centroides de áreas e linhas de formatos comuns

Formato		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Área de um quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Área sob arco parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Setor circular		$\frac{2r \operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Arco de um quarto de círculo		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

9ª Edição

Mecânica Vetorial para Engenheiros

ESTÁTICA

FERDINAND P. BEER
E. RUSSELL JOHNSTON JR.
DAVID F. MAZUREK
ELLIOT R. EISENBERG

Com conceitos precisos e completos e seções especiais de resoluções de problemas, este livro, no Sistema Internacional de Medidas, fornece aos alunos de Engenharia a oportunidade de aprender Estática de forma prática.

- Entre os suplementos oferecidos ao professor, lâminas de PowerPoint em português.
- Os capítulos são abertos com exemplos reais e com um sumário resumido dos conteúdos que serão trabalhados.
- Os conceitos são apresentados passo a passo, de forma clara e objetiva.
- Seções opcionais oferecem tópicos avançados.
- A seção **Problemas resolvidos** é apresentada em uma única página, o que proporciona melhor visualização dos problemas-chave.
- A seção **Metodologia para a resolução de problemas** prepara os alunos para solucionar os exercícios propostos.
- Cada capítulo oferece um conjunto de problemas que devem ser resolvidos com o auxílio de programas computacionais.

Visite a Área do Professor no site **www.grupoa.com.br** para acessar material exclusivo (em inglês e português) deste livro.

ENGENHARIA MECÂNICA

ISBN 978-85-8055-048-1

www.grupoa.com.br

Mc Graw Hill

bookman

grupo a
Conhecimento que transforma.